

アリスモゴンを活用した本質的学習場の構成について —ICT を活用した算数の授業デザイン—

鈴江 暁朗¹⁾, 水口 蘭¹⁾, 吉本 果矢¹⁾, 中野 俊幸²⁾

1)高知大学大学院総合自然科学研究科教職実践高度化専攻院生

2)高知大学大学院総合自然科学研究科教職実践高度化専攻

A Study on the Construction of Substantial Learning Environments with Arithmogons —Design of Mathematics Lesson in Primary School with ICT—

SUZUE Nobuo¹⁾, MIZUGUCHI Fuki¹⁾, YOSHIMOTO Kaya¹⁾, NAKANO Toshiyuki²⁾

1)Kochi University Graduate School of Integrated Arts and Sciences,

Professional Schools for Teacher Education, Graduate student

2)Kochi University Graduate School of Integrated Arts and Sciences,

Professional Schools for Teacher Education

要 約

本研究は、算数・数学授業において「深い学び」を実現するために「本質的学習場」の構成をめざして、「アリスモゴン」を教材とした授業デザインについて考察したものである。小学校第2学年と第6学年に対し授業を実践し、その教育的效果を評価した。算数の実践では、アリスモゴンの図をタブレットPCの画面上に作成し、ICTの思考道具としての活用も考案した。第2学年の授業では、初めは解を求めることが目的であったが、展開過程で数を変化させたときの法則を発見することに目的が変容し、児童自ら発見した法則を適用して挑戦的問題を解決するという高度な問題解決活動が実現できた。第6学年では、第2学年より多くの法則が発見され、発見した解法の一般性も理解させることができ「深い学び」が実現できた。また、ICTを思考道具として活用したことで略図的操作を可能にし、すべての児童を探究活動に参加させることができた。

キーワード：本質的学習場、アリスモゴン、ICT活用、算数・数学授業デザイン

1. はじめに

新学習指導要領の実施に伴う授業改善の指針として「主体的・対話的で深い学びの実現」が示されたが、教育現場では、その「深い学び」の具体的実践のイメージがつかみ難いと受け止められ、「深い」ことの実践へ明確で妥当な解釈を基にした具体的授業デザインを例示することが、数学教育の実践的研究に最も期待されている課題の一つになっている。

本研究では、「深い学び」の「深さ」を数学的問題解決活

動の展開における「方法の対象化」のような目的の変容や数学化における一般化・統合化・記号化などとして解釈した。そして、そのような授業を実現するための教材の開発と授業デザインを、Wittmann, E.Ch.の提唱している「本質的学習場（Substantial Learning Environments; SLEs）」(Wittmann, et al. 2002) の理論に基づいて行った。

また、本質的学習場を構成するための数学的題材として「アリスモゴン (Arithmogons; 計算多角形)」に着目した。アリスモゴンは、McIntosh, A. と Quadling, D. が 1975 年に Mathematics Teaching 誌に提案した教材である

(McIntosh & Quadling 1975)。Wittmann と Müller らの mathe2000 プロジェクト編纂の小学校算数教科書 Das ZahlenBuch (Wittmann & Müller 2004)では、アリスモゴンが形を変えて複数の学年の教材として採用されている。本研究でもこの形のアリスモゴンを採用した。

本研究では、まずアリスモゴンによる本質的学習場の構成の可能性について、小学校算数および中学校数学の授業をデザインする立場から考察する。算数の授業デザインでは、数学教育用アプリ GeoGebra を使ってアリスモゴンの図をタブレット PC の画面上に作成し、●の数を児童が自在に操作できるようにし、これを思考道具として活用することとした。そして、小学校第2学年と第6学年を対象に実験的授業を行い、実践を通してアリスモゴンを本質的学習場とする授業デザインの教育的可能性と有効性およびその際のICT活用の有用性について考察する。

2. アリスモゴンと本質的学習場について

(1) 本質的学習場とその構成方法について

Wittmann は、数学教育学をデザイン科学と捉え、その核心はある教材で構成される教授単元 (Teaching Units) のデザインであると主張してきた (Wittmann 1995)。2000年代の論説では、この考え方を進化させ、次の4つの条件を満たす教授単元を「本質的学習場 (Substantial Learning Environments; SLEs)」と再定義して、そのデザインこそが数学教育学の核心であると主張している。(Wittmann 2002)。

- a. ある水準での数学教育の主要な目標、内容、原理を表象していること
- b. この水準を超えた意義のある数学的な内容、過程、方法と結びついており、それは数学的活動の豊かな源泉になっていること
- c. 柔軟性をもち、個々の学級の実態に合わせることができること
- d. 数学教育についての数学・心理学・教授学的観点を統合し、実践的研究の豊かな場を形成できること

これらの観点を特に日本の算数・数学学習指導と関連付けて解釈すると次のようになる。

a. は、算数科・数学科の目標や内容・方法、数学的見方・考え方などの学習が、その教授・学習単元つまりその教材による学習で具現化できるかである。逆に、その教材は、学習指導要領で示されている当該学年の学習目標やその学年の算数・数学指導上の目標や内容・方法に位置づけることができるかということになる。

b. は、本質的学習場の「本質的 ("Substantial")」という言葉の意味と最も関連する観点といえる。この言葉は「数学的発展性と深淵な数学的意義があり、数学的活動の豊かな源泉になっている」と読みかえることができよう。つまり、本質的学習場は、児童・生徒が数学的な見方・考え方を働かせて数学的問題解決や数学化などの数学的活動に臨むことができる場を意味するのである。該当の教材による授業デザインがそのような学習場を構成できているかがこの条件である。

c. は、授業対象の学級の様々な児童・生徒の実態に合わせた多様なアプローチを可能にするものであるかである。例えば、記号的操作が困難な児童・生徒でも、図的操作や具体的な操作によって探究活動に参加することができるといった教授学的柔軟性である。この柔軟性を広く捉えると、発達段階や学校種・学年を超えて扱うことのできる教材であると同時に、授業対象の学年に適した指導方法や授業デザインを構想することが可能であるかを問うものである。

d. は、数学的教材の開発・研究を、大学や研究所の理論的研究者と授業を実践する教育現場の教員が共同して行うことができるものであるか、さらにその教材を使った授業をデザインして研究授業を行い、その教育的効果と課題を実践的かつ理論的に省察するような実践的研究を推進することにつながったかである。

