

# 博士論文

南部・ヨナラシニオ模型を用いた  
高密度クォーク物質のスピン偏極相の研究

令和3年3月

高知大学大学院総合人間自然科学研究科  
応用自然科学専攻

森本 雅智

## 要旨

本研究では高密度クォーク物質の性質、特にスピン偏極と解釈できる種々のクォーク凝縮相について有効模型を用いた解析を行った。有効模型として、南部-Jona-Lasinio 模型に擬ベクトル型やテンソル型の相互作用を追加した模型を採用し、高密度クォーク物質中に追加した相互作用によって生じる凝縮相について調べた。計算の結果、高密度クォーク物質中に擬ベクトル型、テンソル型相互作用に起因した凝縮相が出現する事や擬ベクトル型相互作用とテンソル型相互作用で凝縮相の振る舞いが異なる事などが確かめられた。擬ベクトル凝縮相と比較して、テンソル凝縮相はより高密度のクォーク物質中に出現する傾向が見られたため、テンソル型相互作用に関しては、電気的中性と  $\beta$  平衡の条件を模型に課して再び相構造を計算し、内部にクォーク物質の核を持つコンパクト星の内部構造の推定を行った。この模型の範囲内において内部にクォーク物質の核を持つ天体が太陽の 2 倍に近い質量を獲得しうる事を示した。

## 目次

1	概要	2
2	オリジナルの NJL 模型	5
2.1	平均場近似	7
2.2	数値解析	8
3	擬ベクトル型相互作用を追加した NJL 模型	10
3.1	ラグランジアン密度と平均場近似	10
3.2	有効ポテンシャル	11
3.3	数値解析	14
3.4	擬ベクトル型相互作用を追加した NJL 模型のまとめ	18
4	テンソル型相互作用を追加した NJL 模型	19
4.1	ラグランジアン密度と平均場近似	19
4.2	有効ポテンシャル	20
4.3	数値解析	21
4.4	テンソル型相互作用を追加した NJL 模型のまとめ	26
5	擬ベクトル型相互作用とテンソル型相互作用の比較	29
6	テンソル型相互作用を含む NJL 模型によるコンパクト星の内部構造の推定	30
6.1	$\beta$ 平衡と電気的中性	30
6.2	有効模型	32
7	数値解析	34
7.1	クォーク質量の振るまい	35
7.2	テンソル凝縮の振るまい	36
7.3	クォーク数密度 $\rho$ と電子の化学ポテンシャル $\mu_e$ の振るまい	37
8	電気的中性を考慮した解析のまとめ	40
9	ハイブリッド星の構成	41
9.1	ハイブリッド星の質量と半径の関係	42
10	全体のまとめ	43
付録		45

A	単位換算	45
A.1	質量の換算 . . . . .	45
A.2	時間の換算 . . . . .	46
A.3	長さの換算 . . . . .	46
A.4	温度の換算 . . . . .	46
B	TOV 方程式について	47
C	シュバルツシルト解導出の概略	48
D	TOV 方程式導出の概略	52
E	2 フレーバーの NJL 模型の書き換え	54
F	物理量の見積もり	56
F.1	ハイブリッド星の密度 . . . . .	56
F.2	単体のクォークが出現するほどの高温 . . . . .	57
F.3	フィクションの話 . . . . .	57
G	テンソル型相互作用を追加した NJL 模型の有効ポテンシャルの積分範囲	58
G.1	$\eta F \geq 0$ の場合 . . . . .	58
G.2	$\eta F < 0$ の場合 . . . . .	59
H	テンソル型相互作用を追加した NJL 模型の有効ポテンシャルの解析計算	60
H.1	$\eta F \geq 0$ の場合 . . . . .	62
H.2	$\eta F < 0$ の場合 . . . . .	64

## 1 概要

「物質を構成する最も基本的な粒子は？」

と問われた際に頭に浮かぶ答えはなんだろうか。ここでいう“基本的”とは“これ以上分解できない”という意味である。非常にぎっくりとした問いではあるが、答えを中学生や高校生になった気分で考えてみていただきたい。そうすると、多くの場合はきっと「原子」だとか「分子」といった言葉が思い浮かぶだろう。これは中学校や高等学校の理科の授業では模範的な回答のはずである。ところが、この論文を読むような方々は、原子は“最も基本的”な粒子ではない事を知っているはずである。少なくとも、原子は原子核とその周囲に存在する電子によって構成されていること、原子核は多数の陽子や中性子によって構成されていることなどは高等学校の理科で習うようなある種の常識のはずである。では、陽子や中性子はこれ以上分解できない基本的な粒子なのだろうか。答えは NO である。実は陽子や中性子もクォークと呼ばれる粒子によって構成されているのである。そのイメージを図 1 に描いた。核子などを構成するクォークは通常、閉じ込めにより陽子や中性子

電荷	世代		
	第一世代	第二世代	第三世代
$+2/3e$	アップ (u)	チャーム (c)	トップ (t)
	2.2 MeV	1280 MeV	173100 MeV
$-1/3e$	ダウン (d)	ストレンジ (s)	ボトム (b)
	4.7 MeV	96 MeV	4180 MeV

表1 第三世代までのクォークの一覧。名称の下には質量を記載している。素電荷は  $-e$  としている。

のようなハドロンとしてしか存在しないが、高温もしくは高密度の環境においては閉じ込めが解け、単体のクォークが出現すると考えられている。

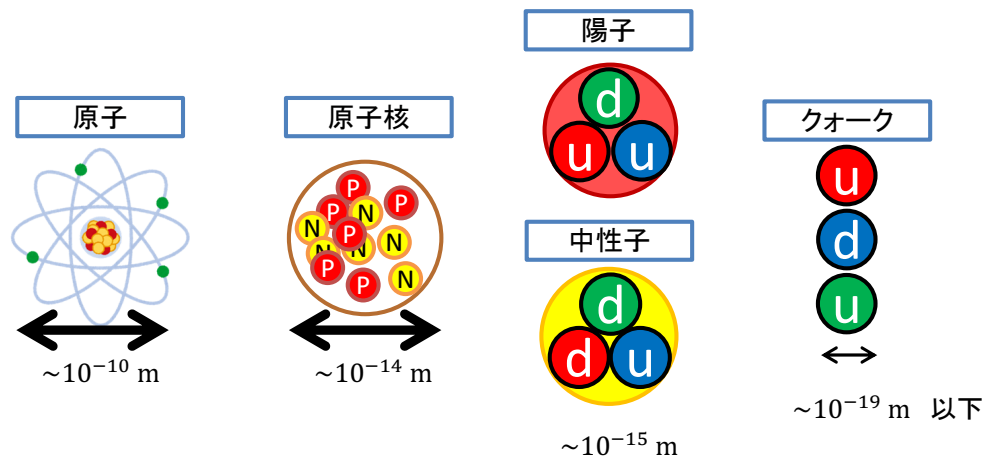


図1 クォークのイメージ図

クォークは素電荷に対して分数の電荷を持ち、電荷と世代によって様々な種類が区別される。その一覧を表1にまとめた。

試しに陽子の電荷を見積もってみる。陽子はアップクォーク二つとダウンクォーク一つが結びついて作られるが、表1によるとアップクォークは  $+2/3e$  の、ダウンクォークは  $-1/3e$  の電荷をそれぞれ持つので、

$$\frac{2}{3}e + \frac{2}{3}e - \frac{1}{3}e = +e, \quad (1.1)$$

となり、我々のよく知る陽子の電荷と一致する。同様に中性子はアップクォーク一つとダウンクォーク二つが結びついて作られるので、

$$\frac{2}{3}e - \frac{1}{3}e - \frac{1}{3}e = 0, \quad (1.2)$$

となり、こちらも我々のよく知る結果となる。

クォークには光の三原色にちなんだ赤青緑の仮想的な“色”が存在すると考えられており、陽子や中性子などのハドロンを構成する際には全体が“白”くなるように組み合わせる<sup>\*1</sup>。

<sup>\*1</sup> 白黒印刷だとよく分からないが、図1では赤青緑の三色を色分けしている

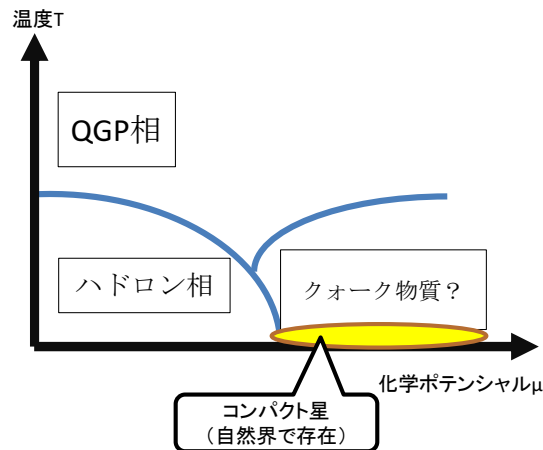


図2 徹底的に単純化した QCD の相図

クォークの反粒子、すなわち反クォークはクォークの“色”に対して“反色”とでも言えるような、元の色を打ち消す色を持っていると解釈し、赤-反赤のようなペアも“白く”なったとみなす。このようなクォーク-反クォークのペアの粒子をメソンと呼ぶ。その代表的な物が  $\pi$  中間子である。

このような“色”があるためクォークの振る舞いを記述する理論は量子色力学 (QCD) と呼ばれる。この QCD の課題として図 2 のような温度-化学ポテンシャル平面の相図の解明が挙げられる<sup>1</sup>。化学ポテンシャルは粒子密度と対応しており、この図の上側 (高温) や右側 (高密度) の領域では単体のクォークが出現すると考えられている。相図の零密度、もしくは高温の環境の解析には格子シミュレーションが有効だが、有限密度の領域では格子シミュレーションによる解析が困難であるため、有効模型による解析が用いられる。本研究は QCD 相図の低温高密度領域の相構造および、そこで実現する高密度クォーク物質の物性を解析することを目的としている。

高密度クォーク物質が出現するほどの高密度の環境は自然界ではコンパクト星と呼ばれる高密度の天体の内部などで実現すると考えられている。コンパクト星にはマグネターと呼ばれ、非常に強い磁場を有しているものもあるが、この磁場の起源は未だよく分かっていない<sup>2,3</sup>。高密度クォーク物質中でスピン偏極が生じればコンパクト星の磁場の起源となり得ると言えよう。上記の理由から、本研究では高密度クォーク物質のスピン偏極に注目し、QCD 相図の零温度高密度領域について有効模型を用いた解析を行う。

低温高密度領域を解析するための有効模型として南部-Jona-Lasinio(NJL) 模型<sup>4-7</sup> がしばしば用いられる。NJL 模型はカイラル対称性の自発的破れを記述する模型であり、オリジナルの NJL 模型はクォーク場の運動項とスカラー型とでも呼べる形の相互作用項から構成されている。この NJL 模型はカイラル対称性を保つような相互作用であれば追加することができる。先行研究において、擬ベクトル型相互作用<sup>8-12</sup> やテンソル型相互作用<sup>13-25</sup> を追加した NJL 模型を用いた解析によって、相図の低温高密度領域にスピン偏極と解釈できる相が生じることが指摘されている。

NJL 模型は 3 フレーバーの場合、すなわちアップクォークとダウンクォークに加えストレンジクォークを含めた場合は、QCD と同じ対称性を持たせるために小林-益川-'t Hooft 相互作用と呼ばれる、行列式型の 6 点相互作用によるフレーバー混合を考慮しなければならない<sup>26,27</sup>。

本研究ではフレーバー SU(3) の NJL 模型に対して擬ベクトル型相互作用、テンソル型相互作用をそれぞれ追加した模型を用い、QCD 相図の零温度高密度領域の相構造について、特に行列式型相互作用によるフレーバー混合がクォークの凝縮相に与える影響に注目して解析を行っている。特にテンソル型相互作用を用いた解析では、電気的中性と  $\beta$  平衡の条件を課した解析を行い、クォークで構成された核を持つコンパクト星の内部構造の推定を行い、モデルの範囲内で太陽の 2 倍程度の質量を有するコンパクト星が構成されうる事を示した。

## 2 オリジナルの NJL 模型

本論文で興味を持っているのは擬ベクトル型やテンソル型の相互作用を追加した NJL 模型の振る舞いであるが、そのような相互作用が模型に対して与える影響を調べるために、相互作用を追加していないオリジナルの 3 フレーバー NJL 模型について考えておく。この章ではこのオリジナルの NJL 模型を用いてカイラル凝縮とそれに起因するクォークの質量の振る舞いに注目して解析を行う。本研究のメインターゲットは擬ベクトル型やテンソル型の相互作用を追加した模型であるため、ここでは模型の詳細な扱いについては議論せず、計算の手続きに触れるのみとする。

3 フレーバー NJL 模型は以下のようなラグランジアン密度で書き表すことができる。

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - \vec{m}_0)\psi + \frac{G_S}{2} \sum_{a=0}^8 [(\bar{\psi}\lambda_a\psi)^2 + (\bar{\psi}i\lambda_a\gamma_5\psi)^2] \\ & + \mu\psi^\dagger\psi \\ & + G_D [\det\bar{\psi}(1 - \gamma_5)\psi + \det\bar{\psi}(1 + \gamma_5)\psi] \quad (2.1)\end{aligned}$$

$$= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_\rho + \mathcal{L}_D . \quad (2.2)$$

表記の簡略化や項の意味をはっきりさせるために、最後の行で以下のような略記を行った。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 &= \bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\psi \\ \mathcal{L}_m &= -\bar{\psi}\vec{m}_0\psi \\ \mathcal{L}_S &= \frac{G_S}{2} \sum_{a=0}^8 [(\bar{\psi}\lambda_a\psi)^2 + (\bar{\psi}i\lambda_a\gamma_5\psi)^2] \\ \mathcal{L}_\rho &= \mu\psi^\dagger\psi \\ \mathcal{L}_D &= G_D [\det\bar{\psi}(1 - \gamma_5)\psi + \det\bar{\psi}(1 + \gamma_5)\psi] , \quad (2.3)\end{aligned}$$

これらの項は上から、クォークの運動項、クォークのカレント質量項、スカラー型相互作用項、密度項、行列式型相互作用項に対応する。カレント質量項に含まれる  $\vec{m}_0$  はフレーバー空間でのカレントクォーク質量の行列を表す。具体的には、

$$\begin{aligned}\vec{m}_0 &= \text{diag}(m_u, m_d, m_s) \\ &= \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{pmatrix} , \quad (2.4)\end{aligned}$$

であり、添え字の  $u, d, s$  はそれぞれのクォークのフレーバーを表す。

スカラー型相互作用項に含まれる  $\lambda_a$  は  $a = 0$  のときは単位行列 (すなわち  $\lambda_0 = \mathbf{1}$ ) を、 $a \neq 0$  のときはゲルマン行列をそれぞれ表す。本論文では対角成分に注目し、 $a = 0, 3, 8$  の行列について和を取る。あからさまに書けば、

$$\begin{aligned}
\sum_{a=0}^8 [(\bar{\psi} \lambda_a \Gamma \psi)^2] &= \frac{2}{3} [(\bar{u}\Gamma u + \bar{d}\Gamma d + \bar{s}\Gamma s)]^2 + [(\bar{u}\Gamma u - \bar{d}\Gamma d)]^2 + \frac{1}{3} [(\bar{u}\Gamma u + \bar{d}\Gamma d - 2\bar{s}\Gamma s)]^2 \\
&= \frac{2}{3} [(\bar{u}\Gamma u)^2 + (\bar{d}\Gamma d)^2 + (\bar{s}\Gamma s)^2 + 2(\bar{u}\Gamma u)(\bar{d}\Gamma d) + 2(\bar{d}\Gamma d)(\bar{s}\Gamma s) + 2(\bar{s}\Gamma s)(\bar{u}\Gamma u)] \\
&\quad + [(\bar{u}\Gamma u)^2 - 2(\bar{u}\Gamma u)(\bar{d}\Gamma d) + (\bar{d}\Gamma d)^2] \\
&\quad + \frac{1}{3} [(\bar{u}\Gamma u)^2 + (\bar{d}\Gamma d)^2 + 4(\bar{s}\Gamma s)^2 + 2(\bar{u}\Gamma u)(\bar{d}\Gamma d) - 4(\bar{d}\Gamma d)(\bar{s}\Gamma s) - 4(\bar{s}\Gamma s)(\bar{u}\Gamma u)] \\
&= 2(\bar{u}\Gamma u)^2 + 2(\bar{d}\Gamma d)^2 + 2(\bar{s}\Gamma s)^2, \tag{2.5}
\end{aligned}$$

のように取る。 $\Gamma$  は任意の  $\gamma$  行列の積か単位行列を表している。本論文では以降の章でも同様の計算を行うが、いずれの場合においてもスカラー型相互作用については起こりうる凝縮として  $(\bar{q}q)$  を選択し、他の項は落とすことにする。

行列式型相互作用項は

$$\begin{aligned}
\det \bar{\psi} (1 - \gamma_5) \psi + \det \bar{\psi} (1 + \gamma_5) \psi &= \det \begin{pmatrix} \bar{u}(1 - \gamma_5)u & \bar{u}(1 - \gamma_5)d & \bar{u}(1 - \gamma_5)s \\ \bar{d}(1 - \gamma_5)u & \bar{d}(1 - \gamma_5)d & \bar{d}(1 - \gamma_5)s \\ \bar{s}(1 - \gamma_5)u & \bar{s}(1 - \gamma_5)d & \bar{s}(1 - \gamma_5)s \end{pmatrix} \\
&\quad + \det \begin{pmatrix} \bar{u}(1 + \gamma_5)u & \bar{u}(1 + \gamma_5)d & \bar{u}(1 + \gamma_5)s \\ \bar{d}(1 + \gamma_5)u & \bar{d}(1 + \gamma_5)d & \bar{d}(1 + \gamma_5)s \\ \bar{s}(1 + \gamma_5)u & \bar{s}(1 + \gamma_5)d & \bar{s}(1 + \gamma_5)s \end{pmatrix} \tag{2.6}
\end{aligned}$$

となるが、(2.5) と同様に交換項を無視、すなわち

$$\bar{q}_i \Gamma q_j = 0 \quad (i \neq j), \tag{2.7}$$

とすると以下のような表式が得られる。

$$\begin{aligned}
&\det \bar{\psi} (1 - \gamma_5) \psi + \det \bar{\psi} (1 + \gamma_5) \psi \\
&= \det \begin{pmatrix} \bar{u}(1 - \gamma_5)u & 0 & 0 \\ 0 & \bar{d}(1 - \gamma_5)d & 0 \\ 0 & 0 & \bar{s}(1 - \gamma_5)s \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \bar{u}(1 + \gamma_5)u & 0 & 0 \\ 0 & \bar{d}(1 + \gamma_5)d & 0 \\ 0 & 0 & \bar{s}(1 + \gamma_5)s \end{pmatrix} \tag{2.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2(\bar{u}u)(\bar{d}d)(\bar{s}s) + 2(\bar{u}u)(\bar{d}\gamma_5 d)(\bar{s}\gamma_5 s) + 2(\bar{u}\gamma_5 u)(\bar{d}d)(\bar{s}\gamma_5 s) + 2(\bar{u}\gamma_5 u)(\bar{d}\gamma_5 d)(\bar{s}s) \\
&\rightarrow 2(\bar{u}u)(\bar{d}d)(\bar{s}s). \tag{2.9}
\end{aligned}$$

最後の行では、スカラー型相互作用項と同様に  $(\bar{q}q)$  に注目し他の項は落とした。

このような処方を行うと考えるラグランジアンは以下のように書き換えられる。

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - \bar{m}_0 + \mu\gamma^0)\psi + G_s [(\bar{u}u)^2 + (\bar{d}d)^2 + (\bar{s}s)^2] + 2G_D(\bar{u}u)(\bar{d}d)(\bar{s}s). \tag{2.10}$$

このラグランジアン密度に対して平均場近似を施していく。



## 2.1 平均場近似

相互作用項に含まれる  $\bar{q}\Gamma q$  を、その期待値  $\langle \bar{q}\Gamma q \rangle$  と期待値からのずれ  $\delta(\bar{q}\Gamma q)$  を用いて、

$$\bar{q}\Gamma q = \langle \bar{q}\Gamma q \rangle + \delta(\bar{q}\Gamma q) , \quad (2.11)$$

と書き、期待値からのずれを小さいと考えれば、 $(\bar{q}\Gamma q)^2$  は、

$$\begin{aligned} (\bar{q}\Gamma q)^2 &= (\langle \bar{q}\Gamma q \rangle + \delta(\bar{q}\Gamma q))^2 \\ &= \langle \bar{q}\Gamma q \rangle^2 + 2 \langle \bar{q}\Gamma q \rangle \delta(\bar{q}\Gamma q) + (\delta(\bar{q}\Gamma q))^2 \\ &\simeq 2 \bar{q}\Gamma q \langle \bar{q}\Gamma q \rangle - \langle \bar{q}\Gamma q \rangle^2 , \end{aligned} \quad (2.12)$$

と書き換えられる。三行目では  $(\delta(\bar{q}\Gamma q))^2$  の項を落とし、 $\delta(\bar{q}\Gamma q) = -\langle \bar{q}\Gamma q \rangle + \bar{q}\Gamma q$  の関係を代入している。

(2.10) 式のラグランジアンに対して平均場近似を施すと、スカラー型、行列式型のそれぞれの相互作用項は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SMF} &= G_S \sum_f \left[ 2 \langle \bar{q}_f q_f \rangle (\bar{q}_f q_f) - \langle \bar{q}_f q_f \rangle^2 \right] , \\ \mathcal{L}_{DMF} &= G_D \left[ 2 \langle \bar{d}d \rangle \langle \bar{s}s \rangle \bar{u}u + 2 \langle \bar{s}s \rangle \langle \bar{u}u \rangle \bar{d}d + 2 \langle \bar{u}u \rangle \langle \bar{d}d \rangle \bar{s}s - 4 \langle \bar{u}u \rangle \langle \bar{d}d \rangle \langle \bar{s}s \rangle \right] \\ &= G_D \left[ 2 \sum_{i,j,k;cyclic}^{u,d,s} \langle \bar{q}_i q_i \rangle \langle \bar{q}_j q_j \rangle (\bar{q}_k q_k) - 4 \langle \bar{u}u \rangle \langle \bar{d}d \rangle \langle \bar{s}s \rangle \right] , \end{aligned} \quad (2.13)$$