本研究での授業実践から得られた成果と課題は、第5節においてこれら4つの観点から考察する。

ところで、上述のような本質的学習場を構成するためには、教材のもつ数学的発展性とその深淵な数学的価値を分析し、また、児童・生徒への教授可能性を検討するとともに具体的な学習指導法を考案する必要がある。本研究では、このための方法として、中野が開発している教材開発の7つのストラテジーを活用した。内容は次の通りである。

- | |
|--------------------|
| ① ある変数を連続的に変化させ並べる |
| ② ある条件・性質を否定して変更する |
| ③ 問いと答えを逆転させる |
| ④ セッティングを変える |
| ⑤ 図を動かす |
| ⑥ 範囲の制限をはずす |
| ⑦ 次元を変える |

次項では、これらのストラテジーのいくつかを活用して、アリスモゴンからどのような教材が開発可能か、そして、その教材を活用することで本質的学習場が構成できるかを考察する。

(2) アリスモゴンの数学的発展性と教授可能性について

McIntosh と Quadling が提案した

アリスモゴンは図 1 において「□にあてはまる数は、その両隣の○の中にある数の和でなければならない」というシンプルな規則からなるものである (McIntosh & Quadling 1975)。いくつかの□や○の数を指定し、残りの□や○にあてはまる数を求ることになる。

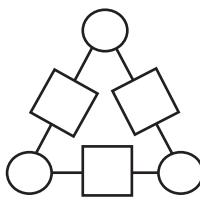


図 1 McIntosh らのアリスモゴン

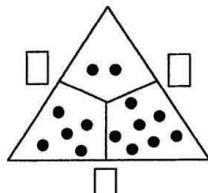


図 2 Wittmann のアリスモゴン

Wittmann は、アリスモゴンを教授単元の典型的教材として図 2 のような形態で示した (Wittmann 1995)。この形態は、小学生におはじきなどをを使った具体的な操作をさせることをねらって変形したと考えられる。実際、

ZahlenBuch では、図形の内側におはじきを置いて、子どもがおはじきを操作している様子の挿絵が描かれている (Wittmann & Müller 2004)。以下では、Wittmann の形のアリスモゴンに対して教材開発の 7 つのストラテジーのいくつかを用いて、どのような教材が開発できるかを考察する。

まず、最も原始的なアリスモゴンとして、内側の 3 つの数が与えられてその和を求めるもの (図 3 左)、次に内側と外側の数がいくつか与えられているもの (図 3 中) が考えられる。図 3 左と図 3 中のアリスモゴンは、与えられた数を順序よく加法・減法することで解くことができるが、与える数を拡張すると自然数だけでなく小数・分数・正負の数などに対する加減の学習に活用できる。

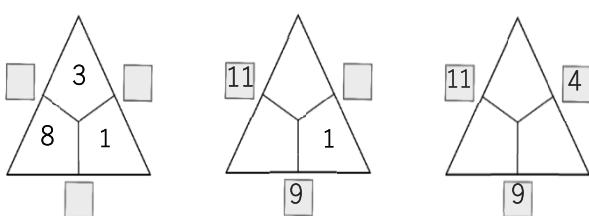


図 3 アリスモゴンの問題設定例

図 3 左に対してストラテジーの③を適用すると外側の 3 つの和が与えられて内側の 3 つの数を求めるもの (図 3 右) が得られる。この場合は、加法・減法で直接算出することはできないので、小学校段階においては挑戦的問題となり、数の変化に着目した関数的なアプローチによる問題解決学習が設定できる。詳細は次節で述べる。

中学校段階においては、方程式を使って解く学習が設定できる。用いる方程式は、一元一次方程式と三元一次方程

式による 2 通りが考えられる。さらに、一元一次方程式の立式には次の 2 通りが考えられる (図 4)。

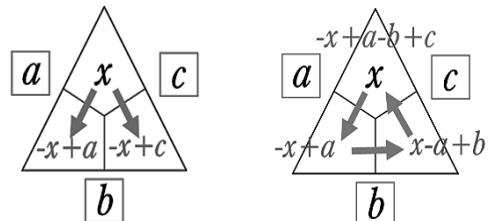


図 4 三角アリスモゴンにおける立式の過程

図 4 左による立式

$$(-x + a) + (-x + c) = b \\ x = \frac{a - b + c}{2}$$

図 4 右による立式

$$x = -x + a - b + c \\ x = \frac{a - b + c}{2}$$

よって、三角アリスモゴンの一般解は、

$$x = \frac{a - b + c}{2} \quad \text{である。}$$

次にストラテジーの②を用いて、三角アリスモゴンを四角アリスモゴンに発展させ、その一般解について考察する。このとき、図 4 左の方法ではさきほどとは異なり、立式に 2 通りの場合がでてしまう (図 5 の左と中)。

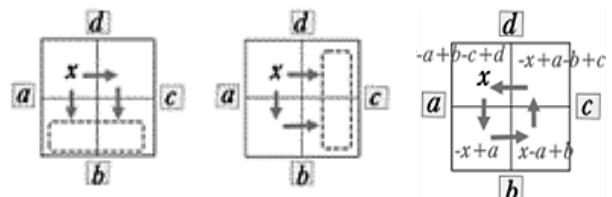


図 5 四角アリスモゴンにおける立式の過程

一方で、図 4 右の方法はすべてのアリスモゴンで活用できるので、以下では図 4 右の方法で立式する。

四角アリスモゴンにおいて方程式をたてると

$$x = x - a + b - c + d$$

であるから、

$$\begin{cases} a + c = b + d \Rightarrow \text{不定解} \\ a + c \neq b + d \Rightarrow \text{不能解} \end{cases}$$

となり、外側の 4 数をどのように設定しても一般解が一意に定まるこではない。

五角アリスモゴンでは、

$$x = -x + a - b + c - d + e$$

より、一般解は一意に定まる。

$$x = \frac{a - b + c - d + e}{2}$$

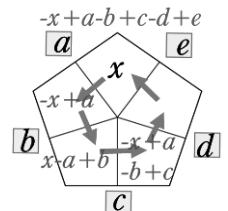


図 6 五角アリスモゴンの立式過程

このように一元一次方程式によるアプローチで n 角アリスモゴンへ拡張すると、奇数角アリスモゴンと偶数角アリスモゴンの解の特徴や条件が見いだせる。さらに、方程式の構造の特徴 (特に右辺の各項における符号の変化) に

ついても見いだすことができる。これらのことから、 n 角アリスモゴンにおける方程式も外側の数を $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ とすると

$$\begin{cases} nが偶数 \Rightarrow x = x - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + a_n \\ nが奇数 \Rightarrow x = -x + a_1 - a_2 + a_3 - \dots + a_n \end{cases}$$

と容易に立式できる。また、外側の数の偶数番目の和を $S_{偶数}$ 奇数番目の和を $S_{奇数}$ とするとき、奇数角アリスモゴンの一般解は

$$x = \frac{S_{奇数} - S_{偶数}}{2}$$

であり、偶数角アリスモゴンの解の条件は

$$\begin{cases} S_{奇数} = S_{偶数} \Rightarrow 不定解 \\ S_{奇数} \neq S_{偶数} \Rightarrow 不能解 \end{cases}$$

であることがわかる。なお、不定解と不能解は、中学校の関数領域で 2 つの一次方程式のグラフの一一致と平行との場合として扱うことも可能と考える。

このように奇数角アリスモゴンの解の一意性、偶数角アリスモゴンの不定解と不能解については、高校段階では十分に扱え、中学校段階で発展課題として扱うことが可能である。

さらに、ストラテジーの④を用いて図 7 のように図形領域の問題に変換すると、McIntosh と Quadling も考究している(McIntosh&Quadling 1975)が、「三角形において 3 つの辺の長さが与えられているとき、各頂点を中心とし、他の 2 円と接するような 3 円があるか。あるならばその半径はいくつか」という問い合わせを設定できる。

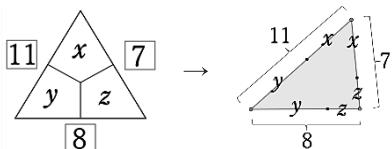


図 7 「図形」領域への拡張

この問い合わせはさらに次の命題と発展的な問い合わせを導く。

(命題 1) 2 円の共通接線を 3 つ引くと 1 点で交わる。

(命題 2) その点は三角形の内心である。

(発展的問い合わせ) 四角形の場合でも同様の命題が成り立つか。

また、成り立つための条件はなにか。

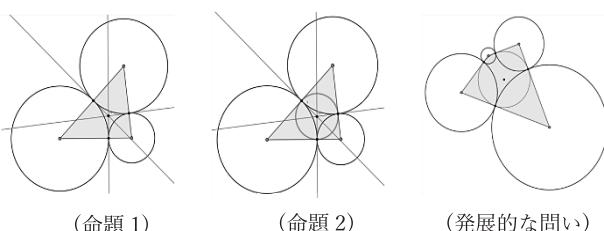


図 8 アリスモゴンの図形領域での性質

これをさらにストラテジーの⑦を用いて三次元多面体へと拡張すると、Wittmann が提案している「アリスモヘドラ(Arithmohedra : 計算 4 面体)」になり、これらの条件と解との関係を行列で表現することで、線形代数の問題に発展させることができ、大学の教員養成課程において有用な教材になる可能性のあることを袴田と大滝が考察している (Wittmann 2005, 袴田 & 大滝 2019)。

以上のように、アリスモゴンは単純な計算問題を超えて関数的法則や方程式、図形にも関連する内容に発展させることができ、様々な学年に対応した問題を生み出し、広い学年にわたって扱える可能性を持っている。これらの豊富な内容を活かし、本質的学習場を構成する授業をどのようにデザインするかを次節で考察する。

3. アリスモゴンによる本質的学習場の構成と授業デザイン

(1) 小学校算数における本質的学習場の構成と ICT 活用

① アリスモゴンによる本質的学習場の構成

アリスモゴンの小学校算数科への位置づけは、「数と計算」領域における加法・減法の意味を理解したり、その計算に習熟したりする計算問題になる。しかし、Das ZahlenBuch では、以下のような問題構成がなされており、ただの計算問題で終わらせていない。

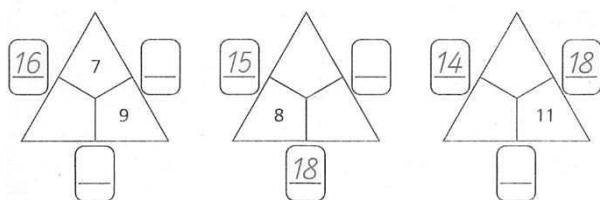


図 9 アリスモゴン (Das ZahlenBuch より)

これを解いてみると以下のようない連のアリスモゴンが完成する。

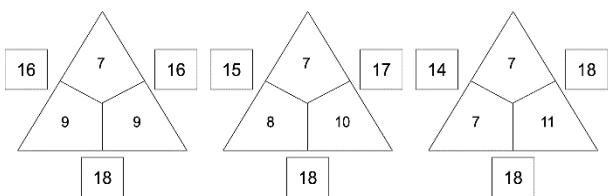


図 10 完成したアリスモゴン

3 つのアリスモゴンを左から連続して見たとき、内側の 7 や外側の 18 が変化していないことや、外側と内側の左の数は 1 ずつ減り、右の数は 1 ずつ増えている構成になっている。このように、単に加法・減法の計算練習をさせるだけでなく、数の変化に着目させ、パターンや構造の美しさ

さを体験できる仕組みが施されている。Wittmann は、このような構造化した練習を「生産的練習（productive practice）」と呼んでいる。

しかし、Das ZahlenBuch では、児童の発見した関数的法則を使ってさらに挑戦的問題を解決するような構成にはなっていない。そこで、本研究では、アリスモゴンの挑戦的問題を与え、それを児童自ら発見した関数的法則を適用して問題解決するという授業を考案した。関数的法則の発見の文脈は、上述のストラテジーの①をもとに、数を1ずつ変化させて、他の数がどのように変化するかを探究させることで、不变性や共変性に気づかせようと考えた。変化させる独立変数と従属変数の設定には、次のような方法が考えられる。