と得られるため、平均場近似されたラグランジアンは、

$$\mathcal{L}_{MF} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - \vec{M} + \mu\gamma^0)\psi - \sum_f \frac{\mathcal{M}_f^2}{4G_s} + \frac{1}{2} \frac{G_D}{G_s^3} \mathcal{M}_u \mathcal{M}_d \mathcal{M}_s , \quad (2.14)$$

と得られる。式中に添え字として出てくる  $f$  は各フレーバー、すなわち  $f = u, d$  or  $s$  を示す。また、表記の簡略化のために以下のような表記を導入した。

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \text{diag.} \left( m_u + \mathcal{M}_u - \frac{G_D}{2G_s^2} \mathcal{M}_d \mathcal{M}_s , m_d + \mathcal{M}_d - \frac{G_D}{2G_s^2} \mathcal{M}_s \mathcal{M}_u , m_s + \mathcal{M}_s - \frac{G_D}{2G_s^2} \mathcal{M}_u \mathcal{M}_d \right) \\ &= \text{diag.} (M_u, M_d, M_s) \\ \mathcal{M}_f &= -2G_s \langle \bar{q}_f q_f \rangle \end{aligned} \quad (2.15)$$

$\vec{M}$  はクォークの構成子質量の行列を表す。構成子クォーク質量はカレント質量  $m_f$  にそのフレーバーのカイラル凝縮  $\mathcal{M}_f$  が加えられているだけでなく、行列式型相互作用項によるフレーバー混合の効果で他のフレーバーのカイラル凝縮も含む形になっている。これは、 $u$  クォークの振る舞いに  $d$  クォークや  $s$  クォークの振る舞いが、 $d$  クォークには  $s$  や  $u$  の振る舞いが、 $s$  クォークには  $u$  や  $d$  の振る舞いが、といったようにそれぞれのフレーバーが相互に影響しあうことを意味している。

このラグランジアン密度からハミルトニアン密度を計算すると以下のような表式が得られる。

$$\mathcal{H}_{MF} = \bar{\psi} \left( -i\gamma \cdot \nabla + \vec{M} - \mu\gamma^0 \right) \psi + \sum_f \frac{\mathcal{M}_f^2}{4G_s} - \frac{1}{2} \frac{G_D}{G_s^3} \mathcal{M}_u \mathcal{M}_d \mathcal{M}_s , \quad (2.16)$$

有効ポテンシャル  $\Phi$  はこのハミルトニアン  $\mathcal{H}_{MF}$  の真空期待値、すなわち  $\Phi = \langle \mathcal{H}_{MF} \rangle$  で得られる。計算の詳細は後の 3 章や 4 章で言及するため、ここでは天下りの計算結果を与えておく。

$$\begin{aligned} \Phi_O = & \frac{3}{8\pi^2} \sum_f \left[ \frac{1}{3} \sqrt{\mu^2 - M^2} (-2\mu^3 + 5\mu M^2) - M^4 \ln \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - M^2}}{M} \right] \theta(\mu - M) \\ & - \frac{3}{8\pi^2} \sum_{f,\alpha} \left[ \Lambda \sqrt{\Lambda^2 + M^2} (2\Lambda^2 + M^2) - M^4 \ln \frac{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + M^2}}{M} \right] \\ & + \sum_f \frac{\mathcal{M}_f^2}{4G_S} + \frac{1}{2} \frac{G_D}{G_S^3} \mathcal{M}_u \mathcal{M}_d \mathcal{M}_s . \end{aligned} \quad (2.17)$$

有効ポテンシャルに、 $\Phi_O$  と添え字の  $O$  をつけたのは後の擬ベクトル型やテンソル型の相互作用を追加した場合の有効ポテンシャルとの区別を明確にするためである。

## 2.2 数値解析

ここでは、“普通の” NJL 模型を用いた数値計算の結果を与える。本論文では、後々擬ベクトル型やテンソル型の相互作用を追加して数値解析を行うため、その比較対象とすべくこの章を設けている。有効ポテンシャルは (2.17) 式で与えた通りである。カイラル凝縮やクォークの質量を決定するためには、この有効ポテンシャルに対して以下のようなギャップ方程式を解けばよい。

$$\frac{\partial \Phi_O}{\partial \mathcal{M}_u} = \frac{\partial \Phi_O}{\partial \mathcal{M}_d} = \frac{\partial \Phi_O}{\partial \mathcal{M}_s} = 0 . \quad (2.18)$$

単純化のため、これ以降の計算はアイソスピン対称性を仮定し、アップクォークとダウルクォークの質量は等しいとして扱う。あからさまに書けば  $m_u = m_d$  かつ、 $\langle \bar{u}u \rangle = \langle \bar{d}d \rangle$  である。これに習って、アップクォークとダウルクォークの質量を  $M_{u,d} \equiv M_q$  と書くことにする。モデルのパラメータとして、表 2 のセットを採用すると、軽いクォークの質量  $M_q$  とストレンジクォークの質量  $M_s$  はそれぞれ  $M_q = 0.335$  GeV,  $M_s = 0.527$  GeV と得られる。仮に行列式型相互作用の効果が無かった場合、すなわち  $G_D = 0$  の場合はクォーク質量を再現するために、表 3 のように結合定数を  $G_S = 4.370/\Lambda^2$  と取りなす必要がある。

図 3 に行列式型相互作用を考慮した場合の、図 4 に行列式型相互作用を考慮しない場合のクォーク質量と化学ポテンシャルの関係をそれぞれ示した。

行列式型相互作用を考慮した場合のクォーク質量の振る舞いは図 3 によると、 $\mu < \mu_{\text{cr1}} = 0.34$  GeV の領域でカイラル対称性の自発的破れにより、それぞれのクォークは大質量を獲得する。 $\mu > \mu_{\text{cr1}}$  の領域ではカイ

表 2 行列式型相互作用を考慮した 3 フレーバー NJL 模型のパラメータ

$\Lambda$	$G_S$	$G_D$	$m_{u,d}$	$m_s$
0.6314 GeV	$3.666/\Lambda^2$	$-9.288/\Lambda^5$	0.0055 GeV	0.1357 GeV

表 3 行列式型相互作用を考慮しない 3 フレーバー NJL 模型のパラメータ

$\Lambda$	$G_S$	$G_D$	$m_{u,d}$	$m_s$
0.6314 GeV	$4.370/\Lambda^2$	0	0.0055 GeV	0.1357 GeV

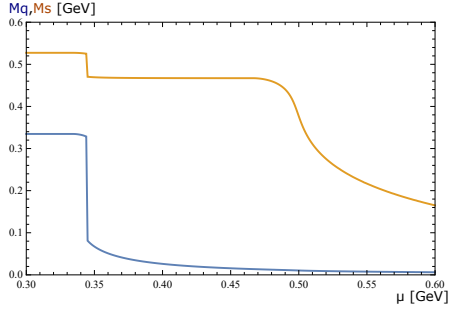


図3  $G_D \neq 0$  のときのクォーク質量  $M_q$  (下側) と  $M_s$  (上側) を化学ポテンシャル  $\mu$  の関数としてプロットした図。

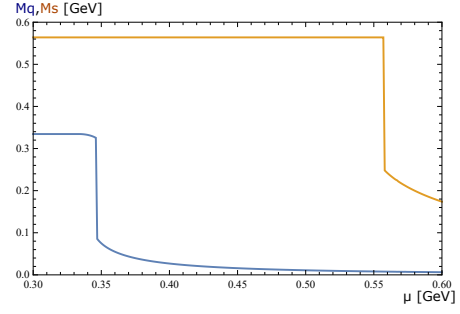


図4  $G_D = 0$  のときのクォーク質量  $M_q$  (下側) と  $M_s$  (上側) を化学ポテンシャル  $\mu$  の関数としてプロットした図。

ラル対称性が回復し、軽いクォークの質量  $M_q$  は大きく減少し、カレント質量に起因する小さな値しか持たなくなる。一方で、ストレンジクォークの質量は  $\mu = \mu_{\text{cr1}}$  の点で少しか減少している。これは行列式型相互作用のフレーバー混合の効果によって、軽いクォークの質量の減少の影響をストレンジクォークが受けていることを意味している。その後、 $\mu > \mu_{\text{cr2}} \approx 0.527\text{GeV}$  の領域で  $M_s$  は単調に減少する。一方で、行列式型相互作用を考慮しない場合、図4に見えるように、軽いクォークの質量  $M_q$  とストレンジクォークの質量  $M_s$  は互いに独立な振る舞いを見せる。

これらの結果から、ストレンジクォークの質量  $M_s$  が行列式型相互作用によるフレーバー混合の効果を顕著に受けていると分かる。後の章ではこの行列式型の相互作用が他の擬ベクトル型やテンソル型の凝縮にどのような影響を与えるかに注目して解析を行う。

### 3 擬ベクトル型相互作用を追加した NJL 模型

この章では擬ベクトル型相互作用を追加した NJL 模型に関する解析計算を行う。計算の方針は 2 と同様であるため、一部省略しながら記述する。

#### 3.1 ラグランジアン密度と平均場近似

擬ベクトル型相互作用を追加した 3 フレーバー NJL 模型は以下のようなラグランジアン密度として書かれる。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - \vec{m}_0 + \mu\gamma^0)\psi + \frac{G_s}{2} \sum_{a=0}^8 [(\bar{\psi}\lambda_a\psi)^2 + (\bar{\psi}i\lambda_a\gamma_5\psi)^2] \\
& - \frac{G_P}{2} \sum_{a=0}^8 [(\bar{\psi}\gamma^\mu\lambda_a\psi)^2 + (\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\lambda_a\psi)^2] \\
& + \mu\psi^\dagger\psi \\
& + G_D [\det\bar{\psi}(1 - \gamma_5)\psi + \det\bar{\psi}(1 + \gamma_5)\psi] \\
= & \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_P + \mathcal{L}_\rho + \mathcal{L}_D .
\end{aligned} \tag{3.1}$$

当然ではあるが、このラグランジアン密度は擬ベクトル型相互作用項  $\mathcal{L}_P$  の有無を除けば (2.1) 式と同じ形をしている。 $\mathcal{L}_P$  を具体的に書くと

$$\mathcal{L}_P = -\frac{G_P}{2} \sum_{a=0}^8 [(\bar{\psi}\gamma^\mu\lambda_a\psi)^2 + (\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\lambda_a\psi)^2] , \tag{3.3}$$

となる。スカラー型相互作用項  $\mathcal{L}_S$  と同様に、擬ベクトル型の相互作用項  $\mathcal{L}_P$  にもゲルマン行列  $\lambda_a$  が含まれている。このゲルマン行列には対角成分 0, 3, 8 に注目して、スカラー型相互作用の時と同様に、(2.5) 式の処方を用いる。ただし、擬ベクトル型相互作用については凝縮の方向として  $(\bar{q}\gamma_5\gamma^3q) \equiv -(q^\dagger\Sigma_3q)$  を選択して他の項は落とすことにする。ここで定義した  $\Sigma_3$  は具体的には以下のような形で書ける行列である。

$$\begin{aligned}
\Sigma_3 & \equiv -\gamma^0\gamma_5\gamma^3 \\
& = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} .
\end{aligned} \tag{3.4}$$

$\sigma_3$  はパウリ行列の第三成分であり、 $\Sigma_3$  はパウリ行列が対角的に並んでいる事からスピン偏極を記述する行列であると解釈できる。他の項については 2 章と同様の処方を施すと、考えるラグランジアンは以下のように書き換えられる。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - \vec{m}_0)\psi + G_s [(\bar{u}u)^2 + (\bar{d}d)^2 + (\bar{s}s)^2] \\
& + G_P [(u^\dagger\Sigma_3u)^2 + (d^\dagger\Sigma_3d)^2 + (s^\dagger\Sigma_3s)^2] \\
& + 2G_D(\bar{u}u)(\bar{d}d)(\bar{s}s) .
\end{aligned} \tag{3.5}$$

(3.5) 式のラグランジアンに対して平均場近似を施すと、スカラー型、擬ベクトル型、行列式型のそれぞれの相互作用項は

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{S_{MF}} &= G_S \sum_f \left[ 2 \langle \bar{q}_f q_f \rangle (\bar{q}_f q_f) - \langle \bar{q}_f q_f \rangle^2 \right], \\
\mathcal{L}_{P_{MF}} &= G_P \sum_f \left[ 2 \langle q_f^\dagger \Sigma_3 q_f \rangle (q_f^\dagger \Sigma_3 q_f) - \langle q_f^\dagger \Sigma_3 q_f \rangle^2 \right], \\
\mathcal{L}_{D_{MF}} &= G_D \left[ 2 \langle \bar{d} d \rangle \langle \bar{s} s \rangle \bar{u} u + 2 \langle \bar{s} s \rangle \langle \bar{u} u \rangle \bar{d} d + 2 \langle \bar{u} u \rangle \langle \bar{d} d \rangle \bar{s} s - 4 \langle \bar{u} u \rangle \langle \bar{d} d \rangle \langle \bar{s} s \rangle \right] \\
&= G_D \left[ 2 \sum_{i,j,k; \text{cyclic}}^{u,d,s} \langle \bar{q}_i q_i \rangle \langle \bar{q}_j q_j \rangle \langle \bar{q}_k q_k \rangle - 4 \langle \bar{u} u \rangle \langle \bar{d} d \rangle \langle \bar{s} s \rangle \right], \tag{3.6}
\end{aligned}$$

と得られるため、平均場近似されたラグランジアンは、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{MF} &= \bar{\psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - \vec{M} - \vec{U} \gamma^0 \Sigma_3 + \mu \gamma^0) \psi \\
&\quad - \sum_f \left( \frac{\mathcal{M}_f^2}{4G_s} + \frac{U_f^2}{4G_P} \right) + \frac{1}{2} \frac{G_D}{G_s^3} \mathcal{M}_u \mathcal{M}_d \mathcal{M}_s, \tag{3.7}
\end{aligned}$$

と得られる。

表記の簡略化のために (2.15) 式の表記と以下のような表記を導入した。

$$\begin{aligned}
\Sigma_3 &= -\gamma^0 \gamma_5 \gamma^3 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \\
\vec{U} &= \text{diag.} (U_u, U_d, U_s) \\
U_f &= -2G_P \langle q_f^\dagger \Sigma_3 q_f \rangle. \tag{3.8}
\end{aligned}$$

$\vec{U}$  はフレーバー空間での擬ベクトル凝縮の行列を意味している。

このラグランジアン密度からハミルトニアン密度を計算すると以下のような表式が得られる。

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{MF} &= \bar{\psi} \left( -i \gamma \cdot \nabla + \vec{M} - \mu \gamma^0 + \vec{U} \gamma^0 \Sigma_3 \right) \psi \\
&\quad + \sum_f \left( \frac{\mathcal{M}_f^2}{4G_s} + \frac{U_f^2}{4G_P} \right) - \frac{1}{2} \frac{G_D}{G_s^3} \mathcal{M}_u \mathcal{M}_d \mathcal{M}_s, \tag{3.9}
\end{aligned}$$

### 3.2 有効ポテンシャル

ここでは有効ポテンシャルを計算する。式 (3.9) のハミルトニアン密度を以下のように書き換える。

$$\mathcal{H}_{MF} = \psi^\dagger (\hat{h} - \mu) \psi + \sum_f \left( \frac{\mathcal{M}_f^2}{4G_s} + \frac{U_f^2}{4G_P} \right) - \frac{1}{2} \frac{G_D}{G_s^3} \mathcal{M}_u \mathcal{M}_d \mathcal{M}_s, \tag{3.10}$$

ここで、一粒子ハミルトニアン  $\hat{h}$  を次のように導入した。

$$\begin{aligned}
\hat{h} &\equiv \gamma^0 \left( -i\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \vec{M} + \vec{U}\Sigma_3 \right) \\
&= \begin{pmatrix} \vec{M} + \vec{U} & 0 & \hat{p}_z & \hat{p}_x - i\hat{p}_y \\ 0 & \vec{M} - \vec{U} & \hat{p}_x + i\hat{p}_y & -\hat{p}_z \\ \hat{p}_z & \hat{p}_x - i\hat{p}_y & -\vec{M} - \vec{U} & 0 \\ \hat{p}_x + i\hat{p}_y & -\hat{p}_z & 0 & -\vec{M} + \vec{U} \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{3.11}$$

この一粒子ハミルトニアン  $\hat{h}$  を対角化して固有値を計算する事ができ、その固有値  $E_f$  は

$$E_f = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + \left( \sqrt{p_z^2 + M_f^2} + \eta U_f \right)^2}, \quad (f = u, d, s), \tag{3.12}$$

と求められる。ここで、 $\eta = \pm 1$  で、スピンの自由度に対応する。

有効ポテンシャルはこの求められたエネルギー固有値を用いて、

$$\begin{aligned}
\Phi &= \sum_{f,\alpha,\eta} \int \frac{dp_z}{2\pi} \int \frac{dp_x}{2\pi} \int \frac{dp_y}{2\pi} (E_f - \mu) \theta(\mu - E_f) \\
&\quad - \sum_{f,\alpha,\eta} \int \frac{dp_z}{2\pi} \int \frac{dp_x}{2\pi} \int \frac{dp_y}{2\pi} E_f \\
&\quad + \sum_f \left( \frac{\mathcal{M}_f^2}{4G_s} + \frac{U_f^2}{4G_P} \right) - \frac{1}{2} \frac{G_D}{G_s^3} \mathcal{M}_u \mathcal{M}_d \mathcal{M}_s,
\end{aligned} \tag{3.13}$$

と書ける。和の記号に現れた  $\alpha$  はカラー自由度を、式中の  $\theta(x)$  はステップ関数をそれぞれ表している。

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \geq 0 \\ 0 & \text{for } x < 0 \end{cases}. \tag{3.14}$$

式 (3.13) の一行目はクォークの正エネルギーの寄与、二行目は真空の寄与を表す。計算を簡単にするために  $p_x^2 + p_y^2 \equiv p_\perp^2$  と変数変換をしておく。そうするとエネルギー固有値は

$$\begin{aligned}
E_f(p_x, p_y, p_z, \eta) &= \sqrt{p_\perp^2 + \left( \sqrt{p_z^2 + M_f^2} + \eta U_f \right)^2} \\
&\equiv E_f(p_\perp, p_z, \eta),
\end{aligned} \tag{3.15}$$

と書き換えられる。積分範囲はこの変数変換が  $p_x = p_\perp \cos \theta$ ,  $p_y = p_\perp \sin \theta$  と置いて得られる事に気がつけば、これは 3 次元の円柱座標（もしくは 2 次元の極座標）の変換として扱う事ができるため、

$$\begin{aligned}
&\int \frac{dp_z}{2\pi} \int \frac{dp_x}{2\pi} \int \frac{dp_y}{2\pi} F(p_x^2 + p_y^2, p_z^2) \\
&= \int \frac{dp_z}{2\pi} \int \frac{dp_\perp}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} p_\perp F(p_\perp^2, p_z^2) \\
&= \int \frac{dp_z}{2\pi} \int \frac{dp_\perp}{2\pi} p_\perp F(p_\perp^2, p_z^2),
\end{aligned} \tag{3.16}$$

と表記できる。こうして、有効ポテンシャルは以下のように書き換えられる。

$$\begin{aligned}
\Phi = & \sum_{f,\alpha,\eta} \int \frac{dp_z}{2\pi} \int \frac{dp_\perp}{2\pi} p_\perp (E_f(p_\perp, p_z, \eta) - \mu) \theta(\mu - E_f(p_\perp, p_z, \eta)) \\
& - \sum_{f,\alpha,\eta} \int \frac{dp_z}{2\pi} \int \frac{dp_\perp}{2\pi} p_\perp E_f(p_\perp, p_z, \eta) \\
& + \sum_f \left( \frac{\mathcal{M}_f^2}{4G_s} + \frac{U_f^2}{4G_P} \right) - \frac{1}{2} \frac{G_D}{G_s^3} \mathcal{M}_u \mathcal{M}_d \mathcal{M}_s.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

解析的に計算するに当たり、ステップ関数  $(\mu > E_f(p_\perp, p_z, \eta))$  によって正エネルギー項の積分範囲が影響を受けることに注意が必要である。

第一に

$$0 \leq p_\perp \leq \sqrt{\mu^2 - \left( \sqrt{p_z^2 + M^2} + \eta U \right)^2}, \tag{3.18}$$

の関係が満たされる必要がある。そこからさらに  $\eta$  の正負によって積分範囲の条件が分岐する。 $\eta = +1$  の時の  $p_z$  の積分範囲は  $p_\perp$  が実数である必要性から、

$$|p_z| \leq \sqrt{(\mu - U)^2 - M^2}, \tag{3.19}$$

との制約が課される。この場合は比較的シンプルで計算しやすいが、 $\eta = -1$  の場合は積分範囲が複雑になり、

$$\begin{cases} \text{for } U \leq M \cdots |p_z| \leq \sqrt{(\mu + U)^2 - M^2} \\ \text{for } M \leq U \cdots \begin{cases} \text{for } \mu \leq U \cdots \sqrt{(U - \mu)^2 - M^2} \leq |p_z| \leq \sqrt{(U + \mu)^2 - M^2} \\ \text{for } U \leq \mu \cdots |p_z| \leq \sqrt{(U + \mu)^2 - M^2}. \end{cases} \end{cases} \tag{3.20}$$

となる。

真空の寄与に関しては NJL 模型が繰り込み不可な模型であることから、以下のように 3 次元運動量カットオフ  $\Lambda$  を導入する。

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \leq \Lambda^2. \tag{3.21}$$