- ・第2節の図4左の x にある数を仮に入れ、外側の和になるように内側の左右の数を計算して外側の下の和を算出し、 x の数を1ずつ増やすと下の和がどう変化するかを考察する方法
- ・図4右の x にある数を仮に入れ、左回転に内側の数を順に計算して、上の x のところにもどってくる数を算出し、ある x の数を1ずつ増やすともどってくる数がどう変化するかを考察する方法

しかし、本研究ではこのどちらの方法も採用しなかった。本研究では、図10右のようなアリスモゴンを最終目標として提示した後、これを簡単にしたものとして、まず図10左のような外側の左右の数が同じアリスモゴンを与え解決させる。そして、このアリスモゴンを出発点として外側の左右の数を1ずつ増減させて、図10に並んでいるような一連のアリスモゴンを作成させ、これらの数の変化から関数的法則を発見させる文脈を採用した。この方法を採用した理由は、外側の左右の数が同じ数のアリスモゴンなら児童が直観的に解を見つけることができると考えたからである。まず容易に解ける特殊なアリスモゴンを解決させて問題解決の動機付けを図り、それを出発点として一連のアリスモゴンから関数的法則を児童自らに発見させて問題解決に至る文脈を構成したのである。この方法で児童に発見させたい法則は、以下の3つである（図10参照）。

- a. 外側の左の数を1減らし、右の数を1増やしても、内側の上の数は変わらない
- b. 外側の左の数を1減らし、右の数を1増やしても、外側の下の数は変わらない
- c. 外側の左の数は1減らし、右の数を1増やし、外側の下の数は変わらないとき、内側の左の数は1減り、右の数は1増える

このようなアリスモゴンを活用した問題解決に取り組

ませることで、「数と計算」領域だけではなく、「変化と関係」領域における関数的考え方の涵養もねらいとした授業をデザインできると考えた。

② 思考道具としてのICT活用について

小学校低学年では、加減や数の変化を探究する活動にすべての児童を参加させるには、数字の操作だけでなく、おはじきのような半具体物を使った具体的な操作が必要である。例えば、足し算の暗算が苦手な児童でもおはじきの数を数え足すことで和を求めることができる。また、ストラテジーの⑤にあるように、低学年以外でも、数の変化と規則性のイメージを持たせるためには、具体的な操作が効果的である。例えば、アリスモゴンで内側の左右の数を同数だけ増減させてもその和が変わらないことは、おはじきを内側の左から右へ実際にいくつか動かして全体のおはじきの状態を観察させることにより、その具体的な操作イメージから理解させることができると考えた。

しかし、実際のおはじきだと、数多くのおはじきが必要であり、配布したり、配布したおはじきを使って課題の状態のアリスモゴンを児童一人ひとりの机の上に作ったりすることに時間がかかる。また、児童の小さな机の上が煩雑になり、思わず動いたり落ちたりてしまい、探究活動に集中できないことも考えられる。

そこで、GeoGebra を使ってタブレットの画面上で自由に●の操作ができるICT教具を開発した。また、視覚的に領域を区別しやすくなるとともに、指示や対話する際に色を使って説明することができるよう、内側の3つの領域を色で分けて表示した。

(2) 中学校数学授業における本質的学習場の構成

アリスモゴンの中学校数学での位置づけとしては、「数と式」領域における方程式の活用や文字式で表現したり、文字式を読み取ったりすることである。また、第2節(2)で考案した「図形」領域への発展を考えた場合、図形の構成要素に着目し、演繹的な推論によってその性質を明らかにすることとの関連もある。そのため、中学校においては、具体数による三角アリスモゴンと四角アリスモゴンの解決を入口として、アリスモゴンの解の特徴やその条件を探求するような授業デザインが考えられる。

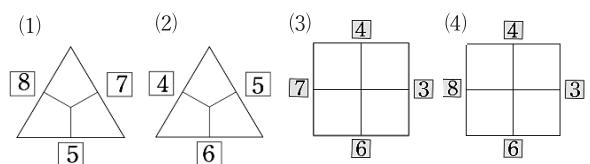


図11 アリスモゴンの具体例

図 11 では、(1)は整数解、(2)は分数解、(3)は不定解、(4)は不能解となる。このように問題設定をすることで、(2)では方程式を用いる必要性が生じ、(3)や(4)では、「どんな数でも成り立つもの」と、「どんな数でも成り立たないもの」があるという生徒のこれまでの学習経験にない現象に出会わせることができる。このことは、アリスモゴンの「解をどのように求めればよいか」という当初の目的から、「なぜ、このようなことになるのか」、「五角アリスモゴンや六角アリスモゴンでも同じように考えられるのか」といった数学的により高次の目的への昇華が期待される。

授業デザインとして、導入段階では、具体的なアリスモゴンで解の特徴に気づかせ、展開段階では、一般化した三角アリスモゴンと四角アリスモゴンについて一次方程式を立式し考察することで、解の特徴やその条件について明らかにさせる。そして高次の目的への昇華を基に、発展段階に進み、五角アリスモゴンや六角アリスモゴンについて考察することを通して、偶数角アリスモゴンと奇数角アリスモゴンの場合で解の特徴が異なることや、不定解および不能解になる場合の条件について考察する一連の活動を中学校数学の授業としてデザインできる。

4. アリスモゴンを活用した算数授業デザイン

(1) 小学校第2学年における授業デザイン

① 学習指導過程について

まず、図 12 のアリスモゴンを最終目標として与える。この問題は、2年生には挑戦的で解決困難であることを確認した後、図 13 のように外側の数をすべて 8 にしたアリスモゴンを与える。そして、GeoGebra を使って作成した思考道具を操作しながら内側の数を見つけさせる。この場合、8 の半分と考え容易に解は見つけられる。

次に図 14 のように、外側の左の数を 1 ずつ減らし右の数は 1 ずつ増やし、下の数は変わらないアリスモゴンの内側の数を求める問題を提示し、「●を 1 つだけ動かせばできます」というヒントを与えて解を考えさせる。●を左から右へ 1 つ移動させればよいことに気づかせて、図 15 の 1 行目の一連のアリスモゴンを解決させる。