これらの計算をまとめると有効ポテンシャル (3.13) は以下のように計算できる。

$$\Phi = \Phi_\mu + \Phi_{vac}, \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_\mu = & \frac{3}{2\pi^2} \sum_f \left[ \frac{p_z}{24} (12U\mu - 12U^2 - 5M - 2p_z^2) \sqrt{M^2 + p_z^2} + 4p_z^3 (\mu - 2U) \right. \\
& - p_z (24M^2U + 12M^2\mu - 8U^3 + 12U^2\mu - 4\mu^3) \\
& \left. - \frac{1}{8} M^2 (M^2 + 4U^2 - 4U\mu) \ln \left( p_z + \sqrt{M^2 + p_z^2} \right) \right] \Bigg|_0^{P_{Max}} \\
& + \frac{3}{2\pi^2} \sum_f \left[ -\frac{p_z}{24} (12U\mu + 12U^2 + 5M + 2p_z^2) \sqrt{M^2 + p_z^2} + 4p_z^3 (\mu + 2U) \right. \\
& - p_z (-24M^2U + 12M^2\mu + 8U^3 + 12U^2\mu - 4\mu^3) \\
& \left. - \frac{1}{8} M^2 (M^2 + 4U^2 + 4U\mu) \ln \left( p_z + \sqrt{M^2 + p_z^2} \right) \right] \Bigg|_{p_{min}}^{P_{Max}},
\end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{vac} = & \frac{1}{8\pi^2} \sum_f \left[ \Lambda \sqrt{\Lambda^2 + M^2} (5M^2 + 2\Lambda^2 + 12U^2) + 3M^2(M^2 + 4U^2) \ln \frac{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + M^2}}{M} \right] \\
& - \frac{1}{2\pi^2} \sum_f \int_0^\Lambda dp_z \left[ \left( \Lambda^2 - p_z^2 + \left( \sqrt{p_z^2 + M^2} - U \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right. \\
& \quad \left. + \left( \Lambda^2 - p_z^2 + \left( \sqrt{p_z^2 + M^2} + U \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right] \\
& + \sum_f \left( \frac{\mathcal{M}_f^2}{4G_s} + \frac{U_f^2}{4G_P} \right) - \frac{1}{2} \frac{G_D}{G_s^3} \mathcal{M}_u \mathcal{M}_d \mathcal{M}_s .
\end{aligned} \tag{3.24}$$

式中の  $\Phi_\mu$  と  $\Phi_{vac}$  はそれぞれ正エネルギーの寄与と真空の寄与を指している。式 (3.23) において、 $[f(x)]_b^a$  のような表記を行っているが、これは不定積分までを実行した定積分、すなわち  $f(a) - f(b)$  を意味している。

また、 $p_{Max}$  と  $p_{min}$  については (3.19) 式と (3.20) 式の積分範囲の上限と下限を示している。

$$\begin{aligned}
p_{Max} &\equiv \sqrt{(\mu + U)^2 - M^2} \quad \text{or} \quad 0 \\
p_{min} &\equiv \sqrt{(U - \mu)^2 - M^2} \quad \text{or} \quad 0 .
\end{aligned} \tag{3.25}$$

このようにして、運動量の大きさ  $|\mathbf{p}|$  がカットオフ  $\Lambda$  を超えない範囲の有効ポテンシャルに関しては (3.24) 式の第二項を除いて計算する事ができる。

### 3.3 数値解析

ここでは擬ベクトル型相互作用を追加した NJL 模型によって導出される (3.13) 式の有効ポテンシャルを以下のようなギャップ方程式に基づいて数値解析した結果を記述する。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathcal{M}_q} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathcal{M}_s} = \frac{\partial \Phi}{\partial U_q} = \frac{\partial \Phi}{\partial U_s} = 0 . \tag{3.26}$$

パラメータとして表 4 のようなセットを採用する。三次元運動量カットオフ  $\Lambda$  やスカラー型、行列式型の相互作用の結合定数は表 2,3 のパラメータと同じ物を用いるが、擬ベクトル型相互作用の結合定数  $G_P$  はクォーク質量  $M_q$  と  $M_s$  の真空での値に影響を与えないため、フリーパラメータとして扱い、結合定数の強さによって擬ベクトル凝縮がどのような振る舞いの変化を見せるのか探る。

表 4 擬ベクトル型相互作用を追加した NJL 模型のパラメータ

Model	$\Lambda$	$G_S$	$G_D$	$G_P$
GP2	0.6314 GeV	$3.666/\Lambda^2$	$-9.288/\Lambda^5$	$2G_S$
GP4.1	0.6314 GeV	$3.666/\Lambda^2$	$-9.288/\Lambda^5$	$4.1G_S$
GP5	0.6314 GeV	$3.666/\Lambda^2$	$-9.288/\Lambda^5$	$5G_S$
GP2GD0	0.6314 GeV	$4.370/\Lambda^2$	0	$2 \times 3.666/\Lambda^2$
GP4.1GD0	0.6314 GeV	$4.370/\Lambda^2$	0	$4.1 \times 3.666/\Lambda^2$
GP5GD0	0.6314 GeV	$4.370/\Lambda^2$	0	$5 \times 3.666/\Lambda^2$



この章ではこれ以降、問題を単純にするために実在の状態を考慮し、真空の寄与の項  $\Phi_{vac}$  からは擬ベクトル凝縮  $U$  は現れないと仮定する。すなわち擬ベクトル凝縮はクォーク物質中の粒子の寄与によってのみ生じると設定しておく。

具体的な模型のパラメータとして、表 4 のセットを採用する。擬ベクトル型相互作用の結合定数  $G_P$  は上でも述べたとおり、擬ベクトル型相互作用が再現すべき物理量は実験によって確かめられていないのでフリーパラメータとして扱っている。このパラメータを扱い、有限密度クォーク物質中の擬ベクトル凝縮の振るまいについて解析を行う。また、行列式型相互作用項  $\mathcal{L}_D$  が擬ベクトル凝縮に与える影響にも注目して解析を行うためにパラメータセットに GPαGD0 という行列式型相互作用の結合定数  $G_D = 0$  とした組み合わせも含めた。構成子クォーク質量  $M_q$  と  $M_s$  は  $G_D = 0$  としたパラメータセットと  $G_D \neq 0$  のパラメータセットとでほとんど同じ値を示す。

ここから  $G_P$  の値が相構造に与える影響について具体的に見ていく。表 4 でも示したとおり、 $G_P$  の値として  $2G_S$ ,  $4.1G_S$ ,  $5G_S$  の三つの値を設定する。これらのパラメータの下で擬ベクトル凝縮  $U_{u,d} \equiv U_q$  と  $U_s$  がどのように振る舞うかに注目する。

図 5 と図 6 はそれぞれモデル GP2 のパラメータセットを採用したときの構成子クォーク質量  $M_q$  と  $M_s$ 、擬ベクトル凝縮  $U_s$  を化学ポテンシャル  $\mu$  の関数としてプロットしている。図 5 から見て取れるように軽いクォークの構成子質量  $M_q$  は  $G_P = 0$  の場合と同じように  $\mu = \mu_{cr1} (= 0.34 \text{ GeV})$  で大きく減少し、 $\mu > \mu_{cr1}$  でカイラル対称性が回復するに従って単調に減少する。一方で、ストレンジクォークの質量は異なる振る舞いを示す。 $\mu = \mu_{cr1}$  で  $M_s$  が減少する点は  $G_P = 0$  の場合と同じだが、 $\mu \approx \mu_{crU_s1} \approx 0.486 \text{ GeV}$  と  $\mu \geq \mu_{crU_s2} \approx 0.55 \text{ GeV}$  の二つの点でクォーク質量が大きく減少するようになっている。この振る舞いは擬ベクトル凝縮  $U_s$  の出現に起因している。図 6 から見て取れるように、 $\mu_{crU_s1} \leq \mu \leq \mu_{crU_s2}$  の領域で  $U_s$  が出現している。

擬ベクトル凝縮が現れない場合はストレンジクォークの質量はカイラル対称性の回復に伴って、図 3 のように滑らかに減少していくはずである。これらの関係は擬ベクトル型凝縮が出現している間はクォーク質量の減少が抑制されていることを示している。

図 7 と図 8 は行列式型相互作用を含まない GP2GD0 のモデルでのクォーク質量と擬ベクトル凝縮をプロットしている。 $G_D \neq 0$  の場合と同様に有限密度領域に擬ベクトル凝縮  $U_s$  が出現している事を除けば  $G_P = 0$  の場合と同様の振る舞いを示している。また、図 6 と図 8 を見比べると行列式型相互作用を含むモデルは、含まないモデルと比べてより低い化学ポテンシャルで擬ベクトル凝縮が出現することが分かり、その値は  $\mu_{crU_s1} \approx 0.486/0.541 \text{ GeV}$  (行列式有り / 行列式無し) となる。モデル GP2 と GP2GD0 では擬ベクトル凝縮はストレンジクォークの凝縮  $U_s$  しか現れておらず、この  $G_P = 2G_S$  のパラメータ設定では軽いクォークの擬ベクトル凝縮  $U_q$  は現れていない。

図 9、図 10 は擬ベクトル型相互作用の結合定数の値が  $G_P = 4.1G_S$  であることを除けば図 5、図 6 と同様の関係を表した図である。図 9 より、クォーク質量  $M_q$  と  $M_s$  は  $\mu_{crU_q1} \approx 0.342 \text{ GeV}$  の点で一度減少した後、 $\mu = \mu_{crU_q2} \approx 0.343 \text{ GeV}$  の点で再び減少する。また、図 10 より、 $\mu_{crU_q1} < \mu < \mu_{crU_q2}$  のごく狭い領域において、軽いクォークの擬ベクトル凝縮  $U_q$  が出現していることが見て取れる。以降、 $\mu > \mu_{crU_q2}$  の領域で軽いクォークの質量  $M_q$  は単調に減少するが、ストレンジクォークの質量  $M_s \approx 0.48 \text{ GeV}$  程度の値を維持

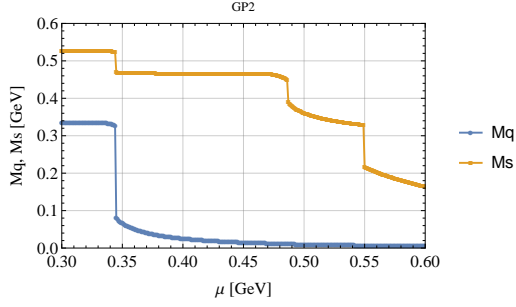


図 5 モデル GP2 のときのクォーク質量  $M_q$  (下側) と  $M_s$  (上側) を化学ポテンシャル  $\mu$  の関数としてプロットした図。

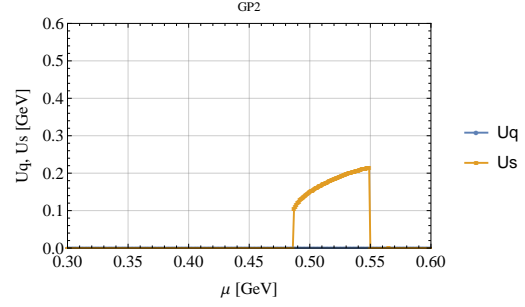


図 6 モデル GP2 のときの擬ベクトル凝縮  $U_s$  を化学ポテンシャル  $\mu$  の関数としてプロットした図。

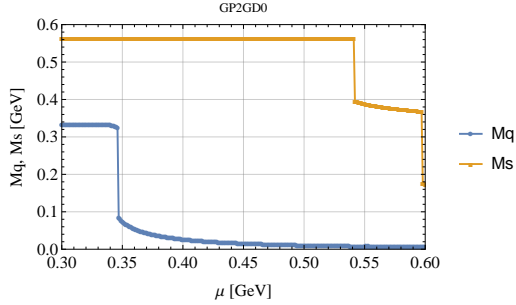


図 7 モデル GP2GD0 のときのクォーク質量  $M_q$  (下側) と  $M_s$  (上側) を化学ポテンシャル  $\mu$  の関数としてプロットした図。

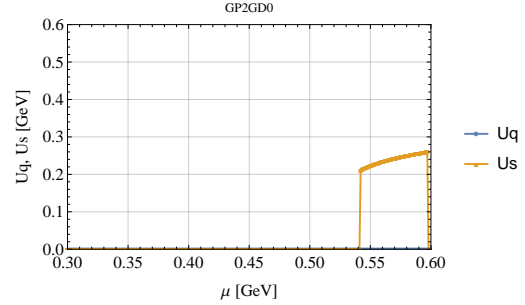


図 8 モデル GP2GD0 のときの擬ベクトル凝縮  $U_s$  を化学ポテンシャル  $\mu$  の関数としてプロットした図。

する。 $\mu = \mu_{\text{cr}U_s1} \approx 0.441$  GeV の点で  $M_s$  は再び減少する。これは図 10 から見て取れるように、 $\mu \geq \mu_{\text{cr}U_s1}$  の領域でストレンジクォークの擬ベクトル凝縮  $U_s$  が出現することに起因している。ちなみに、結合定数を  $G_P = 4.0G_S$  と設定した場合、 $U_q$  は出現しない。 $G_P = 4.1G_S$  と設定したのは、この値が  $U_q$  が出現するかしないかの境界だと目されるためである。

図 11、図 12 も  $G_P$  の値を除けば図 7、図 8 と同じ図である。軽いクォークの質量  $M_q$  の振る舞いはモデル GP4.1 とほぼ同様だが、フレーバー混合効果が無いため、ストレンジクォークの質量  $M_s$  の振る舞いが変化しているのが定性的な違いである。そのため、ストレンジクォークの質量  $M_s$  は軽いクォークの擬ベクトル凝縮  $U_q$  の出現からの影響を受けていない。また、軽いクォークの擬ベクトル凝縮  $U_q$  の振る舞いは、その現れる領域が非常に狭いこともあり、行列式型相互作用の有無にほとんど影響を受けていない。一方で、ストレンジクォークの擬ベクトル凝縮  $U_s$  が出現する境界の化学ポテンシャル  $\mu_{\text{cr}U_s1}$  はモデル GP2GD0 と同様に行列式型相互作用がある場合の方が小さくなっている傾向が見て取れ、その値は  $\mu_{\text{cr}U_s1} \approx 0.441/0.482$  GeV (行列式有り / 行列式無し) である。

図 13、図 14 は  $G_P = 5G_S$  であることを除けば、図 9、図 10 と同様の関係を表した図である。このモデルではクリティカルな化学ポテンシャルの値はそれぞれ、 $\mu_{\text{cr}U_q1} \approx 0.333$  GeV,  $\mu_{\text{cr}U_q2} \approx 0.358$  GeV,  $\mu_{\text{cr}U_s1} \approx 0.423$  GeV となる。モデル GP4.1 の時と比較して、 $U_q$  と  $U_s$  の出現する化学ポテンシャルの領域

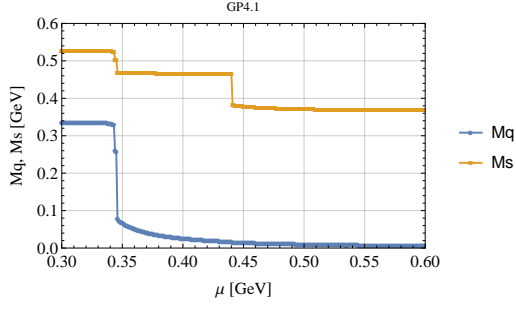


図 9 モデル GP4.1 のときのクォーク質量  $M_q$  (下側) と  $M_s$  (上側) を化学ポテンシャル  $\mu$  の関数としてプロットした図。

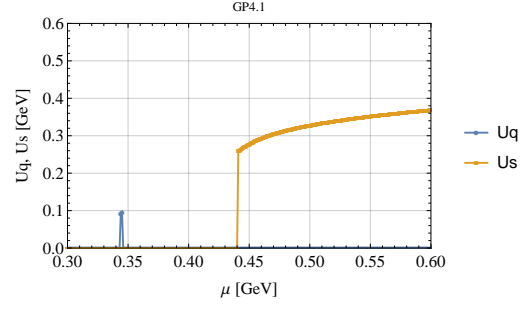


図 10 モデル GP4.1 のときの擬ベクトル凝縮  $U_q$  (左側) と  $U_s$  (右側) を化学ポテンシャル  $\mu$  の関数としてプロットした図。

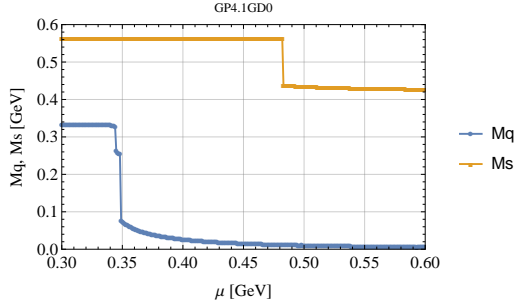


図 11 モデル GP4.1GD0 のときのクォーク質量  $M_q$  (下側) と  $M_s$  (上側) を化学ポテンシャル  $\mu$  の関数としてプロットした図。

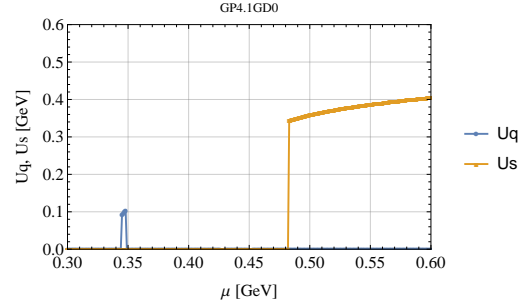


図 12 モデル GP4.1GD0 のときの擬ベクトル凝縮  $U_q$  (左側) と  $U_s$  (右側) を化学ポテンシャル  $\mu$  の関数としてプロットした図。

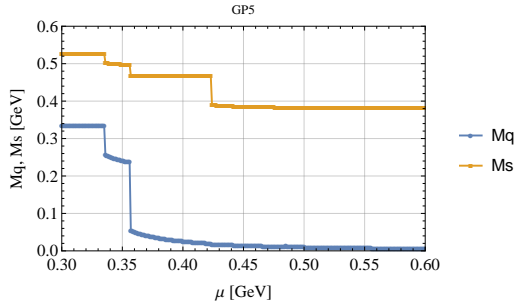


図 13 モデル GP5 のときのクォーク質量  $M_q$  (下側) と  $M_s$  (上側) を化学ポテンシャル  $\mu$  の関数としてプロットした図。

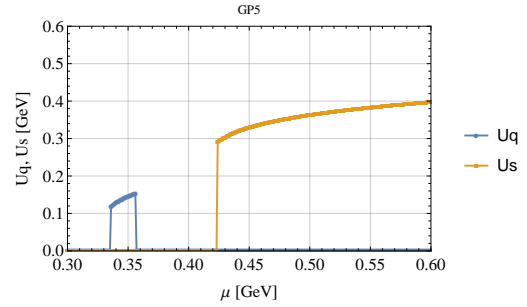


図 14 モデル GP5 のときの擬ベクトル凝縮  $U_q$  (左側) と  $U_s$  (右側) を化学ポテンシャル  $\mu$  の関数としてプロットした図。

が広がっている。この強力な結合定数  $G_P = 5G_S$  の下では、擬ベクトル凝縮は  $\mu > \Lambda$  となっても消滅しなくなっている。図 15,16 も  $G_P$  の値を除いて図 11,12 と同じ図である。図 14 と図 16 を比較すると、軽いクォークの擬ベクトル凝縮  $U_q$  は、出現する領域が広がったとしても、行列式型相互作用の影響をほとんど受けていないことが分かる。モデル GP5 とモデル GP5GD0 での  $U_s$  が出現する境界の化学ポテンシャルの値は  $\mu_{crU_s1} \approx 0.423/0.463$  GeV (行列式有り / 行列式無し) である。

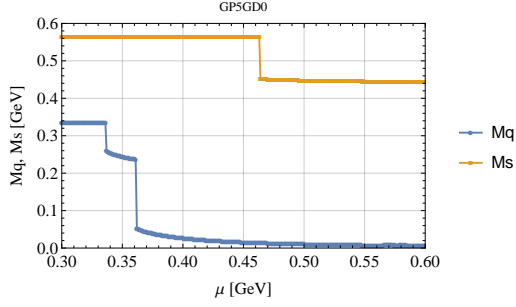


図 15 モデル GP5GD0 のときのクォーク質量  $M_q$  (下側) と  $M_s$  (上側) を化学ポテンシャル  $\mu$  の関数としてプロットした図。

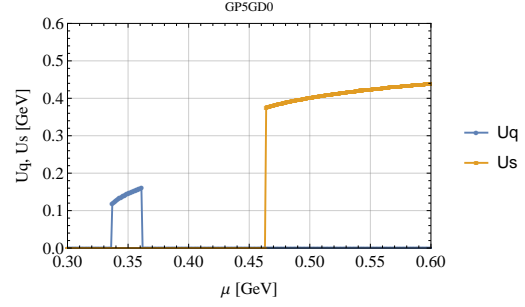


図 16 モデル GP5GD0 をときの擬ベクトル凝縮  $U_q$  (左側) と  $U_s$  (右側) を化学ポテンシャル  $\mu$  の関数としてプロットした図。

### 3.4 擬ベクトル型相互作用を追加した NJL 模型のまとめ

この章では擬ベクトル型相互作用を追加した 3 フレーバー NJL 模型を用いて、QCD 相図の零温度有限密度領域に擬ベクトル凝縮が出現しうる事を示した。特に、行列式型相互作用項によるフレーバー混合がこの擬ベクトル凝縮相に与える影響に注目して解析を行った。このフレーバー混合はクォーク質量に関してはストレンジクォークが強く影響を受け一方、軽いクォークはほとんど影響を受けないというのは 2 章で見てきた通りである。3.3 章での数値解析の結果を見ると、このストレンジクォークの方が強く影響を受ける傾向は擬ベクトル凝縮についても同様のようで、 $U_s$  が出現する領域は  $G_D = 0$  のモデルと比べて、 $G_D \neq 0$  のモデルでは広がる一方で、 $U_q$  についてはほとんど変化が生じなかった。これは数値的にはクォーク質量の振る舞いの変化が強く影響していると考えられる。

過去に擬ベクトル型相互作用を追加した 2 フレーバー NJL 模型を用いて擬ベクトル凝縮やそれに起因する自発磁化についての研究を行ったが<sup>11</sup>、このときはカイラル対称性が回復してクォーク質量が減少する前後の領域で擬ベクトル凝縮が出現する傾向が見られた。その傾向は本研究での 3 フレーバー NJL 模型においても変わらずに見られる。行列式型相互作用を考慮することによって、擬ベクトル型相互作用が出現する領域が広がったのはストレンジクォークの質量の減少が緩やかになることで、この“クォーク質量が減少する前後の領域”が広がったためであると考えられる。

## 4 テンソル型相互作用を追加した NJL 模型

この章ではテンソル型相互作用を追加した NJL 模型に関する解析計算を行う。計算の方針は 2 章や 3 章と同様であるため、一部省略しながら記述する。

### 4.1 ラグランジアン密度と平均場近似

テンソル型相互作用を追加した 3 フレーバー NJL 模型は以下のようなラグランジアン密度として書ける。

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - \vec{m}_0)\psi + \frac{G_s}{2}\sum_{a=0}^8[(\bar{\psi}\lambda_a\psi)^2 + (\bar{\psi}i\lambda_a\gamma_5\psi)^2] \\ & - \frac{1}{2}\frac{G_T}{4}\sum_{a=0}^8[(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\lambda_a\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\lambda_a\psi)^2] \\ & + \mu\psi^\dagger\psi \\ & + G_D [\det\bar{\psi}(1 - \gamma_5)\psi + \det\bar{\psi}(1 + \gamma_5)\psi] \\ = & \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_T + \mathcal{L}_\rho + \mathcal{L}_D .\end{aligned}\tag{4.1}$$

$$\tag{4.2}$$

最後の行での略記はテンソル型相互作用項  $\mathcal{L}_T$  以外は (2.1) 式と同じである。 $\mathcal{L}_T$  は

$$\mathcal{L}_T = -\frac{1}{2}\frac{G_T}{4}\sum_{a=0}^8[(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\lambda_a\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\lambda_a\psi)^2]\tag{4.3}$$

と対応する。

テンソル型相互作用項  $\mathcal{L}_T$  を平均場近似するに当たって、その凝縮は  $\langle\bar{q}\gamma^1\gamma^2q\rangle$  と  $\langle\bar{q}\gamma^2\gamma^1q\rangle$  を採用する。というのも、これらの  $\gamma$  行列の積は  $\gamma^1\gamma^2 = i\Sigma_3$  となり、(3.4) 式と同じパウリ行列が対角に並んだ行列となるからである。ゲルマン行列は第 3 成分と第 8 成分を選んで、

$$\begin{aligned}F_3 &= -G_T \langle\bar{\psi}\Sigma_3\lambda_3\psi\rangle , \\ F_8 &= -G_T \langle\bar{\psi}\Sigma_3\lambda_8\psi\rangle .\end{aligned}\tag{4.4}$$

と取る。これらの凝縮をそれぞれのフレーバーに対応させると以下のように書ける。

$$\begin{aligned}F_u &= F_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}F_8 , \\ F_d &= -F_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}F_8 , \\ F_s &= -\frac{2}{\sqrt{3}}F_8 .\end{aligned}\tag{4.5}$$

このテンソル型相互作用を追加した NJL 模型を 3 章の時と同様に平均場近似を施すと以下のような表式が得られる。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{MF} = & \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - \vec{M} - \vec{F}\Sigma_3 + \mu\gamma^0)\psi \\ & - \sum_f \frac{\mathcal{M}_f^2}{4G_s} - \frac{F_3^2}{G_T} - \frac{F_8^2}{G_T} + \frac{1}{2} \frac{G_D}{G_s^3} \mathcal{M}_u \mathcal{M}_d \mathcal{M}_s .\end{aligned}\quad (4.6)$$

ここで、 $\vec{F}$  がテンソル凝縮を表しており、具体的には以下のような形をしている。

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \text{diag.} \left( F_3 + \frac{F_8}{\sqrt{3}} , -F_3 + \frac{F_8}{\sqrt{3}} , -\frac{2F_8}{\sqrt{3}} \right) \\ &= \text{diag.} (F_u, F_d, F_s) .\end{aligned}\quad (4.7)$$

## 4.2 有効ポテンシャル

擬ベクトル型相互作用の時と同様にハミルトニアンを計算すると

$$\mathcal{H}_{MF} = \psi^\dagger (\hat{h} - \mu) \psi + \sum_f \frac{\mathcal{M}_f^2}{4G_s} + \frac{F_3^2}{G_T} + \frac{F_8^2}{G_T} - \frac{1}{2} \frac{G_D}{G_s^3} \mathcal{M}_u \mathcal{M}_d \mathcal{M}_s ,\quad (4.8)$$

一粒子ハミルトニアン  $\hat{h}$  は以下のように導入している。

$$\begin{aligned}\hat{h} &\equiv \gamma^0 \left( -i\gamma \cdot \nabla + \vec{M} + \vec{F}\Sigma_3 \right) \\ &= \begin{pmatrix} \vec{M} + \vec{F} & 0 & \hat{p}_z & \hat{p}_x - i\hat{p}_y \\ 0 & \vec{M} - \vec{F} & \hat{p}_x + i\hat{p}_y & -\hat{p}_z \\ -\hat{p}_z & \hat{p}_x - i\hat{p}_y & -\vec{M} + \vec{F} & 0 \\ \hat{p}_x + i\hat{p}_y & -\hat{p}_z & 0 & -\vec{M} - \vec{F} \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (4.9)$$

この一粒子ハミルトニアンを対角化して得られるエネルギー固有値は、

$$\begin{aligned}E_f &= \sqrt{p_z^2 + \left( \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + M_f^2} + \eta F_f \right)^2} \\ &= \sqrt{p_z^2 + \left( \sqrt{p_\perp^2 + M_f^2} + \eta F_f \right)^2} \\ &= \sqrt{p_z^2 + (q + \eta F_f)^2} \quad (f = u, d, s) ,\end{aligned}\quad (4.10)$$

と求められる。ここで、計算を簡単にするために

$$\begin{aligned}p_\perp^2 &\equiv p_x^2 + p_y^2 \\ q &\equiv \sqrt{p_\perp^2 + M_f^2} ,\end{aligned}\quad (4.11)$$

と定義した。擬ベクトル型相互作用の時と同様の変数変換であるが、今回はさらに計算を単純にするために

$q = \sqrt{p_\perp^2 + M_f^2}$  の置き換えも行っている。

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dp_\perp} &= \frac{p_\perp}{q} \\ \therefore dp_\perp &= dq \frac{q}{p_\perp},\end{aligned}\tag{4.12}$$

に気をつければ有効ポテンシャルはこのエネルギー固有値を用いて、

$$\begin{aligned}\Phi &= \sum_{f,\alpha,\eta} \int \frac{dp_z}{2\pi} \int \frac{dp_x}{2\pi} \int \frac{dp_y}{2\pi} (E_f - \mu) \theta(\mu - E_f) \\ &\quad - \sum_{f,\alpha,\eta} \int \frac{dp_z}{2\pi} \int \frac{dp_x}{2\pi} \int \frac{dp_y}{2\pi} E_f \\ &\quad + \sum_f \frac{\mathcal{M}_f^2}{4G_s} + \frac{F_3^2}{G_T} + \frac{F_8^2}{G_T} - \frac{1}{2} \frac{G_D}{G_s^3} \mathcal{M}_u \mathcal{M}_d \mathcal{M}_s \\ &= \sum_{f,\alpha,\eta} \int_M^{\sqrt{\Lambda^2 + M^2}} \frac{dq}{2\pi} \int \frac{dp_z}{2\pi} q (E_f(q, p_z, \eta) - \mu) \theta(\mu - E_f(q, p_z, \eta)) \\ &\quad - \sum_{f,\alpha,\eta} \int_M^{\sqrt{\Lambda^2 + M^2}} \frac{dq}{2\pi} \int \frac{dp_z}{2\pi} q E_f(q, p_z, \eta) \\ &\quad + \sum_f \frac{\mathcal{M}_f^2}{4G_s} + \frac{F_3^2}{G_T} + \frac{F_8^2}{G_T} - \frac{1}{2} \frac{G_D}{G_s^3} \mathcal{M}_u \mathcal{M}_d \mathcal{M}_s,\end{aligned}\tag{4.13}$$

と書ける。

ステップ関数 ( $\mu > E_f(q, p_z, \eta)$ ) によって積分範囲が影響を受けるのは擬ベクトル型相互作用の時と同様だが、テンソル型の相互作用については解析計算を擬ベクトルの時よりも詳細に行っているので付録 G に記載する。

### 4.3 数値解析

ここではテンソル型相互作用を追加した NJL 模型を用いた数値解析の結果を記述する。パラメータとして表 5 のようなセットを採用する。三次元運動量カットオフ  $\Lambda$  やスカラー型、行列式型の相互作用の結合定数は表 2,3 のパラメータと同じ物を用いるが、テンソル型相互作用の結合定数  $G_T$  はクォーク質量  $M_q$  と  $M_s$  の真空での値に影響を与えないため、擬ベクトル型相互作用を追加したときと同様にフリーパラメータとして扱うが、フィールド変換によると、テンソル型相互作用の結合定数  $G_T$  は  $2G_S$  と予想される。行列式型相互作用の有るモデルと無いモデルで  $G_S$  の値が異なるため、それぞれの  $G_S$ 、いうなれば  $G_{S(G_D \neq 0)}$  と  $G_{S(G_D=0)}$  に対して、 $G_T$  の値を  $2G_{S(G_D \neq 0)}$  と  $2G_{S(G_D=0)}$  の二種類を採用する。そのため、モデルのパラメータセットは行列式型相互作用の有無とそれぞれの  $G_T$  の値でそれぞれ二つずつ、計四種類のパターンと、テンソル凝縮相に結合定数が与える影響を検証するための結合定数を少し弱くしたモデル GT1.8 と GT1.8GD0 の二種類、計六種類のセットを用いて計算を行う。

図 17、図 18、図 19 はそれぞれ、モデル GT2 のパラメータを採用したときの構成子クォーク質量  $M_q$  と  $M_s$ 、テンソル凝縮  $F_3, F_8$ 、フレーバー毎のテンソル凝縮  $F_u, F_d, F_s$  を化学ポテンシャル  $\mu$  の関数としてプロットしている。なお、ダウクォークとストレンジクォークのテンソル凝縮  $F_d, F_s$  については絶対値をプ

表5 テンソル型相互作用を追加した NJL 模型のパラメータ

Model	$\Lambda$	$G_S$	$G_D$	$G_T$
GT2	0.6314GeV	$3.666/\Lambda^2$	$-9.288/\Lambda^5$	$2G_S$
GT2'	0.6314GeV	$3.666/\Lambda^2$	$-9.288/\Lambda^5$	$2 \times 4.370/\Lambda^2$
GT1.8	0.6314GeV	$3.666/\Lambda^2$	$-9.288/\Lambda^5$	$1.8G_s$
GT2GD0	0.6314GeV	$4.370/\Lambda^2$	0	$2 \times 3.666/\Lambda^2$
GP2GD0'	0.6314GeV	$4.370/\Lambda^2$	0	$2G_S$
GP1.8GD0	0.6314GeV	$4.370/\Lambda^2$	0	$1.8 \times 3.666/\Lambda^2$

ロットしている。このモデルは化学ポテンシャルの値が  $\mu \approx 0.475/0.508/0.522 \text{ GeV} \equiv \mu_{\text{cr}F3}/\mu_{\text{cr}F38}/\mu_{\text{cr}F8}$  となる点でテンソル凝縮相の振るまいが変化する。

図 17 から見て取れるように軽いクォークの構成子質量  $M_q$  は  $G_T = 0$  や擬ベクトルの場合と同じように  $\mu = \mu_{\text{cr}1}(= 0.34\text{GeV})$  で大きく減少し、 $\mu > \mu_{\text{cr}1}$  でカイラル対称性が回復するに従って単調に減少するが、ストレンジクォークの質量は異なる振る舞いを示す。 $\mu = \mu_{\text{cr}1}$  で  $M_s$  が減少する点はこれまでの場合と同じだが、 $M_s$  の値は  $\mu = \mu_{\text{cr}F38}$  の点で小さく跳ねて減少した後、単調に減少していく。この振る舞いは  $G_T = 0$  の場合の図 3 とよく似ているが、微妙に異なっている。図 3 では  $M_s$  が減少し始めたとき、すなわち化学ポテ

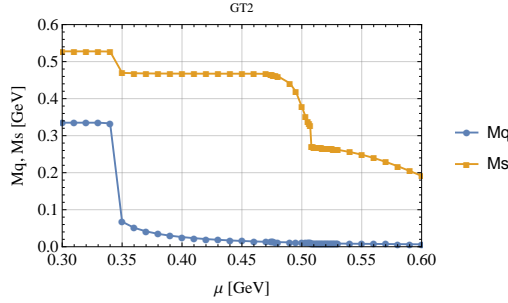


図 17 モデル GT2 のときのクォーク質量  $M_q$  (下側) と  $M_s$  (上側) を化学ポテンシャル  $\mu$  の関数としてプロットした図。

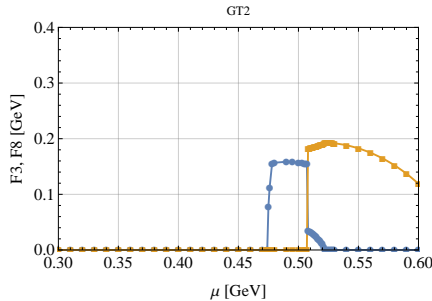


図 18 モデル GT2 のときのテンソル凝縮  $F_3$  (左側、下側) と  $F_8$  (右側、上側) を化学ポテンシャル  $\mu$  の関数としてプロットした図。

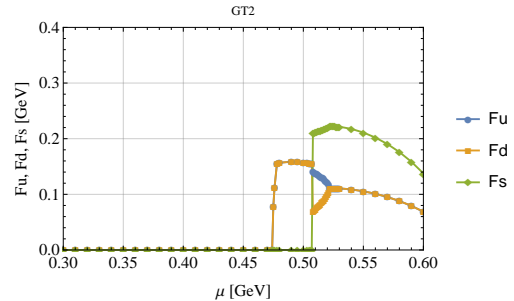


図 19 モデル GT2 のときのフレーバー毎のテンソル凝縮  $F_u, F_d, F_s$  を化学ポテンシャル  $\mu$  の関数としてプロットした図。



ンシャル  $\mu$  の値が比較的小さい時に  $M_s$  は激しく減少するが、この傾きは  $\mu$  の増大に伴って緩やかになっていく。一方で、図 17 では  $M_s$  が減少した直後は比較的平坦で、 $\mu$  の増大に伴って傾きが大きくなっていくように見える。擬ベクトルの時と同様に、この質量の振る舞いの変化はテンソル凝縮の出現に起因している。<sup>\*2</sup>

図 18,19 を見ると  $\mu = \mu_{\text{cr}F3}$  の点を境にテンソル凝縮が出現し始めることがわかる。図 18 からは、 $\mu_{\text{cr}F3} \leq \mu \leq \mu_{\text{cr}F38}$  の領域ではテンソル凝縮は  $F_3$  のみが、 $\mu_{\text{cr}F38} \leq \mu \leq \mu_{\text{cr}F8}$  の領域では  $F_3$  と  $F_8$  の両方が、 $\mu_{\text{cr}F8} \leq \mu$  の領域では  $F_8$  のみが発生することが見て取れる。図 19 に目を移すと、 $\mu_{\text{cr}F3} \leq \mu \leq \mu_{\text{cr}F38}$  の領域ではテンソル凝縮は軽いクォークについてのもの、すなわち  $F_u$  と  $F_d$  のみが発生し、 $\mu_{\text{cr}F38} \leq \mu$  の領域では  $F_u, F_d, F_s$  の全てが発生していることがわかる。フレーバー毎のテンソル凝縮の定義式 (4.5) から明らかに、 $F_3$  か  $F_8$  のどちらかが 0 となる場合、 $F_u$  と  $F_d$  の大きさは等しくならなければならないため、 $F_u$  と  $F_d$  が異なる値を取るのは  $\mu_{\text{cr}F38} \leq \mu \leq \mu_{\text{cr}F8}$  の領域のみである。また、 $F_3$  の値は  $F_s$  に影響を与えないため、 $F_3$  しか出現しない  $\mu_{\text{cr}F3} \leq \mu \leq \mu_{\text{cr}F38}$  の領域では  $F_s$  は出現していない。クォーク質量の振るまいが変化する境界もテンソル凝縮が発生する  $\mu = \mu_{\text{cr}F3}$  ではなく、ストレンジクォークのテンソル凝縮が発生する  $\mu = \mu_{\text{cr}F38}$  となっている。

図 20、図 21、図 22 はそれぞれ、モデル GT2GD0 のパラメータを採用したときの構成子クォーク質量とテンソル凝縮を化学ポテンシャル  $\mu$  の関数としてプロットしている。モデル GT2 と同様に有限密度領域にテン

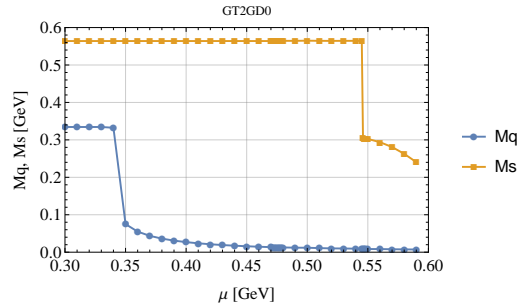


図 20 モデル GT2GD0 のときのクォーク質量  $M_q$  (下側) と  $M_s$  (上側) を化学ポテンシャル  $\mu$  の関数としてプロットした図。

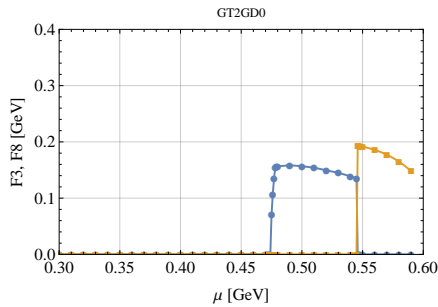


図 21 モデル GT2GD0 のときのテンソル凝縮  $F_3$  (左側、下側) と  $F_8$  (右側、上側) を化学ポテンシャル  $\mu$  の関数としてプロットした図。

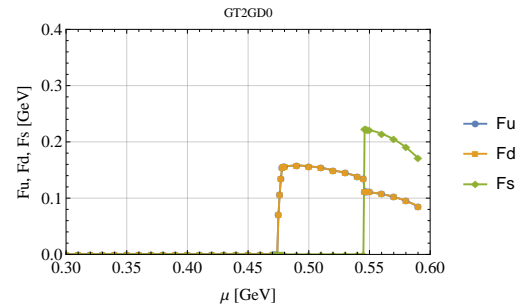


図 22 モデル GT2GD0 のときのフレーバー毎のテンソル凝縮  $F_u, F_d, F_s$  を化学ポテンシャル  $\mu$  の関数としてプロットした図。

<sup>\*2</sup> 変化幅は擬ベクトルの時よりは小さい

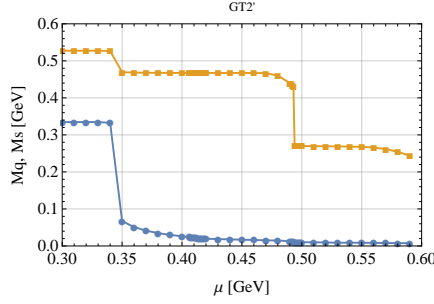


図 23 モデル GT2' のときのクォーク質量  $M_q$  (下側) と  $M_s$  (上側) を化学ポテンシャル  $\mu$  の関数としてプロットした図。

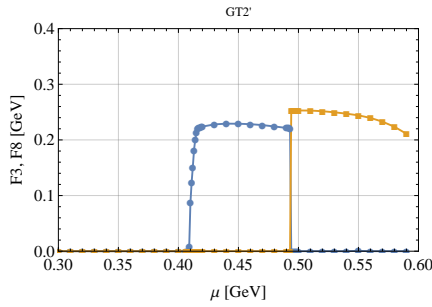


図 24 モデル GT2' のときのテンソル凝縮  $F_3$  (左側、下側) と  $F_8$  (右側、上側) を化学ポテンシャル  $\mu$  の関数としてプロットした図。

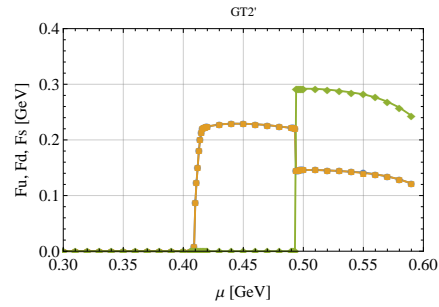


図 25 モデル GT2' のときのフレーバー毎のテンソル凝縮  $F_u, F_d, F_s$  を化学ポテンシャル  $\mu$  の関数としてプロットした図。

ソル凝縮  $F_3, F_8$  が出現しているが、その傾向が異なっている。図 18 と図 21 を見比べると分かるが、モデル GT2 のときに出現していた  $F_3$  と  $F_8$  が共存する領域がモデル GT2GD0 には出現していない。テンソル凝縮が出現する境界の化学ポテンシャルは  $\mu \approx 0.475/0.546 \text{ GeV} \equiv \mu_{\text{cr}F_3}/\mu_{\text{cr}F_8}$  となっている。 $F_3$  と  $F_8$  が共存する領域が出現しないため、 $\mu_{\text{cr}F_{38}}$  は無くなっている。このモデルの場合、 $F_3$  と  $F_8$  が共存する領域が存在しないことから明らかなように、 $F_u$  と  $F_d$  は常に同じ値を取っている。図 22 には二つのデータ系列しかプロットされていないように見えるが、これは  $F_u$  と  $F_d$  が完全に重なっているためである。モデル GT2 (すなわち、行列型相互作用が有る場合) の結果と比較すると、 $F_3$  が出現する境界の化学ポテンシャル  $\mu_{\text{cr}F_3}$  の値はモデル GT2 も GT2GD0 も変わらず 0.475 GeV となっているが、 $F_8$  が出現する境界の化学ポテンシャル  $\mu_{\text{cr}F_8}$  の値は  $\mu_{\text{cr}F_8} = 0.522/0.546 \text{ GeV}$  (GT2 / GT2GD0) となり、擬ベクトル型相互作用の時と同様に行列型相互作用のある場合の方がより低い化学ポテンシャルでテンソル凝縮が出現することがわかる。行列型がある場合の  $\mu_{\text{cr}F_{38}} = 0.508 \text{ GeV}$  と比較した場合はなおさらである。