さらに、下の数が 10 の場合を考えさせて、図 15 のように下の数が 8 の一連のアリスモゴンの下に二次元的に並べ、この図を観察させ、児童に縦・横・斜めの変化の法則を見つけさせていく。

関数的法則を学級全体で確認した後、最終目標の 6・12・10 のアリスモゴンを改めて提示し、どこに置けばよいか問う。関数的法則を使って、最終目標のアリスモゴンを解決させる。

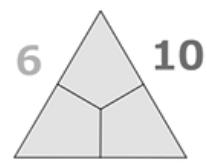


図 12 最終目標のアリスモゴン

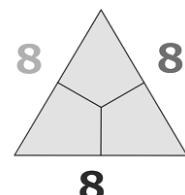


図 13 外側の数が同じアリスモゴン

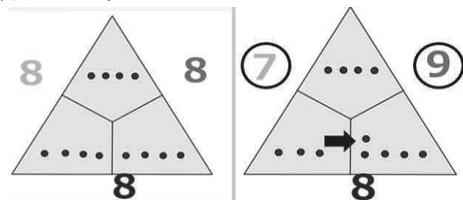


図 14 GeoGebra を使って作成した思考道具

② 学習指導案

学習指導案は表 1 の通りである。

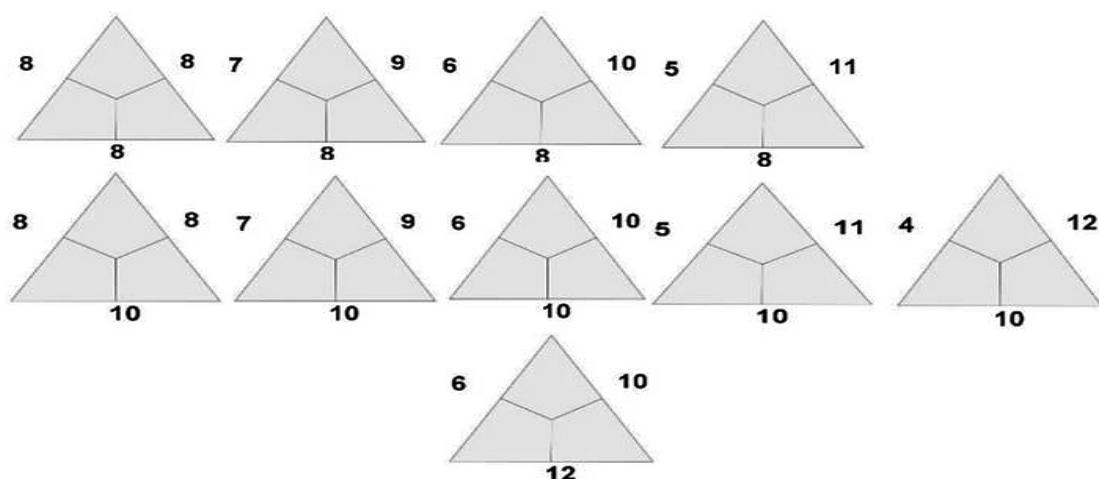
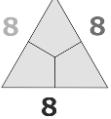
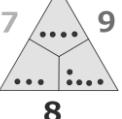
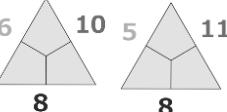
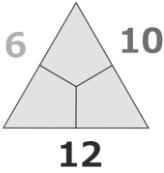


図 15 2 次元的に並べたアリスモゴン

表1 学習指導案

	学習活動・発問	指導過程	指導上の留意点
導入	<p>1. 課題を把握する 発問アリスモゴンの●を求めよう。 (反応) できない。 発問では、これならどうですか。 (反応) 8・8・8だったらできる。</p>	<ul style="list-style-type: none"> 6・12・10 のアリスモゴンの中に●がないものを提示する。 改めて8・8・8のアリスモゴンを提示する。 	<ul style="list-style-type: none"> 数を半分に分けるとイメージがもちやすく、解決しやすい数にする。
展開1	<p>2. ●の操作と数の変化を考える 発問1つだけ動かして完成させましょう。 (反応) 下を、1動かしたらいい。 発問どうなるか考えて、プリントにまとめましょう。 発問下の数はどうなっていますか。 (反応) いつも8になっている。 発問下が10の場合はどうなるでしょう。 (反応) 下は5と5に分けたらいい。 上は、3だ。 下は左から右へ1つずつ●を動かして作れる。</p>	<ul style="list-style-type: none"> 8・8・8のアリスモゴンの●を1つだけ動かして7・8・9のアリスモゴンを作る課題を与える。 さらに、右の2つのアリスモゴンを作る課題を与える。 4+4も3+5も8になる事に着目させる。 下が10のアリスモゴンを提示する。 関数的な見方に気づかせるために、アリスモゴンの書かれたプリントに、数字を入れるように指示をする。  	<ul style="list-style-type: none"> 4つのアリスモゴンを掲示する時は、1列に並べて、関数的な見方ができるようにする。 ●の操作活動を通して、和の不变性をイメージさせる。 下が8の時のすぐ下に同じように掲示する事で、縦にみた時のひみつにも気づかせたい。
展開2	<p>3. アリスモゴンの法則を見つける めあてを確認する。</p> <p>【めあて】アリスモゴンのひみつをみつけよう</p> <p>発問気づいた事はありますか。 (反応) 外の下の数は、2増えている。 左の数は、減っている。 右の数は、増えている。 横の数も同じように減ったり、増えたりしている。 縦に見ると横の数は同じ。 発問6・12・10のアリスモゴンはどこに置きますか。 中の数はどうなるかな。 (反応) 左のアリスモゴンから1つずつやればできそう。 縦にみると上には、2が入るよ。</p>	<ul style="list-style-type: none"> アリスモゴンの法則を見つけることをめあてとして設定する。 完成したアリスモゴンを黒板に並べ、法則を発見させる。 6・12・10の場合の図をどこに貼るとよいか児童と一緒に確認する。その際、図を左右に移動させ、児童に「ストップ」と言わせる方法をとる。 理由をたずねて、答えられない場合は、6・10に着目できるようにサイレント説明を使って気づかせる。 6・12・10のアリスモゴンの解を考えさせる。 関数的な見方をする事で、最初の挑戦的問題も解けることに気づかせる。 	<ul style="list-style-type: none"> 気づいた児童を評価する為あえてペア学習にせずに発表させる。 これまでの操作活動を筋道立てて考えられているかどうかを確認するため、あえて順序よくではなく途中を示す。 順序立てて8・12・8から考える事をねらいとしているが、縦の数に着目する事で上には2が入る事に気づき問題を解く事もできる。このように考える児童も、とりあげ評価する。
まとめ	4.まとめる	法則を見つけることで難しい問題も解くことができたことを確認する。	