図 23、図 24、図 25 はパラメータセットとしてモデル GT2' を採用したときのクォーク質量とテンソル凝縮をプロットした図で、 $G_T$  の値以外は図 17,18,19 と同じ関係を示した図である。このモデルは化学ポテンシャルの値が  $\mu \approx 0.409/0.494 \text{ GeV} \equiv \mu_{\text{cr}F_3}/\mu_{\text{cr}F_8}$  となる点で、テンソル凝縮相の振るまいが変化する。モデル GT2 の場合との定性的な違いとして、 $F_3$  と  $F_8$  が共存する領域が存在しないことが挙げられる。テンソル凝縮をプロットした、図 24 では  $\mu_{\text{cr}F_3} \leq \mu \leq \mu_{\text{cr}F_8}$  の領域で  $F_3$  が、 $\mu_{\text{cr}F_8} \leq \mu$  の領域で  $F_8$  がそれぞれ出

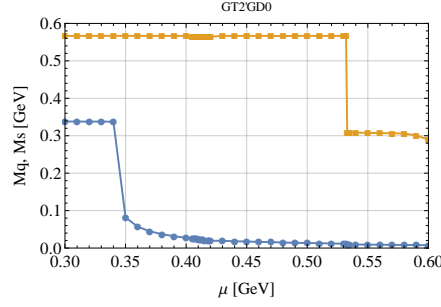


図 26 モデル GT2GD0' のときのクォーク質量  $M_q$  (下側) と  $M_s$  (上側) を化学ポテンシャル  $\mu$  の関数としてプロットした図。

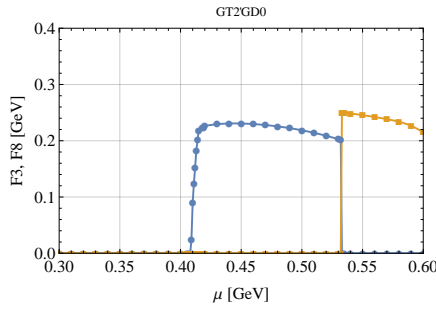


図 27 モデル GT2GD0' のときのテンソル凝縮  $F_3$  (左側、下側) と  $F_8$  (右側、上側) を化学ポテンシャル  $\mu$  の関数としてプロットした図。

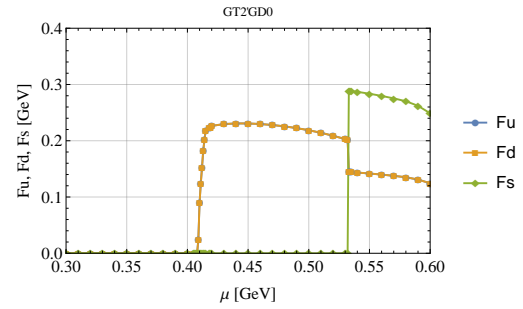


図 28 モデル GT2GD0' のときのフレーバー毎のテンソル凝縮  $F_u, F_d, F_s$  を化学ポテンシャル  $\mu$  の関数としてプロットした図。

現する。

図 26、図 27、図 28 はパラメータセットとしてモデル GT2GD0' を採用したときのクォーク質量とテンソル凝縮をプロットした図で、 $G_T$  の値以外は図 20,21,22 と同じ関係を示した図である。モデル GT2 とモデル GT2' とは異なり、モデル GT2GD0 とモデル GT2GD0' の間には定性的な性質の違いはないが、結合定数の増加によって、テンソル凝縮がより低い化学ポテンシャルで出現するようになっているほか、テンソル凝縮の大きさそのものも増大している。モデル GT2' とモデル GT2GD0' の結果を比較すると、 $F_3$  が出現する境界の化学ポテンシャルの値はいずれの場合も  $\mu_{\text{cr}F_3} = 0.409 \text{ GeV}$  とどちらも同じ値を取るが、 $\mu_{\text{cr}F_8}$  の値は  $\mu_{\text{cr}F_8} = 0.494/0.533 \text{ GeV}$  (GT2' / GT2GD0') となり、行列式型相互作用を考慮した場合の方がより低い化学ポテンシャルで  $F_8$  が出現するようになる。

図 29、図 30、図 31 はこれまでと同様に、モデル GT1.8 のパラメータを採用したときの構成子クォーク質量、テンソル凝縮をそれぞれ化学ポテンシャル  $\mu$  の関数としてプロットした図である。このモデルでの境界の化学ポテンシャルは  $\mu \approx 0.515/0.524/0.548 \text{ GeV} \equiv \mu_{\text{cr}F_3}/\mu_{\text{cr}F_{38}}/\mu_{\text{cr}F_8}$  となっており、モデル GT2 のケースと同様に  $F_3$  と  $F_8$  が共存する領域が存在することが確かめられる。

図 32、図 33、図 34 はモデル GT1.8GD0 のパラメータを採用したときの構成子クォーク質量、テンソル凝縮を表した図である。このモデルでの境界の化学ポテンシャルは  $\mu \approx 0.515/0.553 \text{ GeV} \equiv \mu_{\text{cr}F_3}/\mu_{\text{cr}F_8}$  となっている。モデル GT2GD0 のケースと定性的には同様の振る舞いを示している。

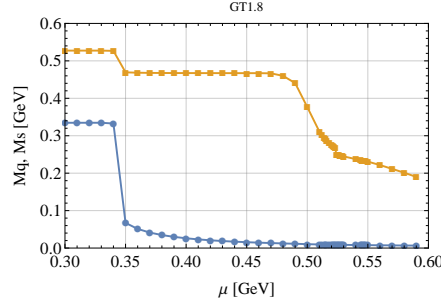


図 29 モデル GT1.8 のときのクォーク質量  $M_q$  (下側) と  $M_s$  (上側) を化学ポテンシャル  $\mu$  の関数としてプロットした図。

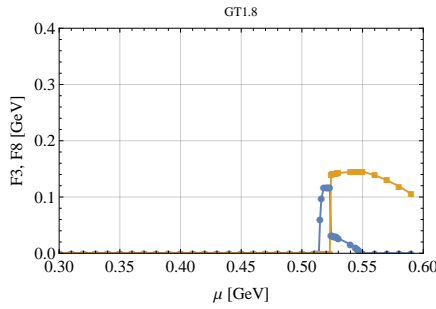


図 30 モデル GT1.8 のときのテンソル凝縮  $F_3$  (左側、下側) と  $F_8$  (右側、上側) を化学ポテンシャル  $\mu$  の関数としてプロットした図。

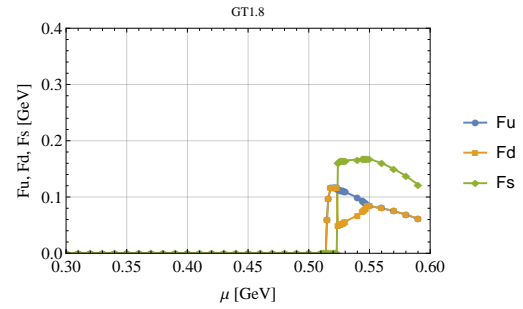


図 31 モデル GT1.8 のときのフレーバー毎のテンソル凝縮  $F_u, F_d, F_s$  を化学ポテンシャル  $\mu$  の関数としてプロットした図。

#### 4.4 テンソル型相互作用を追加した NJL 模型のまとめ

この章ではテンソル型相互作用を追加した 3 フレーバー NJL 模型を用いて、QCD 相図の零温度有限密度領域にテンソル凝縮が出現する事を示した。特に、3 章で見た擬ベクトル型相互作用を追加した NJL 模型での計算と同じく、行列式型相互作用項によるフレーバー混合が凝縮に与える影響に注目している。

今回の計算で採用したパラメータセットでは、大きく分けて二つの特徴が見られた。

一つ目はテンソル凝縮が出現する境界の化学ポテンシャルの値で、 $F_3$  の出現する化学ポテンシャルの値は結合定数  $G_T$  の値が同じであれば行列式型相互作用の有無にかかわらず一定であるという傾向も見られた。一方で、 $F_8$  は行列式型相互作用の効果を考慮するとより小さい化学ポテンシャルで出現するようになる。これはそれぞれのテンソル凝縮が顕著に行列式型相互作用の影響を受けるストレンジクォークに影響を与えるかどうか効いており、ストレンジクォークのテンソル凝縮  $F_s = -\frac{2}{\sqrt{3}}F_8$  は  $F_8$  のみを式の中に含み、 $F_3$  の影響をあからさまには受けないため、 $F_3$  の出現する化学ポテンシャルは行列式型相互作用の有無によって変化しなかったと考えられる。

二つ目は、二つのモデル GT2, GT1.8 とそれ以外のモデル (GT2GD0, GT2GD0', GT2', GT1.8GD0) でのテンソル凝縮相の振る舞いの定性的な違いである。

テンソル凝縮は化学ポテンシャル  $\mu$  が増加するに従って、モデル GT2 と GT1.8 では

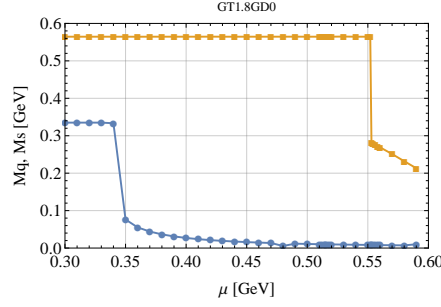


図 32 モデル GT1.8GD0 のときのクォーク質量  $M_q$  (下側) と  $M_s$  (上側) を化学ポテンシャル  $\mu$  の関数としてプロットした図。

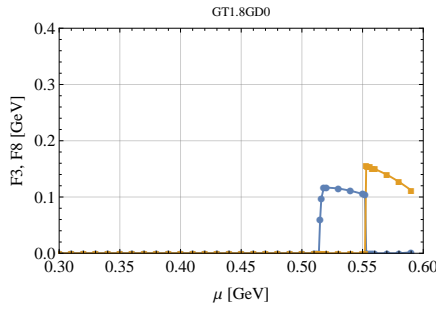


図 33 モデル GT1.8GD0 のときのテンソル凝縮  $F_3$  (左側、下側) と  $F_8$  (右側、上側) を化学ポテンシャル  $\mu$  の関数としてプロットした図。

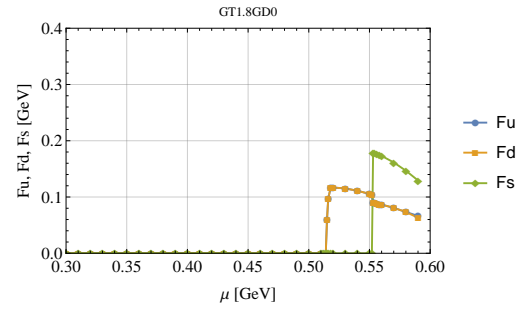


図 34 モデル GT1.8GD0 のときのフレーバー毎のテンソル凝縮  $F_u, F_d, F_s$  を化学ポテンシャル  $\mu$  の関数としてプロットした図。

1.  $F_3$  が出現
2.  $F_3$  が急落、 $F_8$  が出現
3.  $F_3$  が連続的に消滅、 $F_8$  のみが生き残る

という振る舞いを示すが、他のモデル (GT2GD0, GT2GD0', GT2', GT1.8GD0) での計算は

1.  $F_3$  が出現
2.  $F_3$  が消滅、 $F_8$  が出現

という振る舞いを示す。モデル GT2 と GT1.8 には  $F_3$  と  $F_8$  が共存する領域が存在するが、他のモデルにはそれが存在しない。これについて議論するためには  $F_3$  と  $F_8$  が共存する、どちらかのみが出現する状態の物理的な意味を考える必要がある。(4.5) 式で書いたフレーバー毎のテンソル凝縮をもう一度書くと

$$\begin{aligned}
 F_u &= F_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} F_8, \\
 F_d &= -F_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} F_8, \\
 F_s &= -\frac{2}{\sqrt{3}} F_8,
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

のような形をしている。この式を、 $F_3 \neq 0, F_8 = 0$  の場合と  $F_3 = 0, F_8 \neq 0$  の場合について書き直してみ

ると、

$$\begin{aligned} F_u &= \begin{cases} F_3 & (\text{for } F_8 = 0) \\ \frac{1}{\sqrt{3}}F_8 & (\text{for } F_3 = 0) \end{cases} \\ F_d &= \begin{cases} -F_3 & (\text{for } F_8 = 0) \\ \frac{1}{\sqrt{3}}F_8 & (\text{for } F_3 = 0) \end{cases} \\ F_s &= \begin{cases} 0 & (\text{for } F_8 = 0) \\ -\frac{2}{\sqrt{3}}F_8 & (\text{for } F_3 = 0) \end{cases}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

と書き換えられる。(4.10) 式や (4.13) 式からもわかるように、テンソル凝縮  $F$  は常に  $+F$  と  $-F$  の両方の和を取るため、その符号ではなく絶対値のみが重要である。(4.15) 式より  $F_8 = 0$  の時は  $F_u = -F_d$  の関係が成り立つが、重要なのは絶対値であるため、実質的には  $F_3$  と  $F_8$  のどちらかが 0 の時は  $F_u = F_d$  と考えて差し支えない (厳密には  $F_u = |F_d|$ )。解析にあたって、アイソスピン対称性を仮定してアップクォークとダウンクォークの質量は等しいと近似した。この解析では電氣的性質は考慮していないため、クォーク質量が等しければ少なくとも模型の範囲内ではアップクォークとダウンクォークはそれぞれ等価だといえる。アップクォークとダウンクォークを等価に扱っていることを考えれば、 $F_u$  と  $F_d$  が同じ値をとること、すなわち  $F_3$  と  $F_8$  が共存しないのは極めて自然な結論である。

仮に、三つのフレーバーのクォーク質量を等しいと仮定し、クォークの電氣的性質を考慮して計算を行ったとすると、 $-1/3e$  の電荷を持つダウンクォークとストレンジクォークとが等価になり、 $+2/3e$  の電荷を持つアップクォークだけが区別された結果、すなわち  $F_d = |F_s|$  のような結果が得られそうである。実際に、テンソル型相互作用を追加した 3 フレーバーの NJL 模型で、アップ、ダウン、ストレンジのカレント質量をゼロとし、電氣的性質を考慮して同じようなテンソル凝縮の性質を調べた先行研究<sup>17</sup> では、数値解析の結果として、 $F_8 = F_3/\sqrt{3}$  の関係が成り立つと示されている。この関係をフレーバーごとのテンソル凝縮に代入してみると、 $F_d = |F_s| = \frac{2}{3}F_3$  の関係が得られ、ダウンクォークとストレンジクォークが等価に扱われていることがわかる。

今回の解析の場合、クォーク質量での区別によって、 $F_u = |F_d| \neq |F_s|$  の関係が満たされるため、 $F_3$  と  $F_8$  が共存しないという結論が得られれば話は簡単になるのだが、実際にはモデル GT2 の場合に  $F_3$  と  $F_8$  が共存する領域が存在している。共存するといっても、 $F_8$  が出現する際に  $F_3$  は大きく減少していることから、この共存領域は  $F_3$  のみの相から  $F_8$  のみの相へ移行する中間段階の領域であると考えられる。

$G_T$  が同じ値で行列式型相互作用を含まないモデル GT2GD0 と GT1.8GD0 で出現していないことから、この共存領域の出現には行列式型相互作用の存在が影響していると考えられる。行列式型相互作用の効果によってカイラル凝縮が連続的に変化するようになることが、この共存領域が出現する一因になっていると思われる。

一方で、行列式型相互作用の含まれるモデル GT2' のケースでもこの共存領域は出現していない。これは共存領域が非常に繊細なポテンシャルの最小値であることを意味しており、結合定数の変化でポテンシャル最小値が極小値でなくなってしまったことが原因だと思われる。この共存する領域がある程度弱い結合定数でしか出現しないことについて、他のモデルにおいても  $F_8$  は出現して以降、一貫して減少し続けるが、モデル GT2 の  $F_3$  と  $F_8$  が共存する領域では  $F_8$  が増加し続けることに注目して、厳密ではないが直感的な説明を試みる。

$F_3$  が出現することによって  $F_8$  が本来の値より小さく出ていると考えるのである。有効ポテンシャルの式中で結合定数  $G_T$  が現れているのは  $\frac{F_3^2}{G_T} + \frac{F_8^2}{G_T}$  の項だけである。この項はテンソル凝縮  $F_3$  や  $F_8$  が大きくなればポテンシャルの値が大きくなるため、テンソル凝縮が大きくなりすぎることを防ぐ効果を持っている。その分母である結合定数  $G_T$  の値を大きくすることは、この抑えを弱くすることに相当する。

一般に、正の実数  $a, b$  に対して  $a > b > 0$  が満たされる場合、 $a^2 > (a - b)^2 + b^2$  が成り立つ。 $F_3$  と  $F_8$  に関して単純にこのような足し算の関係が成立しているとは考え難いが、 $F_3$  と  $F_8$  が共存する領域において似たような状況にあるとした場合、 $F_8$  が単独で出現するよりも  $F_3$  が少し混じった方がこの“抑え”の項の値は小さくなる。結合定数が小さい場合は、少しでもポテンシャルを得するためにこのような共存する領域が出現するが、結合定数が大きくなると、このような項の解を無視してポテンシャルの正エネルギーの項を小さくした方が得になるという戦略が働いている可能性がある。

共存する領域は  $G_T$  の値が小さいモデル GT1.8 でも  $F_3$  と  $F_8$  が出現する一方で、同じ  $G_T$  の値で  $G_D = 0$  としたモデル GT1.8GD0 では出現しないことから、 $F_3$  と  $F_8$  の共存領域は結合定数が小さくて行列型式相互作用を含むモデルにしか出現しない可能性が示唆される。

いずれにせよ、当初設定していた軽いクォーク間の対称性が結合定数  $G_T$  の値によって崩れうるとするのは非常に興味深い性質である。

## 5 擬ベクトル型相互作用とテンソル型相互作用の比較

ここまで、擬ベクトル型相互作用を追加した模型とテンソル型相互作用を追加した模型をそれぞれ用いて、凝縮相について解析を行ってきた。それぞれの解析の結果について凝縮の選び方が異なるため一概に行う事はできないが比較してみる。

擬ベクトル凝縮とテンソル凝縮の最も特徴的な違いとしてクォーク質量との関係が挙げられる。擬ベクトル凝縮がカイラル対称性が回復してクォーク質量が減少する前後の境界で出現するのに対してテンソル凝縮はカイラル対称性が回復してクォーク質量が減少した後に出現する。凝縮の選び方の違いに関しても、少なくともそれぞれの模型での数値解析を行った、3.3 章と 4.3 章での結果において、擬ベクトル凝縮  $U_q$  と、テンソル凝縮  $F_3$  に起因するフレーバーごとのテンソル凝縮  $F_u = F_d$  はストレンジの凝縮とは独立に出現する軽いクォークの凝縮として、対等な関係にあるとみてよいだろう。結合定数の大きさにもよるが、 $U_q$  が出現する領域はおおむね  $\mu_q \approx 0.33$  GeV 前後の軽いクォークのカイラル対称性が回復するかしないかの境界となっている。一方で、 $F_3$  が単独で出現し始める化学ポテンシャルはこれも結合定数の大きさによるが  $\mu_q \approx 0.4$  GeV から  $\mu_q \approx 0.5$  GeV 程度と、軽いクォークのカイラル対称性が回復した後の領域に出現することが見て取れる。

また、いずれの場合もストレンジクォークの質量は擬ベクトル凝縮やテンソル凝縮が出現すると同時に大きく変化するが、凝縮が出現している間は変化が緩やかになる傾向も見られた。ストレンジの擬ベクトル凝縮が出現してもストレンジクォークの質量の減少は  $M_s \sim 0.4$  GeV 程度で留まるが、テンソル凝縮が出現すると  $M_s \sim 0.3$  GeV 程度まで減少する。一概には比較できないが、テンソル凝縮は擬ベクトル凝縮と比べてカイラル対称性が回復した状態を好む傾向があるといえるかもしれない。

先行研究で 2 フレーバーの NJL 模型に擬ベクトル型相互作用を追加した模型での計算<sup>11</sup> や、2 フレーバー

の NJL 模型にテンソル型相互作用を追加した模型での計算<sup>19,28</sup>が行われている。これらの研究でも今回の計算で得られたような傾向、すなわち擬ベクトル凝縮がカイラル対称性が回復する前後の領域で出現することやテンソル凝縮がカイラル対称性が回復したあとの領域で出現する事などが確かめられている。このことから、今回の結果は 2 フレーバーの NJL 模型での計算から 3 フレーバーの NJL 模型での計算への正統発展的な振る舞いをしているとも言えよう。

行列式型相互作用項  $\mathcal{L}_D$  の影響は、何れの場合においてもストレンジクォークが顕著に受ける一方で、軽いクォークは直接影響を受けないことが見て取れる。これは擬ベクトルやテンソルを追加しない生の NJL 模型での計算の時のクォーク質量の振る舞いと同じ傾向であり、このような計算の範囲では行列式型相互作用項はストレンジクォークに対して顕著に影響を与えるが、軽いクォークにはそれほど影響を与えないと結論づけられるだろう。

次の章で有効模型を用いたコンパクト星の内部構造の推定に踏み込むが、その際にはテンソル型相互作用を追加した NJL 模型を採用することにする。というのもこれまでの結果を比較した結果、テンソル凝縮はコンパクト星の内部、すなわち高密度の環境で確実に凝縮相が出現すると見込まれる一方で、擬ベクトル凝縮に関しては化学ポテンシャルが上がるにつれて一度は出現した凝縮相が消滅することもあるなど、星の内部構造への寄与が少ない可能性があるためである。しっかりと高密度領域での凝縮相の振る舞いを調べるために本研究ではテンソル型相互作用を追加した NJL 模型を用いてコンパクト星の内部構造の推定を行う。

## 6 テンソル型相互作用を含む NJL 模型によるコンパクト星の内部構造の推定

これまで、3 フレーバーの NJL 模型に擬ベクトル型、テンソル型の相互作用をそれぞれ追加した模型を用いて存在しうる凝縮相についての解析を行ってきた。その結果、零温度高密度のクォーク物質中に擬ベクトル型、テンソル型の相互作用に起因する凝縮が出現することが確かめられた。クォーク物質が生じるほどの高密度の環境が自然界で存在すると考えられている場所の候補としてコンパクト星の核の内部が挙げられる。当初の動機付けからして、内部にこのような凝縮相を持つコンパクト星の内部構造の推定を行うのは重要であると言える。この論文では、高密度領域に顕著に凝縮相が出現することが確かめられたテンソル型相互作用を追加した NJL 模型を用いてコンパクト星の内部構造を推定する。

クォーク物質の状態方程式を記述するための模型として、4 章で用いたテンソル型相互作用を追加した 3 フレーバー NJL 模型を採用する。模型をコンパクト星の内部構造の推定に適応させるには解析を行うにあたって、 $\beta$  平衡と電気的中性の条件を含む項を追加する必要がある。

### 6.1 $\beta$ 平衡と電気的中性

$\beta$  平衡は陽子、中性子、電子、ニュートリノ間の化学平衡を表す関係で、模式的には

$$p + e \leftrightarrow n + \nu, \quad (6.1)$$



もしくは、

$$p + e + \bar{\nu} \leftrightarrow n, \quad (6.2)$$

と書ける。しかしながらコンパクト星が構成されるに至る段階では超新星爆発を経て既にニュートリノは抜けてしまっている、コンパクト星の内部においては

$$p + e \leftrightarrow n, \quad (6.3)$$

となる。これをクォークの振る舞いを記述する有効模型に落とし込むには、陽子が (u,u,d) の、中性子が (u,d,d) のクォークの組み合わせで構成される事に注目して、フレーバー毎のクォークの化学ポテンシャル  $\mu_f$  と電子の化学ポテンシャル  $\mu_e$  を用いて

$$\begin{aligned} \mu_u + \mu_u + \mu_d + \mu_e &= \mu_u + \mu_d + \mu_d \\ \mu_u + \mu_e &= \mu_d, \end{aligned} \quad (6.4)$$

の関係を満たせば良いことがわかる。ストレンジクォークに関しては電氣的にはダウングクォークと等価であるので  $\mu_s = \mu_d$  と取る。

本論文では一貫して“コンパクト星”について言及しているが、親戚の天体である中性子星についても言及しておく。中性子星はその名の通り中性子（と  $\beta$  平衡等を加味して中性子と見なす粒子）のみで構成された天体であり、その名の示すとおり、系全体で見ると電氣的に中性になっている必要がある。本論文では内部にクォーク物質を含む核を持つ天体を想定しているため、中性子星ではなくコンパクト星と表記している<sup>\*3</sup>が、考えていることにそれほど違いは無い。内部にクォーク物質を含んでいてもこの電氣的性質は同様である。

具体的にどのようにすればこの条件を課することができるのだろうか。電子の電荷を  $-e$  としたとき、アップクォークは  $+2/3e$  の電荷を、ダウングクォークとストレンジクォークは  $-1/3e$  の電荷を持つため、電氣的中性の条件は粒子密度  $\rho_f$  や  $\rho_e$  を用いて

$$\frac{2}{3}\rho_u - \frac{1}{3}\rho_d - \frac{1}{3}\rho_s - \rho_e = 0, \quad (6.5)$$

と書き表せる。ギャップ方程式を解いてポテンシャルの最小値を探す際にこの制約条件を課せば、電氣的に中性な解を得ることができる。

---

<sup>\*3</sup> クォーク物質とハドロン物質のハイブリッドによって構成される天体を考えるため、後の章ではハイブリッド星とも表記する。

## 6.2 有効模型

実際に用いる模型は (4.1) 式のラグランジアンに項を追加して以下のように得られる。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - \vec{m}_0)\psi + \frac{G_s}{2} \sum_{a=0}^8 [(\bar{\psi}\lambda_a\psi)^2 + (\bar{\psi}i\lambda_a\gamma_5\psi)^2] \\
& - \frac{1}{2} \frac{G_T}{4} \sum_{a=0}^8 [(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^\nu\lambda_a\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\lambda_a\psi)^2] \\
& + \mu_q\psi^\dagger\psi \\
& + \bar{\psi}_e i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_e \\
& + \lambda \left( \psi_e^\dagger\psi_e - \frac{2}{3}\psi_u^\dagger\psi_u + \frac{1}{3}\psi_d^\dagger\psi_d + \frac{1}{3}\psi_s^\dagger\psi_s \right) \\
& + G_D [\det\bar{\psi}(1 - \gamma_5)\psi + \det\bar{\psi}(1 + \gamma_5)\psi]
\end{aligned} \tag{6.6}$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_T + \mathcal{L}_\rho + \mathcal{L}_e + \mathcal{L}_{\rho_e} + \mathcal{L}_D . \tag{6.7}$$

(4.1) 式と比べると、以下の項が追加されているのが主な違いである。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_e &= \bar{\psi}_e i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_e \\
\mathcal{L}_{\rho_e} &= \lambda \left( \psi_e^\dagger\psi_e - \frac{2}{3}u_u^\dagger u + \frac{1}{3}d^\dagger d + \frac{1}{3}s^\dagger s \right) ,
\end{aligned} \tag{6.8}$$

ここで  $\psi_e$  は電子の場を表しており、 $\mathcal{L}_e$  は電子の運動項を、 $\mathcal{L}_{\rho_e}$  は電気的中性の条件をそれぞれ意味している。括弧の中の  $\psi^\dagger\psi$  を粒子密度  $\rho$  と見ればまさしく (6.5) 式と同じ形をしている。係数の  $\lambda$  は、この段階ではただの未定係数である。

このラグランジアンに対して平均場近似を施すと、以下のようなラグランジアンが得られる。

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{MF} = & \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - \vec{M} - \vec{F}\Sigma_3 + \vec{\mu}\gamma^0)\psi \\
& - \sum_f \frac{\mathcal{M}_f^2}{4G_s} - \frac{F_3^2}{G_T} - \frac{F_8^2}{G_T} + \frac{1}{2} \frac{G_D}{G_s^3} \mathcal{M}_u \mathcal{M}_d \mathcal{M}_s \\
& + \bar{\psi}_e (i\gamma^\mu\partial_\mu + \lambda\gamma^0) \psi_e ,
\end{aligned} \tag{6.9}$$

当然ではあるがこのラグランジアンは (4.6) 式とほぼ同じ形をしている。異なるのは 1 行目の化学ポテンシャル  $\mu$  が  $\vec{\mu}$  に変わっている点と 3 行目に電子に関する項が追加されていることだけである。ここで新たに導入した  $\vec{\mu}$  というのは、具体的には以下の形をした行列である。

$$\begin{aligned}
\vec{\mu} &= \text{diag.} (\mu_u, \mu_d, \mu_s) \\
&= \text{diag.} \left( \mu_q - \frac{2}{3}\lambda, \mu_q + \frac{1}{3}\lambda, \mu_q + \frac{1}{3}\lambda \right) .
\end{aligned} \tag{6.10}$$

$\mu_f$  が各フレーバーの化学ポテンシャルに対応しており、 $\mathcal{L}_{\rho_e}$  の項の効果により、フレーバー毎に化学ポテンシャルが未定係数  $\lambda$  の分だけズレるという結果になっている。未定係数  $\lambda$  を決定するには、 $\beta$  平衡の条件

(6.4) 式に (6.10) 式のフレーバー毎の化学ポテンシャルを代入すればよい。すると、

$$\begin{aligned}\mu_u + \mu_e &= \mu_d \\ \mu_q - \frac{2}{3}\lambda + \mu_e &= \mu_q + \frac{1}{3}\lambda \\ \lambda &= \mu_e ,\end{aligned}\tag{6.11}$$

となり、未定係数  $\lambda$  は実は電子の化学ポテンシャル  $\mu_e$  だったことが分かる。これにならって  $\vec{\mu}$  をもう一度あらさまに描き直すと

$$\vec{\mu} = \text{diag.} \left( \mu_q - \frac{2}{3}\mu_e , \mu_q + \frac{1}{3}\mu_e , \mu_q + \frac{1}{3}\mu_e \right) ,\tag{6.12}$$

となる。ニュートリノの寄与を無視できる場合、電気的中性の条件を課すと自動的に  $\beta$  平衡の条件は満たされることになる。実は (6.6) 式の時から、クォークの化学ポテンシャルを  $\mu$  ではなく、 $\mu_q$  と書いているが、これは電気的中性の条件によってクォークの化学ポテンシャルがフレーバー毎に変化する事を見込んで導入した記号である。

例によって例のごとく (6.9) 式のラグランジアンを用いてハミルトニアンを計算すると、

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{MF} &= \bar{\psi} \left( i\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \vec{M} + \vec{F}\Sigma_3 \right) \psi - \vec{\mu}\psi^\dagger\psi \\ &\quad + \sum_f \frac{\mathcal{M}_f^2}{4G_s} + \frac{F_3^2}{G_T} + \frac{F_8^2}{G_T} - \frac{1}{2} \frac{G_D}{G_s^3} \mathcal{M}_u \mathcal{M}_d \mathcal{M}_s \\ &\quad + \bar{\psi}_e (i\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \psi_e - \mu_e \psi_e^\dagger \psi_e \\ &= \psi^\dagger \hat{h}_q \psi - \vec{\mu}\psi^\dagger\psi + \psi_e^\dagger \hat{h}_e \psi_e - \mu_e \psi_e^\dagger \psi_e \\ &\quad + \sum_f \frac{\mathcal{M}_f^2}{4G_s} + \frac{F_3^2}{G_T} + \frac{F_8^2}{G_T} - \frac{1}{2} \frac{G_D}{G_s^3} \mathcal{M}_u \mathcal{M}_d \mathcal{M}_s ,\end{aligned}\tag{6.13}$$

となる。ここで、 $\hat{h}_q$  はクォークの 1 粒子ハミルトニアンを、 $\hat{h}_e$  は電子の 1 粒子ハミルトニアンを表す。あからさまに書けば

$$\begin{aligned}\hat{h}_q &\equiv \gamma^0 \left( i\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \vec{M} + \vec{F}\Sigma_3 \right) \\ \hat{h}_e &\equiv \gamma^0 (i\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla}) ,\end{aligned}\tag{6.14}$$

となる。エネルギー固有値は

$$\begin{aligned}E_f &= \sqrt{p_z^2 + \left( \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + M_f^2} + \eta F_f \right)^2} \quad (f = u, d, s) , \\ E_e &= |\boldsymbol{p}| ,\end{aligned}\tag{6.15}$$

と得られる。ここで、 $\eta = \pm 1$  である。当然ではあるがクォークのエネルギー固有値  $E_f$  は (4.10) 式とまったく同じ形をしている。電子の 1 粒子ハミルトニアンには運動項しか含まれていないので当然ではあるが、電子のエネルギー固有値は電子の運動量となる。

有効ポテンシャルもこれまでと同様に計算すると以下のように得られる。

$$\begin{aligned}\Phi &= \langle \mathcal{H}_{MF} \rangle \\ &= \Phi_u + \Phi_d + \Phi_s + \Phi_e + \Phi_{MF} ,\end{aligned}\tag{6.16}$$

ここで、それぞれの項は

$$\begin{aligned}
\Phi_f &= \sum_{\eta,\alpha} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (E_{f,\eta} - \mu_f) \theta(\mu_f - E_{f,\eta}) - \sum_{\eta,\alpha} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{f,\eta} , \\
\Phi_e &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (E_e - \mu_e) \theta(\mu_e - E_e) \\
&= \frac{2}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} d|\mathbf{p}| \iint d\theta d\phi |\mathbf{p}|^2 \sin\theta (|\mathbf{p}| - \mu_e) \cdot \theta(\mu_e - |\mathbf{p}|) \\
&= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\mu_e} d|\mathbf{p}| (|\mathbf{p}|^3 - \mu_e |\mathbf{p}|^2) \\
&= \frac{1}{\pi^2} \left( \frac{1}{4} \mu_e^4 - \frac{1}{3} \mu_e^4 \right) \\
&= -\frac{\mu_e^4}{12\pi^2} , \\
\Phi_{MF} &= \frac{\mathcal{M}_u^2 + \mathcal{M}_d^2 + \mathcal{M}_s^2}{4G_s} + \frac{F_3^2}{G_T} + \frac{F_8^2}{G_T} - \frac{1}{2} \frac{G_D}{G_s^3} \mathcal{M}_u \mathcal{M}_d \mathcal{M}_s , \tag{6.17}
\end{aligned}$$

のように対応している。

フレーバー毎のクォーク数密度  $\rho_f$  は有効ポテンシャル  $\Phi_f$  を化学ポテンシャル  $\mu_f$  で微分することによって得られる。

$$\rho_f = -\frac{\partial \Phi_f}{\partial \mu_f} = -\frac{\partial \Phi_f}{\partial \mu_q} . \tag{6.18}$$

また、全クォーク数密度  $\rho_{\text{tot}}$  も以下のように定義しておく。

$$\rho_{\text{tot}} = \rho_u + \rho_d + \rho_s . \tag{6.19}$$

電子の数密度も同様にして

$$\rho_e = -\frac{\partial \Phi_e}{\partial \mu_e} = \frac{\mu_e^3}{3\pi^2} . \tag{6.20}$$

と得られる。これまでの計算と違い、有効ポテンシャルの最小値を探す際に (6.5) 式の条件を課して計算を行う必要がある。

また、コンパクト星の内部構造の推定を行うには、系の圧力  $P$  とエネルギー密度  $\epsilon$  を計算しておく必要がある。これらは有効ポテンシャルを用いて以下のように書き下せる。

$$\begin{aligned}
P &= -(\Phi - \Phi_{(\mu_q=0)}) , \\
\epsilon &= -P + \mu_q \rho_{\text{tot}} . \tag{6.21}
\end{aligned}$$

ここで、圧力  $P$  はクォークの化学ポテンシャル  $\mu_q = 0$  の時の値で規格化しておいた。こうしておくと  $\mu_q = 0$  のとき  $P = 0$  となる。

## 7 数値解析

ここでは6章で見てきた、電気的中性と  $\beta$  平衡の条件下でのテンソル型相互作用を追加した NJL 模型を用いた数値解析の結果を記述する。パラメータとして表6のようなセットを採用する。 $G_T = 0$  のケースについて

ては 2.2 章で既に見ているが、電気的中性や  $\beta$  平衡の条件によって振るまいが変化する可能性もあるため再び考察する。

結合定数  $G_T$  の値は本来ならばパイオンや  $\rho$  メソンの性質から見積もられる<sup>30</sup> はずだが、ここではこれまでと同様にフリーパラメータとして扱う。4.3 章でも述べたように、テンソル型相互作用がフィールツ変換から得られるとした場合、その値は  $G_T = 2G_S$  程度となるはずであるため、 $G_T$  の大きさはその値を基準に決定した。

## 7.1 クォーク質量の振るまい

図 35 はモデル GT0 の時（すなわちテンソル型相互作用が含まれていない場合）のクォーク質量  $M_q$  と  $M_s$  の振るまいをプロットした図である。モデルのパラメータ自体は図 3 と同じ物を採用しているが、微妙に振るまいが異なるため詳しく見ていく。 $\mu_q \leq 0.34$  GeV の領域では、カイラル対称性の自発的破れによりクォークは大質量を獲得しており、その値は、 $M_q = 0.335$  GeV と  $M_s = 0.527$  GeV である。 $\mu_q \approx 0.34$  GeV の点で軽いクォークの質量  $M_q$  が大きく減少し、それに釣られてストレンジクォークの質量  $M_s$  も小さく減少する。これは今まで見てきたようにフレーバー混合の効果の現れである。 $\mu_q \approx 0.44$  GeV の点でストレンジクォークの質量がわずかに増加する。これは 2.2 章では見られなかった振る舞いで、電気的中性と  $\beta$  平衡の条

表 6 電気的中性条件の下でのテンソル型相互作用を追加した NJL 模型のパラメータ

	$m_u, m_d$ [GeV]	$m_s$ [GeV]	$G_s$ [GeV <sup>-2</sup> ]	$G_T$ [GeV <sup>-2</sup> ]	$G_D$ [GeV <sup>-5</sup> ]	$\Lambda$ [GeV]
GT0	0.0055	0.1375	$3.666/\Lambda^2 (\approx 9.2)$	0	$9.288/\Lambda^5$	0.6314
GT2.0	0.0055	0.1375	$3.666/\Lambda^2$	$2G_s$	$9.288/\Lambda^5$	0.6314
GT2.2	0.0055	0.1375	$3.666/\Lambda^2$	$2.2G_s$	$9.288/\Lambda^5$	0.6314
GT2.4	0.0055	0.1375	$3.666/\Lambda^2$	$2.4G_s$	$9.288/\Lambda^5$	0.6314
GT2.6	0.0055	0.1375	$3.666/\Lambda^2$	$2.6G_s$	$9.288/\Lambda^5$	0.6314

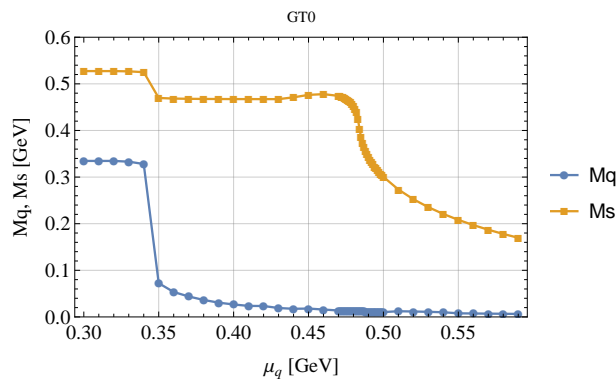


図 35 モデル GT0 のときのクォーク質量  $M_q$  (下側) と  $M_s$  (上側) を化学ポテンシャル  $\mu_q$  の関数としてプロットした図。

件によって生じる結果だと考えられる。この辺りの領域で電子の化学ポテンシャルがピークを迎えることが関係しているようだ。この電子の化学ポテンシャルの振る舞いは 7.3 章で図示している。その後、 $\mu_q \geq 0.47$  GeV あたりから図 3 と同様にストレンジクォークの質量は単調に減少し始める。

図 36 は GT2.0、GT2.2、GT2.4、GT2.6 それぞれのモデルでのクォーク質量  $M_q$  と  $M_s$  をプロットした図である。いずれのモデルにおいても、クォーク化学ポテンシャル  $\mu_q$  の値が小さい領域ではモデル GT0 と同じ振る舞いを示している。モデル GT2.0/GT2.2/GT2.4 の場合は、 $\mu \approx 0.488/0.475/0.460$  GeV  $\equiv \mu_{cr_1}$  の点でストレンジクォークの質量が離散的に減少する。ただし、モデル GT2 の時はこの落ち幅は小さくとどまっている。モデル GT2.6 も同様に  $\mu \approx 0.446$  GeV  $\equiv \mu_{cr_1'}$  の点で質量が大きく減少する。

このようなストレンジクォークの質量の振る舞いの変化は、 $\mu = \mu_{cr_1}$  と  $\mu = \mu_{cr_1'}$  の点でテンソル凝縮が出現することに起因している。GT2.0、GT2.2、GT2.4 の三つのモデルにおいて、 $\mu = \mu_{cr_1}$  の点を境にテンソル凝縮は  $F_8$  のみが発生するようになるが、モデル GT2.6 の場合は  $\mu = \mu_{cr_1'}$  の点を境界に  $F_3$  と  $F_8$  の両方のテンソル凝縮が発生するようになる。これは、モデル GT2.6 とそれ以外でテンソル凝縮が定性的に異なる振る舞いを示すことを表している。このテンソル凝縮の振る舞いについては 7.2 章で詳しく見る。

## 7.2 テンソル凝縮の振るまい

図 37 はテンソル凝縮  $F_3$  と  $F_8$  をクォーク化学ポテンシャル  $\mu_q$  の関数としてプロットした図である。モデル GT2.0/GT2.2/GT2.4 の場合、 $\mu_q = \mu_{cr_1}$  を境に急に  $F_8$  が出現する。また、 $\mu_q \approx 0.54/0.52/0.51 \equiv \mu_{cr_2}$  GeV を境に緩やかに  $F_3$  が出現する。 $\mu_q \geq \mu_{cr_2}$  の領域で、 $F_3$  と  $F_8$  が共存している。

一方で、モデル GT2.6 の場合、 $\mu_q = \mu_{cr_1'}$  からテンソル凝縮  $F_3$  と  $F_8$  の両方が出現する。その後、