(2) 小学校第6学年における授業デザイン

① 学習指導過程について

まず、図16のアリスモゴンの内側の数を求める問題の解決を最終目標として与える。次に解決の糸口を考えるために、数を小さくした $6 \cdot 10 \cdot 14$ のアリスモゴンの解決を提案する。この問題

を解くために、2年生の場合 同じように外側の数をすべて10にしたアリスモゴンを提示する。これを黒板の左端に提示し、「始まりのアリスモゴン」と呼ぶことにし、内側の数を求めさせる。この場合、直感的に10の半分の5になることを見つけるであろう。この「始まりのアリスモゴン」から外側の下の数を変えないまま、左の数を1ずつ減らし、右の数を1ずつ増やすとき、内側の●の数をどう変化させたらよいかをICT教具(図17)を使って●をタブレット上で自由に操作しながら探究させる。

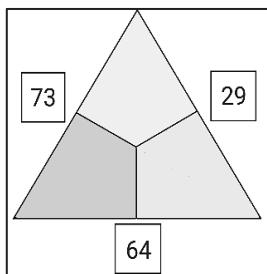


図16 最終目標のアリスモゴン

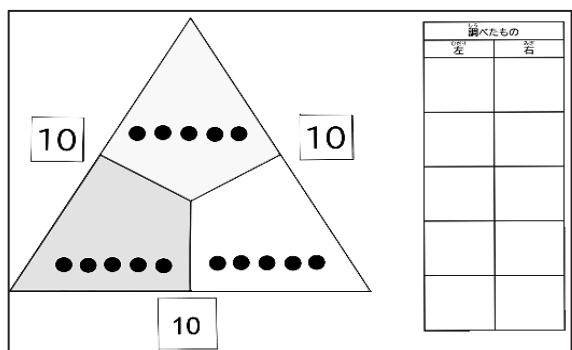


図17 タブレット上のアリスモゴン

さらに、解決した一連のアリスモゴンを図18のように横に並べて観察させ、関数的法則を探求させる。

この探究過程で第6学年の児童に発見させたい法則は、第3節で述べた3つの法則に加え以下の2つも想定した。

d.外側の左の数を1減らし、右の数を1増やしても、外

側の左右の和は変わらない・・・この法則から「始まりのアリスモゴン」の外側の左右の数は、同列のアリスモゴンの「外側の左右の数の和÷2」で求められる

- e.「始まりのアリスモゴン」の内側の下の2つの数は外側の下の数の半分になる

d.の法則に気づきやすくするために、ICT教具(図17)は、外側の左右の数のカードを動かすと下から新たなカードが出現するようにし、調べ終わったカードを右表に入れて整理できるような仕掛けにした。

a.からc.の法則を発見させた後、d.とe.の法則を確認させると共に、法則の一般性を意識させるために、 $9 \cdot 10 \cdot 17$ のアリスモゴンを取り組ませる。最後に、b.とd.の法則をもとに最終目標の $73 \cdot 64 \cdot 29$ のアリスモゴンに対応する「始まりのアリスモゴン」の外側の数 $51 \cdot 64 \cdot 51$ を見つけ、e.の法則から内側の数を求め、a.の法則を使って問題を解決する。

このように最終目標のアリスモゴンを解決するだけでなく、その解法の一般性を意識させるという授業をデザインした。低学年では、関数的法則を見つけて解決することはできても、その解法の一般性を意識させることは難しい。しかし、高学年では解決過程を式で表現し記号化することによって可能であると考えた。

さらに発展として外側の左右の和が奇数になる $7 \cdot 6 \cdot 2$ のアリスモゴンを与え一般的な解法が適用できるかを考えさせ、自然数の範囲では解がない場合を意識して、数の拡張の必要性をできれば気づかせたいと考えた。

また、このような問題解決活動を通して、難しい問題も簡単な数に置き換えて法則を見つければ、解決することができるという問題解決ストラテジーの有用性と面白さを感じさせることもねらいとした。

② 学習指導案

学習指導案は表2の通りである。

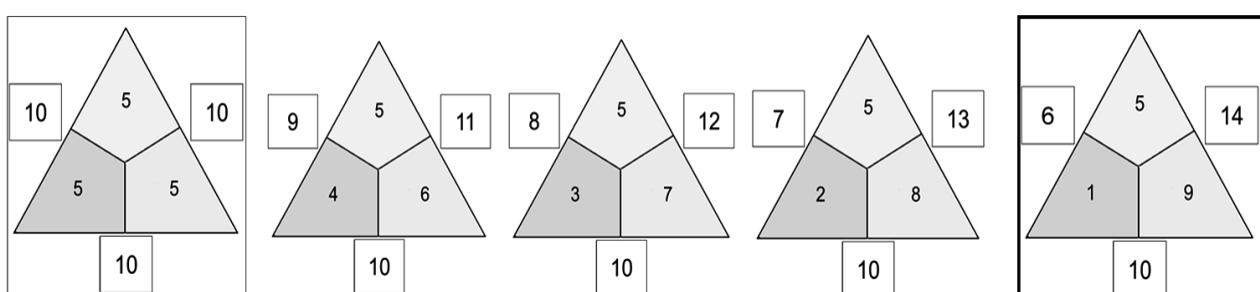
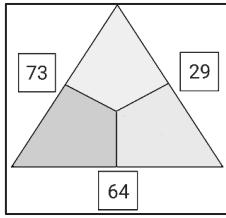