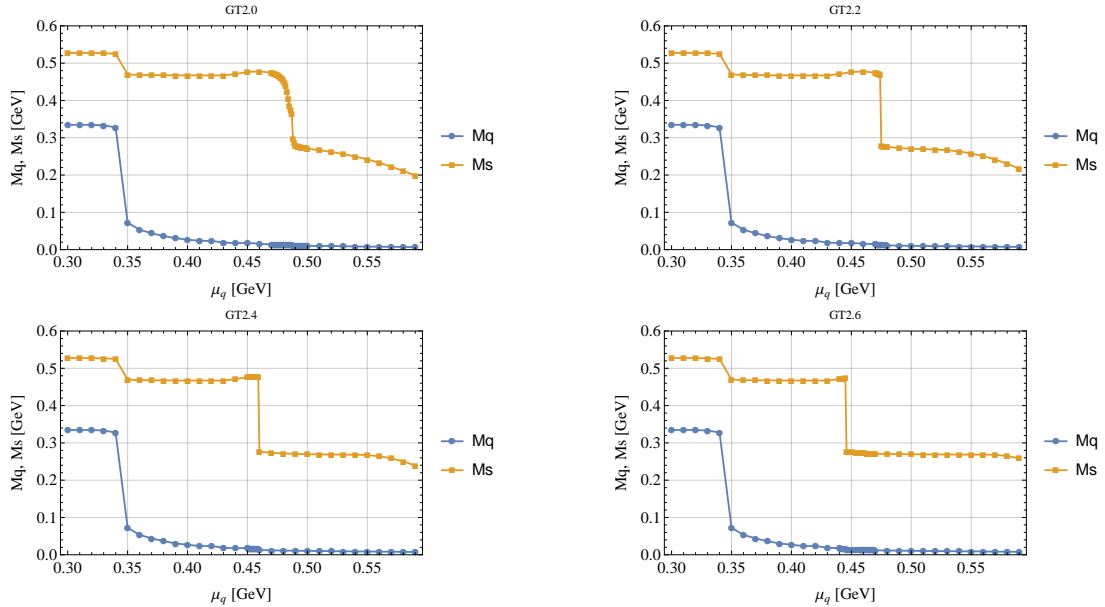


図 36  $G_T \neq 0$  となるモデルでのクォーク質量、 $M_q$  (下側) と  $M_s$  (上側) をクォーク化学ポテンシャル  $\mu_q$  の関数としてプロットした図。

$\mu_{cr_1'} \leq \mu_q \leq 0.469 \text{ GeV} (\equiv \mu_{cr_2'})$  の領域で  $F_3$  は単調に減少していき、 $\mu_q = \mu_{cr_2'}$  の点で完全に  $F_3$  は消滅した後、再び増大しはじめる。 $\mu_q \geq \mu_{cr_2'}$  の領域では  $F_3$  も  $F_8$  も他のモデルの  $\mu_q \geq \mu_{cr_2}$  の領域と同じ振る舞いを示す。

図 38 ではフレーバー毎のテンソル凝縮  $F_u, F_d, F_s$  をプロットしている。なお、4.3 章と同様に、 $F_s$  については恒等的に負の値を取るなので絶対値をプロットしている。モデル GT2.0/GT2.2/GT2.4 の場合、 $\mu_{cr_1} \leq \mu_q \leq \mu_{cr_2}$  の領域においてテンソル凝縮は  $F_8$  のみが出現する。そのため、 $F_u$  と  $F_d$  は同じ値を取っている。 $\mu_q = \mu_{cr_2}$  の点で  $F_3$  が出現してからは、 $\mu_q$  の増大に従って  $F_u$  と  $F_d$  は異なる値を取るようになっていく。

モデル GT2.6 の場合は  $\mu_q \approx \mu_{cr_1'}$  の点で  $F_u$  は有限の値を取っているが、この点では  $F_d$  は現れておらず、 $F_d = 0$  となっている。その後、 $\mu_{cr_1} \leq \mu_q \leq \mu_{cr_2}$  の領域で、 $F_3$  が減少するのに従って  $F_u/F_d$  の値は減少/増加 していく。その後、 $\mu \approx \mu_{cr_2'}$  の点で  $F_3 = 0$  となることにより、 $F_u$  の値と  $F_d$  の値は等しくなる。 $\mu_q \geq \mu_{cr_2'}$  の領域では他のモデルと同じ振る舞いを示す。

### 7.3 クォーク数密度 $\rho$ と電子の化学ポテンシャル $\mu_e$ の振るまい

図 39 は系のバリオン数密度  $\rho_B = (\rho_u + \rho_d + \rho_s)/3$  をそれぞれのモデルについてプロットした図で、横軸はクォーク化学ポテンシャル、縦軸はバリオン数密度を表している。いずれのモデルにおいても、 $\mu_q \approx 0.34 \text{ GeV}$  でバリオン数密度  $\rho_B$  が出現する。これは、この点で軽いクォークのカイラル対称性が回復していることに対応している。

モデル GT0 の場合、バリオン数密度は  $\mu_q \approx 0.47 \text{ GeV}$  の点で再び増加する。この点はストレンジクォークの質量が減少し始める点に対応している。 $G_T$  が増大するに従って、より低い化学ポテンシャルでバリオン

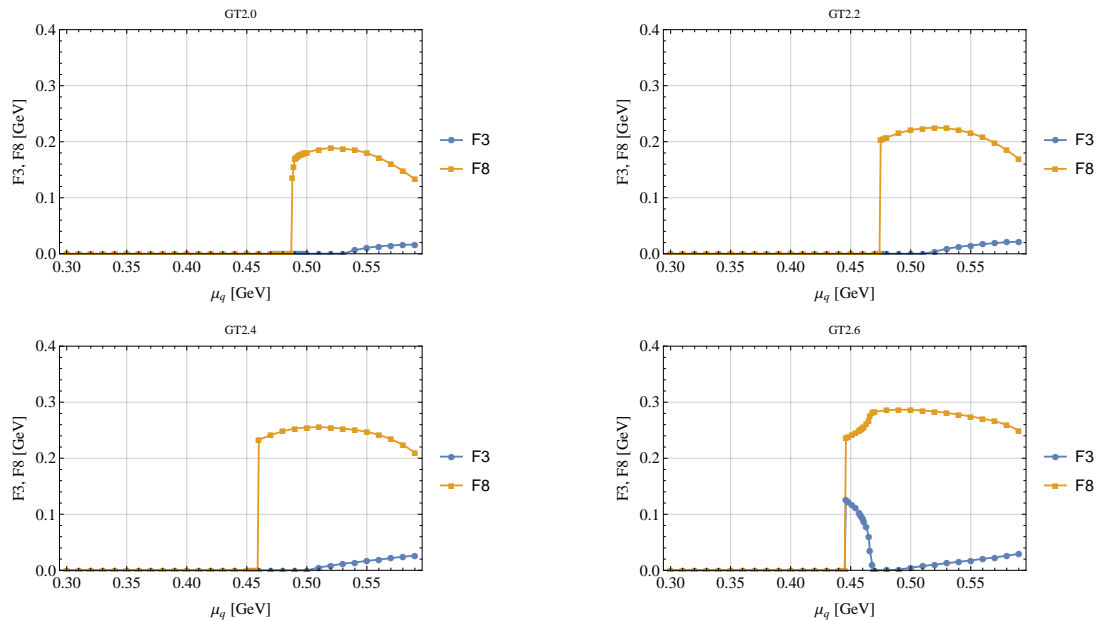


図 37 それぞれのモデルでのテンソル凝縮  $F_3$  と  $F_8$  をクォーク化学ポテンシャル  $\mu_q$  の関数としてプロットした図。

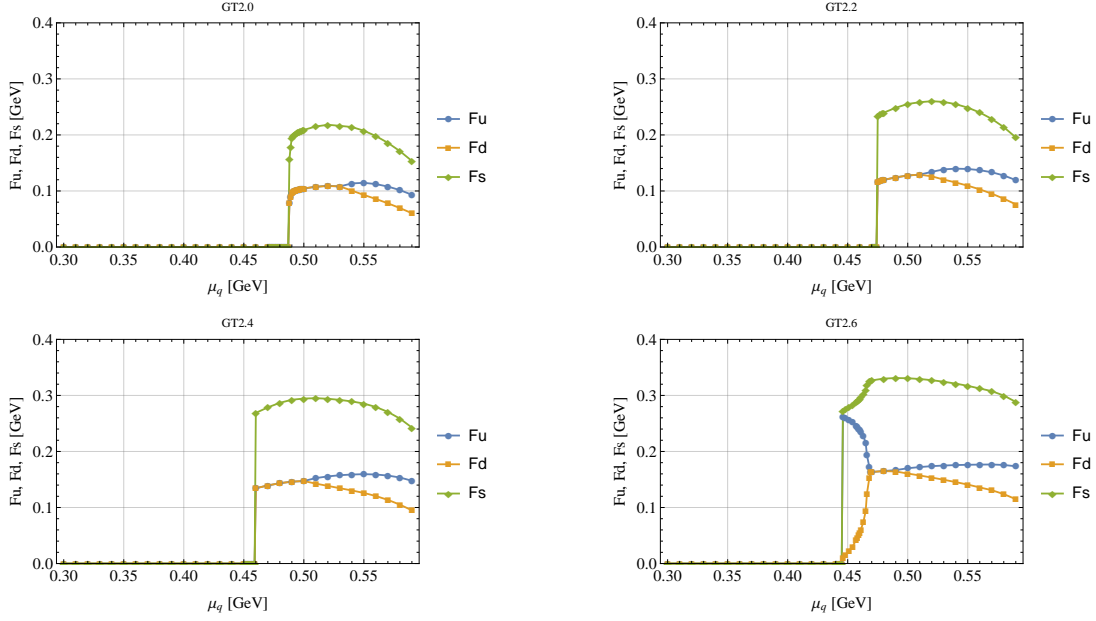


図 38 それぞれのモデルでのフレーバー毎のテンソル凝縮  $F_u, F_d, F_s$  をクォーク化学ポテンシャル  $\mu_q$  の関数としてプロットした図。

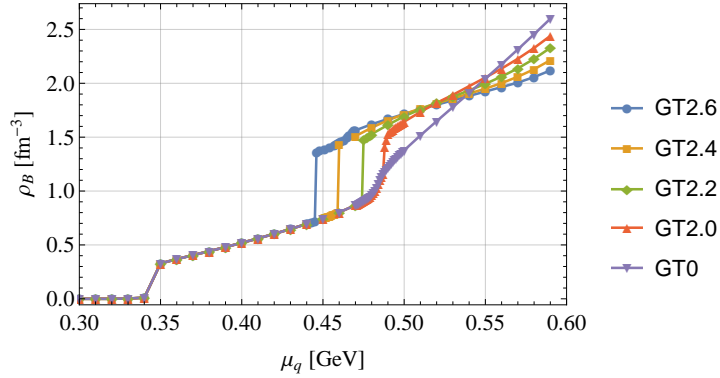


図 39 それぞれのモデルでのバリオン数密度をクォーク化学ポテンシャル  $\mu_q$  の関数としてプロットした図。

数密度が 2 度目のジャンプを経験するようにシフトしていつている。 $G_T \neq 0$  のモデルでのこの 2 度目のジャンプは、図 36 から分かるように、 $\mu_q = \mu_{cr1}$  や  $\mu_q = \mu_{cr1'}$  の点に相当している。また、バリオン数密度の傾きは  $G_T$  が増大するに従って緩やかになっていつている。

図 40、図 41、図 42 は全クォーク数密度  $\rho_{\text{tot}} = \rho_u + \rho_d + \rho_s$  中のそれぞれのフレーバーのクォークの占める割合  $\rho_f/\rho_{\text{tot}}$  を表した図である。図 40 によると、アップクォークの存在比率はおおよそ  $\rho_u/\rho_{\text{tot}} \sim 0.334 \approx 1/3$  となる。また、アップクォークの存在比率は  $G_T$  の値によらずほぼ一定であることも読み取れる。

図 41 と図 42 を見比べると、ダウンクォークの存在比率はストレンジクォークの出現とともに減少することが読み取れる。 $G_T$  の値が大きくなるにしたがって、 $4 \text{ fm}^{-3} \leq \rho_{\text{tot}} \leq 5.5 \text{ fm}^{-3}$  の領域ではダウン/ストレンジクォークの存在比率が減少/増加するが、より高密度の領域ではダウン/ストレンジクォークの存在比



率は増加/減少する。この振る舞いはテンソル型相互作用によって引き起こされたテンソル凝縮の振る舞いに起因している。

図 43 は電子の化学ポテンシャルの振る舞いを示した図である。横軸はクォークの、縦軸は電子の化学ポテンシャルをそれぞれ表している。 $\mu_q$  の小さい領域において、 $\mu_e$  が有限の値を取っている。一方で、(6.5) 式によるとクォーク数密度が 0 のとき、 $\mu_e$  は恒等的に 0 になるはずである。そのため、化学ポテンシャルの小さい  $\mu_q < 0.35$  GeV の領域で  $\mu_e$  が出現しているのは数値誤差だと考えられる。9 章でコンパクト星の構成を行う際はこのような低密度の領域にはハドロン模型の状態方程式を適用するため、この誤差は問題にならない。

まず、モデル GT0 の時の振るまいを見てみる。電子の化学ポテンシャル  $\mu_e$  は  $\mu_q \approx 0.35$  GeV の時に跳ねた後、 $0.35 \text{ GeV} \leq \mu_q \leq 0.46 \text{ GeV}$  の領域で  $\mu_e$  は増大していく。これはアップクォークやダウンクォークで構成された物質が出現する事に起因している。 $\mu_q \approx 0.46 \text{ GeV}$  の点で、 $\mu_e$  は最大値  $\mu_e \approx 0.99 \text{ GeV}$  を取る。このピークを超えた後は  $\mu_e$  は減少していく。GT0 のモデルの場合は単調に減少していくが、他のモデルの場合は振るまいが異なるので詳しく見ていく。

モデル GT2.0/GT2.2/GT2.4 の場合、 $\mu_q \leq \mu_{cr1}$  の範囲では  $\mu_e$  はモデル GT0 の場合と同じ振るまいを示すが、 $\mu_q \approx \mu_{cr1}$  の点を境界に振るまいが変化する。 $\mu_{cr1} \leq \mu_q \leq 0.55/0.55/0.56 \text{ GeV}$  の領域で、 $\mu_e$  はクォーク化学ポテンシャルの増加に伴って再び増大する。この 2 度目の増大は  $\mu_q = 0.55/0.55/0.56 \text{ GeV}$  でピークを迎え、 $\mu_q \geq 0.55/0.55/0.56 \text{ GeV}$  の領域では  $\mu_e$  は再び減少に転じる。

モデル GT2.6 の場合は他のモデルとは異なる振るまいを示す。このモデルの場合、 $\mu_e$  は  $\mu_q \approx 0.445 \text{ GeV} (= \mu_{cr1'})$  の点でピークを迎える。この点を境に  $\mu_e$  は急落するが、他のモデルとは異なって落ちきらず、 $\mu_e \approx 0.05$

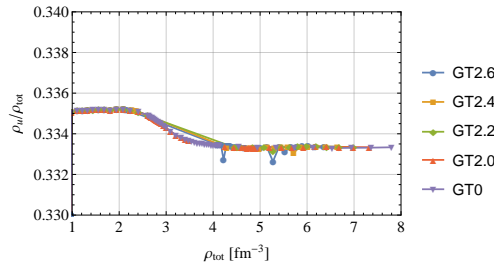


図 40 アップクォーク数密度の存在比率  $\rho_u/\rho_{tot}$  を全クォーク数密度  $\rho_{tot}$  の関数としてプロットした図。

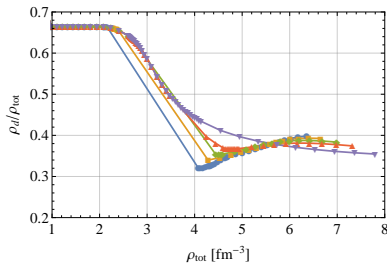


図 41 ダウンクォーク数密度の存在比率  $\rho_d/\rho_{tot}$  を全クォーク数密度  $\rho_{tot}$  の関数としてプロットした図。

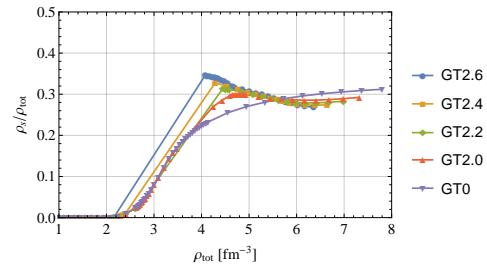


図 42 ストレンジクォーク数密度の存在比率  $\rho_s/\rho_{tot}$  を全クォーク数密度  $\rho_{tot}$  の関数としてプロットした図。

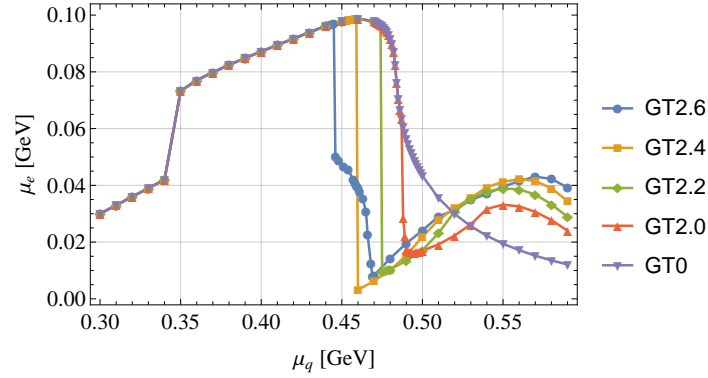


図 43 それぞれのモデルについて電子の化学ポテンシャル  $\mu_e$  をクォークの化学ポテンシャル  $\mu_q$  の関数としてプロットした図

GeV 程度の値で一時留まる。その後、 $\mu_{cr1'} \leq \mu_q \leq \mu_{cr2'}$  の領域で、電子の化学ポテンシャル  $\mu_e$  は連続的に減少する。 $\mu_q \approx \mu_{cr2'}$  の点で  $\mu_e$  は再び増加に転じ、 $\mu_q \approx 0.57$  GeV でピークを迎える。

## 8 電気的中性を考慮した解析のまとめ

この章では次の章のコンパクト星の内部構造の計算を睨んで電気的中性の条件を考慮し、テンソル型相互作用を追加した 3 フレーバー NJL 模型を用いて QCD 相図の零温度有限密度領域に出現するテンソル凝縮や電子の化学ポテンシャルの振る舞いなどについて解析を行ってきた。コンパクト星の内部構造に進む前にここで得られた結果についてまとめておく。

電気的中性を考慮していない場合のテンソル凝縮相についての計算は 4 章で行ったが、電気的中性の効果によって、そこでの結果と異なる結果が得られた。クォーク質量に関しては 7.1 章で見たように、 $\mu_q \approx 0.44$  GeV 辺りの領域でストレンジクォークの質量がわずかに増加する程度しか目立った違いは見られなかったが、テンソル凝縮相に関しては定性的に異なる振る舞いが示された。

7.2 章で得られた結果によると、テンソル凝縮相はモデル GT2.6 の場合を除いて、

1.  $F_8$  のみが出現する。
2.  $F_3$  と  $F_8$  が両方出現する。 $F_3$  は増加していく。

といった振る舞いを示した。これは、4 章で見た電気的中性が無い場合の計算において  $F_3$  のみが出現した後、 $F_8$  のみが出現する傾向が見られた事とは対照的である。また、モデル GT2.6 の場合、テンソル凝縮はさらに複雑な振る舞いを示した。これらの振る舞いの変化には当然ではあるが電気的中性の条件が影響を与えていると考えるのが妥当であろう。4.4 章でも言及したが、クォーク質量は軽いアップ、ダウンクォークと少し重いストレンジクォークを区別する形で導入している一方で、電気的中性の条件は  $+2/3e$  の電荷を持つアップクォークと  $-1/3e$  の電荷を持つダウン、ストレンジクォークを区別する働きを持つ。この二つの効果の影響でテンソル凝縮相の振る舞いに変化したと考えられる。

7.3 章でみた電子とクォーク数密度の振る舞いについては

- クォーク数密度が増加するとアップクォークの割合は減少する。
- テンソル型相互作用の結合定数  $G_T$  が大きくなってもアップクォークの比率は変化しない。
- 電子の化学ポテンシャルは軽いクォークのみが出現している状態では増加するが、ストレンジクォークが出現すると減少に転じる。
- テンソル凝縮が出現すると同時にストレンジクォークが出現する。

などの特徴が見られた。考慮している 4 種類の粒子 (クォーク 3 種類と電子) のうち、正の電荷を持っているのはアップクォークのみであるため、直感的には粒子密度が増えることによって負に偏った電荷を中性に戻すために、アップクォークを増やして釣り合いを取らないと行けないようにも思えるが、実際にはストレンジクォークが出現して電荷が負に偏った分を電子が減少する事によって釣り合いを保っているようである。また、テンソル凝縮の出現はストレンジクォークと、同じく負の電荷を持つダウンクォークの割合に影響を及ぼすが、正の電荷を持つアップクォークの割合には影響を及ぼさないようである。

先行研究によってテンソル型相互作用を追加した 2 フレーバーの NJL 模型で同様の計算<sup>28</sup>が行われている。その結果は本研究での計算よりも直感的でシンプルな、以下のような結果を見て取れる。

- テンソル凝縮が出現すると電子が増加する。
- 電子が増えるとアップクォークの比率が増加してダウンクォークの比率が減少する。

本研究では 3 フレーバーで計算を行っているため、ストレンジクォークの出現によって、このような振る舞いは見えなくなっている。これは 2 フレーバーと 3 フレーバーの定性的な違いの一つと考えられる。

## 9 ハイブリッド星の構成

この章ではこれまで得られたデータを用いてハイブリッド星の構成を行う。ここで、“ハイブリッド星”はコンパクト星の中でも、クォーク物質で構成される内核とハドロン物質で構成される外核と殻によって構成される天体のことを指す。クォーク物質の状態方程式 (Equation of State) を得るためには NJL 模型を用いるが、ハドロン物質の状態方程式に関しては、DD-ME2 モデルのパラメータを採用する。<sup>31</sup> これは密度に依存したメソン交換を記述する相互作用項 “Density Dependent Meson-Exchange effective interaction” を持つモデルである。

天体の核の中でクォーク物質が存在し、高密度領域にテンソル凝縮が出現していると仮定する。クォーク物質の状態方程式、特に圧力とエネルギーの関係は (6.21) 式の関係を用いて得ることができる。Tolman-Oppenheimer-Volkoff equation (TOV 方程式) を状態方程式のデータを用いて、星の中心から外側に向かって解いていく必要がある。

$$\begin{aligned}\frac{dM}{dr} &= 4\pi r^2 \rho, \\ \frac{dP}{dr} &= -\frac{GM\rho}{r^2} \frac{\left(1 + \frac{P}{\rho c^2}\right) \left(1 + \frac{4\pi P r^3}{Mc^2}\right)}{\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)},\end{aligned}\tag{9.1}$$