図18 横に並べたアリスモゴン

表2 学習指導案

	学習活動	指導過程・発問	指導上の留意点・◆ICT活用
導入	<p>1. アリスモゴンの計算の仕方を確認する ○アリスモゴンの計算の仕方を確認する。</p>	○内側の数が与えられているアリスモゴンを用いて、計算の仕方を確認させる。	○加減の計算で直ちに求められる問題は事前に練習済みである。
展開1	<p>2. 外側の数だけ書かれたアリスモゴンの問題に取り組む ○アリスモゴンの内側の数を考える。 </p> <p>○アリスモゴンの関数的法則について考える。</p>	<p>○外側の数が $73 \cdot 64 \cdot 29$ のアリスモゴンを提示する。 【発問】 「それぞれの部屋に入る数が分かるかな？」</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content;"> <input type="text"/>アリスモゴンを解こう。 </div> <p>○外側の数が $6 \cdot 10 \cdot 14$, さらに $10 \cdot 10 \cdot 10$ のアリスモゴンを提示する。 ○紙のワークシートとICT教具を配布し、外側の下の数は変えずに左の数を1ずつ減らし、右の数を1ずつ増やすと内側の数はどうなるか●を画面上で操作させながら考えさせる。 ○完成したアリスモゴンを黒板に提示し、法則を見つけさせる。 ○法則に気づきにくい時には、注目させる部分を指示棒で黙って指し示す（「サイレントサジェスチョン」）。</p>	<p>○最終課題を提示することで難しさを実感させ、きまりを見つける有用性につなげる。</p> <p>○数を簡単にしたものを見ることで、簡単なものに置き換えて考えることの有用性につなげる。 ○●の操作によって、右に1つ動かしても和が変わらないことに気づかせる。 ◆数の変化が●の操作によってイメージしやすくなる。 ○横に並べることで、法則に気づきやすくなる。 ○数の変化と和の不变性を関連付けることで、法則を理解させたい。</p>
展開2	<p>3. 解決方法を探究する ○新しいアリスゴンの問題に取り組む。 ○最終課題であったアリスモゴンの問題に取り組む。</p>	<p>○外側の数が $9 \cdot 10 \cdot 17$ のアリスモゴンを提示し、始まりのアリスモゴンの数をどうしたらよいか考えさせる。 ○完成したアリスモゴンを基に、法則を確認する。 ○法則を使って、最終課題であるアリスモゴンの問題を解決させる。</p>	<p>○別の問題に取り組ませることで、法則の一般性を意識させる。</p> <p>○法則を使うことで挑戦的問題も簡単に解けることを感得させたい。</p>
まとめ	<p>4. 学習をまとめる ○本時の学習を振り返る。 ○練習問題に取り組む。</p>	<p>○大きな数の場合、小さな数に置き換え、関数的な見方・考え方を働かせて法則を見つけることで、簡単に求められたことを確認する。 ○左右の和が奇数になる $7 \cdot 6 \cdot 2$ のアリスモゴンに取り組ませる。</p>	<p>○問題解決ストラテジーの有用性と面白さを感得させたい。</p> <p>○左右の和が奇数になる問題に取り組ませることで、小数でも同じように解けることに気づかせる。</p>

5. 授業実践から得られた成果と課題

(1) 本質的学習場の構成について

① アリスモゴンの算数学習指導の目標・内容・方法等への位置づけについて

アリスモゴンを教材化した授業は、「数と計算」領域における“数の加減法”的理解や活用に位置づけることができるが、本研究で構成した本質的学習場はこれだけではない。外側左右の数を1ずつ変化させ、全体の変化を考察させることは、児童が積極的に関数的法則を発見しようとする態度を促すことに大変効果的であった。そして児童自ら発見した法則を適用して最終目標のアリスモゴンを解くことができた。第2学年では「できない」と言っていた最終目標のアリスモゴンに対し、授業の最終段階では「簡単だ！」と児童は評していた。また第6学年では、「アリスモゴンの外側の数の和が内側の数の和の2倍になる」といったデザイン段階で期待していた以上の法則まで発見した。このように本研究でアリスモゴンから構成した本質的学習場は、「変化と関係」領域における“変化や対応の規則性に着目して問題を解決する”という関数的考え方の涵養も実現することができたと言える。

さらに、小学校中学年や中学校・高校数学での目標・内容・方法等の学習の具現化にアリスモゴンの活用が有効かを、授業実践を通して検証する必要がある。

② アリスモゴンによる数学的な見方・考え方を働かせる豊かな数学的活動の実現について

「変化と関係」領域は、第4学年以降に位置付けられているが、今回の実践では、小学校第6学年だけでなく第2学年の段階でも、変化と関係を自ら見出し、関数的法則を使って問題解決する活動を実現できた。

さらに授業後には、第2学年では児童がさらに見つけた法則を教師に伝えようと詰め寄っていく姿も見られ、自主的にアリスモゴンを作る児童も現れた。第6学年では、児童が「左右の数の和が奇数の場合はどうなるのか」という新たな課題を見つけ、教師に自ら質問する姿が見られた。

以上のことから、本研究のアリスモゴンから構成した本質的学習場は、数学的な見方・考え方を働かせ、児童自らが新たな課題を持ち、探究を続ける豊かな数学的活動を実現できたと考えられる。

しかし、上述のような児童・生徒の数学的に価値ある発想をいかに問題解決の道具として取り上げるか、あるいは時間的制約やその内容の教授可能性などから取り上げないかは、授業デザインでさらに検討すべき課題といえる。

③ アリスモゴンの教授学的柔軟性について

ICT教具を開発し、半具体物として●を扱うことで、記号による足し算の暗算が苦手な児童も探究活動に参加することができた。また、●を操作させることは、学年に関係なく、児童が数の変化の関係を理解することを促した。授業デザインとしては、関数的法則を探究し、第2学年では法則を適用して最終課題を解決させ、第6学年では一般的な解法を導き出して最終課題を解決させた。

このように学年の学習段階に合わせた活動を設定することができた。以上のことから、アリスモゴンは柔軟性を持ち、児童の実態に合わせた活動を設定することができる本質的学習場であると考える。今後は、さらに中・高校での教授可能性を検討したい。

④ 豊かな実践研究の場の提供について

授業指導者の教材に対する十分な理解があつてはじめて、自信をもって児童の自由な発想を適切に問題解決の文脈に導くことができる。アリスモゴンを教材とした実践研究は、教師にアリスモゴンの持つ数学的な豊かさを自覚させ、その数学教育的な価値の十分な理解を促すものであった。これは、実践研究に対するアリスモゴンの本質的学習場としての有効性を示すものである。

今回の授業デザインにあたっては、実践する小学校教員だけでなく、大学教員、中学校教員の立場から意見を出し合い実践研究を進めた。アリスモゴンの数操作をどのように行うか、児童にどのような法則に気づかせるか、思考道具として活用するICT教具をどのような形態にするか等について、模擬授業をしながら改良を重ねた。同じアリスモゴンの教材でも様々な活用方法があり、対象や目標に応じて授業構成を工夫する研究の重要性と面白さを実感することができた。以上のことから、アリスモゴンは、豊かな実践研究の場を形成できたと考える。

(2) 思考道具としてのICT活用の有用性について

今回の授業実践では、GeoGebraを使ってタブレット画面上に●を自由に動かせるアリスモゴンの図を作図し、ICTを思考道具として活用した。児童は、タブレット上で教師が配布したリンクを開くだけで、課題状況をタブレットの画面上に用意することができ、机の上の環境を気にすることなく探究活動に集中することができた。

また「●をどう動かせばよいか」を問うことによって、変化の規則性の探究を、具体的な操作を通してさせることができた。数の変化の意味を●の操作として説明させ、数の変化を具体的な操作と関係づけたことは、関数的法則の発見

と理解の共有を促した。

さらに、左から右へ●を1つ動かすという操作を何度も繰り返した後は、ほとんどの児童が「もう●を動かさなくとも数はわかる」と言うようになった。これは、タブレット上での●の操作として表象されている略図的関係が内化されたことを示している。

以上のように、本研究でのICT活用は、学習環境を整えて具体的な操作による探究活動や説明活動を可能にし、略図的関係の内化を促すことに有効であった。しかし、児童がアリスモゴン図のリンクを開くのには実際には時間がかかり、またタブレット操作が不慣れな児童もあり、タブレットの不具合が生じることも少なくなかった。また、タブレット上での児童の操作を大型ディスプレイや電子黒板で集約し情報共有することは、実際にはソフトによる制約や不便な面があることも明らかになった。ICT活用の教具を開発するとともにこれらの機器操作に関する実際上の課題を解決することがICT活用の課題である。

(3) アリスモゴンによる深い学びの実現について

授業を進める中で、児童の課題意識は、「アリスモゴンを解く」という当初の目的から「関数的法則を見つける」へと変容した。これは問題解決の方法が思考の対象になり、効果的な方法を得るために変化の中の不变性や共変性を探求することに活動の水準が向上したことを意味する。問題解決の方法が思考の対象になったという点では「方法の対象化」とも言える。この活動水準の向上や「方法の対象化」の現象は、「深い学び」の実現と捉えられる。

また、第2学年でも、加減計算の単純な応用を超えて関数的考え方を働かせた問題解決ができたことや、第6学年においては、●の変化や法則を数式によって記号化することで、見つけた法則から一般的な解法を導き出す数学化の活動が実現できた。さらに、その一般的な解法の解が自然数の範囲にない場合を問題化する児童まで現れた。以上のことから、アリスモゴンを活用した本質的学習場は、「深い学び」を実現することができたと考える。

6. おわりに

本研究では、アリスモゴンによる本質的学習場の構成の可能性と有効性について、小学校算数および中学校数学の授業をデザインする立場から考察した。そして、ICTを思考道具として活用する算数授業の実践を通して、学年を超えた領域の学習指導の目標・内容・方法を具現化する本質的学習場を構成することができ、深い学びを実現する授業をデザインできることが明らかになった。

実際の授業では、第6学年の普段消極的な児童が盛んに挙手して発表し、第2学年では数人の児童が「みつけたひみつをもっと言いたい」と授業終了後に教師に言い寄ってくる姿がみられ、想定以上に児童の探究心を高揚する授業が実践できたことに、指導教員も感動していた。このような授業実践体験を持つことができたことも、本質的学習場による有用性の1つである教師教育の場として有効であったことを示唆していると言えよう。

今後は、中学校や小学校中学年対象の授業デザインやアリスモゴン以外の教授単元を開発し、本質的学習場の構成の実践研究を進めていきたい。

引用・参考文献

- McIntosh,A.&Quadling,D.(1975): Arithmogons, Mathematics Teaching, 70, 18–23.
- Wittmann,E.Ch. (1995): Mathematics education as a ‘designscience’, Educational Studies in Mathematics, 29, 4, 355–374.
- Wittmann,E.Ch.,et al(2002) : "Jenseits von PISA : Bildungsreform als Unterrichtsreform".國本景亀,山本信也(訳)「算数・数学 授業改善から教育改革へ」,東洋館出版
- Wittmann,E.Ch. (2005): Mathematics as the science of patterns—a guideline for developing mathematics education from early childhood to adulthood. In Plenary Lecture at International Colloquium “Mathematical learning from Early Childhood to Adulthood” (Belgium, Mons).
- Wittmann,E.Ch. & Müller ,G.N.(2004): Das ZahlenBuch, Klett
- 袴田綾斗, 大滝孝治 (2019) 教員養成のための線形代数コースの開発にむけて,日本科学教育学会研究会研究報告 34 卷 3 号 p. 299-302
- 文部科学省(2017) : 小学校学習指導要領(平成 29 年告示)
解説 算数編.日本文教出版
- 文部科学省(2017) : 中学校学習指導要領(平成 29 年告示)
解説 数学編.日本文教出版
- 使用した数学教育用アプリ
GeoGebra | 動的数学ソフトウェア
(<https://www.geogebra.org/>)
- 学校における研究協力の承諾について
研究授業は、教職大学院の実習の一環として行ったもので、実習協力校の許可を得ている。