式中の  $P$  は圧力を、 $M$  は天体の質量を、 $\rho$  は“質量”密度をそれぞれ表現する。実際の計算の手続きとしては

先行研究<sup>28</sup>と同様に行う。具体的には以下のような手続きに従う。

1. ハイブリッド星の中心エネルギー密度に任意の値を設定する
2. ステップ1で設定したエネルギーの値がクォーク物質が出現するエネルギーの値より大きければステップ3へ、そうでなければステップ5へ進む。
3. クォーク物質の状態方程式を用いて TOV 方程式を中心から外側に向かって解いていく。
4. クォーク物質の圧力がハドロン物質に切り替わる値にまで到達したらハドロン物質の状態方程式に切り替える。
5. ハドロン物質の状態方程式を用いて、星の圧力が消滅するまで TOV 方程式を中心から外側に向かって解いていく。
6. 中心エネルギー密度の値を変化させてステップ2へ戻る

## 9.1 ハイブリッド星の質量と半径の関係

この章ではこれまでの計算結果を用いて得られたハイブリッド星の半径と質量の関係について議論する。

図 44 はハイブリッド星の半径  $R$  と質量  $M$  の関係を表している。この図において、半径  $R$  は  $R_0 = 10$  km で、質量  $M$  は太陽質量  $M_\odot$  でそれぞれ規格化されている。図中の各点はそれぞれ異なる中心エネルギー密度の点を表している。

この図はモデル毎に多少の差異はあれど全体的に Z だとか乙の字のような蛇行した形をしている。一番右下の点が最も小さい中心エネルギーに対応している。中心のエネルギー密度が増加するに従って点は移動していくが、その動きは大まかに分けて、

1. 左に進む
2. 右上に進む
3. 左に進む
4. 左下に進む

といった四つのパートに分けられている。

最初の二つのステップ、図で言う  $\angle$  のような形の部分は核がハドロンのみで構成された天体に、後の二つのステップ、図で言う “へ” の字のような形の部分は核にクォーク物質が含まれる天体に相当する。クォーク物質が出現する境界、すなわち、二つ目のステップと三つ目のステップの境界の点（右上の点）は全てのモデルにおいて等しく  $(R/R_0, M/M_\odot) \approx (1.29, 1.82)$  である。三つ目のステップは中心核にアップクォークとダウンクォークのクォーク物質を含む天体を、四つ目のステップは中心核にアップ、ダウン、ストレンジ、それぞれのクォーク物質を含む天体を示している。三つ目のステップから四つ目のステップへ移行する境界はモデルによって異なっており、 $G_T$  の値が大きくなるにつれてこの点は右側へ移動している。この点はストレンジクォークの出現に対応しているが、このモデルによる境界の変化はテンソル型相互作用が強くなるにしたがってテンソル凝縮が低密度領域で出現するようになり、ストレンジクォークがより低い中心密度でも出現するようになることに起因している。7 章での解析結果では、モデル GT2.6 とそれ以外のモデル (GT2.0 と GT2.2

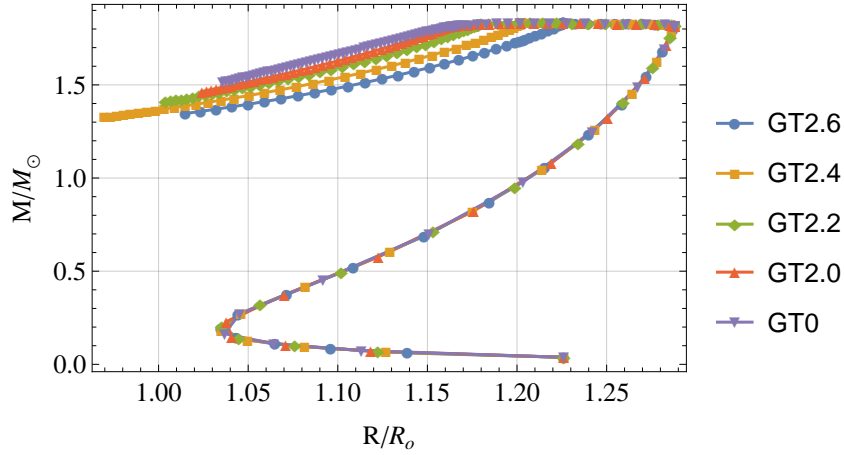


図 44 ハイブリッド星の質量と半径の関係をプロットした図。質量  $M$  は太陽質量  $M_{\odot}$  で、半径  $R$  は  $R_0 = 10 \text{ km}$  で規格化されている。横軸は半径を縦軸は質量を表している。

と GT2.4) ではテンソル凝縮の振る舞いが定性的に異なっていたが、図 44 ではモデル GT2.6 とそれ以外のモデルの間に定性的な違いは見られない。いずれのモデルにおいてもテンソル凝縮が出現するとストレンジクォークの出現を通して、状態方程式は柔らかくなるようである。

## 10 全体のまとめ

本研究では 3 フレーバーの NJL 模型に、擬ベクトル型、テンソル型の相互作用をそれぞれ追加し、相互作用によって引き起こされるクォーク物質の凝縮相に注目して解析を行った。特にテンソル型相互作用を追加した模型においては、電気的中性や  $\beta$  平衡の条件を課して、状態方程式を求めて TOV 方程式を解き、コンパクト星の内部構造の推定を行った。

先行研究において、テンソル型相互作用を追加した 2 フレーバーの NJL 模型を用いてコンパクト星の内部構造の推定を行う研究が行われている<sup>28</sup>。その研究では、テンソル型相互作用の結合定数を強くと、同一系列の天体中に同じ質量で大きく異なる半径を持つ安定した天体、ツインスター<sup>32,33</sup>の出現を示唆する関係が得られる事が示されている。これは、結合定数の値が大きくなるとテンソル凝縮がより低い化学ポテンシャルで出現するようになることに起因している。このときの質量-半径の関係は中心密度が比較的低い段階で天体の核にクォーク物質が出現するようになり、一度質量が減少するもさらに密度を上げると質量が再び増加していくような振る舞いを見せる。今回の研究ではテンソル型相互作用の値を最も強くしたモデル GT2.6 においてもツインスターが出現する兆候は見られなかった。モデル GT2.6 での計算の結果を見ると分かるように、3 フレーバーの NJL 模型では結合定数を強くと凝縮相の振るまいが変化し、比較的低密度の領域からテンソル凝縮  $F_3$  と  $F_8$  が出現する新たなテンソル凝縮相が出現するため、より強い結合定数での計算は困難となる。

本研究では NJL 模型に追加する相互作用として高密度領域での凝縮相の振る舞いに影響を与えると期待されるテンソル型相互作用を採用したが、比較的低密度のハドロン物質とクォーク物質の境界の領域での振る舞

いに影響を与える擬ベクトル型相互作用を採用するとどのような結果が得られるのかは非常に興味深い問題である。というのも、擬ベクトル凝縮が出現する領域は図 44 でいうところの右上の曲がり角に相当し、コンパクト星の内部構造に大きな影響を与える可能性があるからである。

また、本研究で天体の内部構造を推定するために用いた TOV 方程式は天体の球対称性を仮定している。本研究でターゲットにしたような内部にスピン偏極相を持ちうる天体の場合、その球対称性は担保されない。対称性を崩した天体の構造を見積もる方程式として Hartle 方程式<sup>34,35</sup>が提案されている。この Hartle 方程式を用い、非球対称性を考慮した上で内部にスピン偏極相を持つ天体の構造を計算するのも今後の研究として有意義であろう。

## 謝辞

本研究を進めるに当たり、多くの方々に助けていただきました。この場をお借りしてお礼を申し上げます。理論物理グループの先生方には様々な事柄についてご教示いただきました。特に指導教官の津江保彦教授には研究全般にわたって数々のご指導やご支援をいただきました。学部 1 年の頃から長いつきあいとなる同期の平口君とは研究に関わる事、関わらない事含めて様々な相談や議論をしてきました。一緒に量子力学の教科書を読み込んだ W さんや、大学近くの喫茶店で一緒にカレーを食べた N さんとの会話は付録の一部の項目を執筆するに当たってのヒントになりました。本研究で用いた DD-ME2 模型のデータに関して、ポルトガルの科学技術財団 (Fundação para Ciência e Tecnologia) の研究プロジェクト UID/FIS/04564/2020 よりご支援をいただきました。

お世話になった皆さまへここに重ねて感謝の意を表し、謝辞とさせていただきます。

## 蛇の足

### A 単位換算

本論文では基本的に単位系として自然単位系<sup>\*4</sup>を採用している。これは長さや時間、質量などの人間が決めた物理量を基準の大きさ“1”として考える SI 単位系とは異なり、光速  $c$  やディラック定数  $\hbar$  などの自然界に存在する普遍の物理量を“1”とする単位系である。自然界の尺度に乗っ取った単位系とはいえ、人間には SI 単位系の方が理解しやすいため、自然単位系を用いる際は必要に応じて SI 単位系への変換が必要になる。

数値計算を行うに当たってこのような単位換算は間違えがちなので以下にいくつかの物理量の単位換算の例を備忘録も兼ねて残しておく。

以下は単位換算によく用いた定数である。

- 光速度 :  $c = 2.9979 \times 10^8 [\text{m} \cdot \text{s}^{-1}]$
- ディラック定数 :  $\hbar = 1.0546 \times 10^{-34} [\text{J} \cdot \text{s}] = 6.5822 \times 10^{-25} [\text{GeV} \cdot \text{s}]$
- ボルツマン定数 :  $k_B = 1.3806 \times 10^{-23} [\text{J} \cdot \text{K}^{-1}] = 8.6173 \times 10^{-14} [\text{GeV} \cdot \text{K}^{-1}]$
- $1 \text{ eV} = 1.6022 \times 10^{-19} [\text{J}]$
- $1 \text{ GeV} = 1.6022 \times 10^{-10} [\text{J}]$
- $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{m}$
- $\hbar c = 0.197 [\text{GeV} \cdot \text{fm}] = 197 [\text{MeV} \cdot \text{fm}]$

#### A.1 質量の換算

$E = mc^2$  の関係に注目すると、エネルギーを  $c^2$  で割ることで質量が得られることが分かる。本文中でクォーク質量の単位として用いた  $1 \text{ GeV}$  は

$$\begin{aligned} 1 \text{ GeV} &= 1.6022 \times 10^{-10} [\text{J}] \\ 1 \text{ GeV}/c^2 &= 1.6022 \times 10^{-10} [\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}] / (2.9979 \times 10^8 [\text{m} \cdot \text{s}^{-1}])^2 \\ &= 1.7827 \times 10^{-27} [\text{kg}] , \end{aligned} \tag{A.1}$$

と得られる。2 行目で両辺を  $c^2$  で割っているが、左辺は自然単位系を用いているので  $c^2$  で割ったことになっている。逆の換算もすぐに出来て、

$$1 [\text{kg}] = 5.6094 \times 10^{26} [\text{GeV}] \tag{A.2}$$

と得られる。余談であるが、本論文で計算した真空のクォーク質量は  $M_q = 0.335 \text{ GeV}$  であるため、これらのクォークがバリオンを構成したとすると、この質量は単純に考えれば 3 倍されて  $1.005 \text{ GeV}$  となる。これを

---

<sup>\*4</sup> 教科書の中には神に与えられた単位系 “God given unit” として紹介する物もある。

$kg$  に換算すると

$$1.005[\text{GeV}] = 1.79 \times 10^{-27}[\text{kg}] \quad (\text{A.3})$$

となり、よく知られた陽子の質量  $m_p = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$  と同程度の値になる。

## A.2 時間の換算

上でも書いたようにディラック定数  $\hbar = 6.5822 \times 10^{-25} [\text{GeV} \cdot \text{s}]$  であるが、自然単位系を採用すると  $\hbar = 1$  となるため、

$$1 = 6.5822 \times 10^{-25} [\text{GeV} \cdot \text{s}] \quad (\text{A.4})$$

の関係が成り立つ。よって

$$1 [\text{s}^{-1}] = 6.5822 \times 10^{-25} [\text{GeV}] , \quad (\text{A.5})$$

の関係が得られる。逆も同様にして得られる。

$$\begin{aligned} 1[\text{s}] &= \frac{1}{6.5822 \times 10^{-25} [\text{GeV}]} \\ &= 1.5192 \times 10^{24} [\text{GeV}^{-1}] . \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

## A.3 長さの換算

長さの換算には上でも書いた  $\hbar c = 0.197 [\text{GeV} \cdot \text{fm}]$  の関係が非常に便利である。自然単位系では  $\hbar$  も  $c$  も 1 とするため、それぞれの積である  $\hbar c$  も当然 1 である。よって、

$$\begin{aligned} 1 [\text{GeV}] &= \frac{1 [\text{GeV}]}{(\hbar c)} \\ &= \frac{1}{0.197} [\text{fm}^{-1}] \\ &= 5.0761 [\text{fm}^{-1}] , \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

もしくは、

$$1[\text{fm}] = 0.197[\text{GeV}^{-1}] \quad (\text{A.8})$$

と得られる。

## A.4 温度の換算

本文中では用いなかったが、物理量を直感的に理解する助けになるので温度の換算も行っておく。 $\hbar$  にも  $c$  にも温度に関する情報は含まれていないので、温度を含む “1” としてボルツマン定数  $k_B$  を用いて、

$$\begin{aligned} 1 [\text{GeV}] &= \frac{1 [\text{GeV}]}{k_B} \\ &= \frac{1}{8.6173 \times 10^{-14}} [\text{K}] \\ &= 1.1604 \times 10^{13} [\text{K}] , \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$



もしくは、

$$1 \text{ [eV]} = 11604 \text{ [K]} , \quad (\text{A.10})$$

と得られ、1 電子ボルトは温度に換算するとおよそ 1 万ケルビン ( $\approx 1 \text{ 万 } ^\circ\text{C}$ ) に相当する事が分かる。

## B TOV 方程式について

Tolman-Oppenheimer-Volkoff equation (TOV 方程式) は一言で言えば一般相対論での球対称の静水圧平衡の式であり、それは質量の分布を表す

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho , \quad (\text{B.1})$$

の式と、圧力の釣り合いを表す

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM\rho}{r^2} \frac{\left(1 + \frac{P}{\rho c^2}\right) \left(1 + \frac{4\pi P r^3}{Mc^2}\right)}{\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)} , \quad (\text{B.2})$$

の二つの式から構成される。(B.2) 式は相対論を考慮した表式であるが、その直感的な意味を与えるためにここでは非相対論的な静水圧平衡の式を扱う。このとき、圧力の釣り合いを表す式は

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM\rho}{r^2} , \quad (\text{B.3})$$

のような形をしている。これは (B.2) 式において非相対論的極限  $\frac{1}{c^2} \rightarrow 0$  を取った形である。これらの方程式は図 45 に描いたような天体内部での釣り合いを記述している。

天体内部の質量密度  $\rho$  が分かっているとき、ある半径  $r$  の内側にある質量  $M(r)$  は質量密度を半径について積分して

$$M(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr' , \quad (\text{B.4})$$

と書けるだろう。図中の半径  $r$  と  $r + dr$  の間にある微少な球殻に注目して両辺を微分してやると、(B.1) 式の

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho , \quad (\text{B.5})$$

が得られる。

$p + dp$  がより外側の圧力であるため内側からの圧力  $p$  と外側からの圧力  $p + dp$  の間に  $p - (p + dp) = -dp > 0$  の関係が成立することに気をつけて、微少な球殻に加わる圧力の差を検討する。外向きの力はこれに半径  $r$  の内側の体積をかけて

$$-dp \times 4\pi r^2 , \quad (\text{B.6})$$

となる。一方で、内向きの力は重力によって引き起こされるので、万有引力の法則を考えて

$$\frac{GM}{r^2} \times M(\text{球殻}) = \frac{GM}{r^2} 4\pi r^2 \rho dr , \quad (\text{B.7})$$

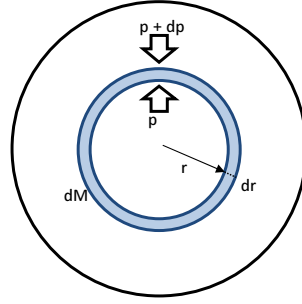


図 45 コンパクト星の圧力の釣り合いのイメージ図

と得られる。この二つの式が釣り合えばよいので、

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{GM\rho}{r^2} \quad (\text{B.8})$$

の関係が成り立つ。こうして (B.3) 式の圧力の釣り合いの式が得られた。

この二つの方程式を三つの変数  $M, p, \rho$  について解けば、星の構造を計算できるようになるはずである。しかしながら方程式二つに変数三つでは解くことが出来ないため、これを解くにはもう一つ方程式を得る必要がある。 $M(r)$  を (B.1) 式より、 $\rho(r)$  によって一意的に求めることができるとすれば、これらの静水圧平衡の式を解くには圧力  $p(r)$  と質量密度  $\rho(r)$  の関係、すなわち

$$\rho = \rho(p) \quad (\text{B.9})$$

の方程式が必要となる。この方程式を状態方程式 (EoS) と呼ぶ。

静水圧平衡の連立方程式は具体的には以下のような手順で解かれる。

1. 状態方程式に従って中心密度  $\rho$  を決定する。
2. 中心  $r = 0$  で  $M(r) = 0$  と置く。
3. (B.1) 式と (B.3) 式の連立微分方程式を  $r = 0$  から外側に向かって解いていく。
4. 圧力  $p$  が 0 になったら計算を終了する。<sup>\*5</sup>
5. その時点での  $r$  と  $M(r)$  の値が星の半径と質量になる。

最初の中心密度を変えながら計算する事で、同じ系列のコンパクト星の構造を計算する事ができる。この章で論じたのは非相対論的な静水圧平衡の式についての内容であるが、TOV 方程式でも考え方は同じである。

次以降で TOV 方程式の導出の概略を記す。

## C シュバルツシルト解導出の概略

TOV 方程式の導出を行う前に、アインシュタインの重力場の方程式を球対称な重力場について解いておく。

<sup>\*5</sup> (B.3) 式の圧力勾配  $dp/dr$  が負なので圧力  $p$  は  $r$  が増加するに従って減少していく

アインシュタイン方程式は以下のような形で書かれる方程式である。

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} . \quad (\text{C.1})$$

左辺の  $G_{\mu\nu}$  は

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R , \quad (\text{C.2})$$

のように定義されるアインシュタインテンソルであり、右辺の  $R_{\mu\nu}$  はリッチテンソル、 $R = R^\mu_\mu$  はスカラー曲率、 $T_{\mu\nu}$  はエネルギー運動量テンソル、 $G$  はニュートンの重力定数をそれぞれ表す。計量を対角的に

$$g_{\mu\mu} = I_\mu e^{2F_\mu} , I_0 = +1 , I_i = -1 \quad (\text{C.3})$$

のように取ると、リッチテンソルに対して以下のような公式が導ける (Landau and Lifshitz の教科書<sup>36</sup> の 92 章を参照)。

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \sum_{\alpha \neq \mu, \nu} [(\partial_\nu F_\alpha)(\partial_\mu F_\nu) + (\partial_\nu F_\mu)(\partial_\mu F_\alpha) - (\partial_\nu F_\alpha)(\partial_\nu F_\alpha) - \partial_\mu \partial_\nu F_\alpha] , \text{ For } (\mu \neq \nu) \\ R_{\mu\mu} &= \sum_{\alpha \neq \mu} [(\partial_\mu F_\mu)(\partial_\mu F_\alpha) - (\partial_\mu F_\alpha)^2 - \partial_\mu \partial_\mu F_\alpha] \\ &\quad + \sum_{\alpha \neq \mu} I_\mu I_\alpha e^{2(F_\mu - F_\alpha)} \times \left[ (\partial_\alpha F_\alpha)(\partial_\alpha F_\mu) - (\partial_\alpha F_\mu)^2 - \partial_\alpha \partial_\alpha F_\mu - (\partial_\alpha F_\mu) \sum_{\beta \neq \mu, \alpha} \partial_\alpha F_\beta \right] , \quad (\text{C.4}) \end{aligned}$$

上記のようなアインシュタイン方程式を解くための計量として、球対称の系を表すシュバルツシルト計量から出発する。この計量の下での四次元長さ  $ds$  は

$$ds^2 = e^{a(r)} dt^2 - e^{b(r)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (\text{C.5})$$

のように書ける。計量  $g_{\mu\nu}$  の形では

$$g_{tt} = e^{a(r)}, g_{rr} = -e^{b(r)}, g_{\theta\theta} = -r^2, g_{\phi\phi} = -r^2 \sin^2 \theta, \quad (\text{C.6})$$

となる。 $a(r)$  と  $b(r)$  はアインシュタイン方程式によって決定されるパラメータである。

シュバルツシルト計量の表式 (C.6) を (C.3) 式のアインシュタイン方程式の計量の形に合わせて書くと

$$F_t = a(r)/2, F_r = b(r)/2, F_\theta = \ln r, F_\phi = \ln(r \sin \theta) , \quad (\text{C.7})$$

となる。

これらのパラメータ  $a(r)$  と  $b(r)$  を得るためにリッチテンソルの対角成分を計算してみる。(C.4) 式の公式

を使って  $R_{\mu\mu}$  を素直に計算すると

$$\begin{aligned} R_{tt} &= I_t I_r e^{a(r)-b(r)} \left[ \frac{a'b'}{4} - \frac{a'^2}{4} - \frac{a''}{2} - \frac{a'}{2} \left( \frac{2}{r} \right) \right] \\ &= -e^{a(r)-b(r)} \left( \frac{a''}{2} + \frac{a'}{r} + \frac{a'^2}{4} - \frac{a'b'}{4} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

$$\begin{aligned} R_{rr} &= \left[ \frac{a'b'}{4} - \frac{a'^2}{4} - \frac{a''}{2} \right] + \frac{b'}{2r} + \frac{b'}{2r} \\ &= - \left[ \frac{a''}{2} - \frac{b'}{r} + \frac{a'^2}{4} - \frac{a'b'}{4} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

$$\begin{aligned} R_{\theta\theta} &= 1 + I_\theta I_r r^2 e^{-b} \left[ \frac{b'}{2r} - \frac{1}{r} \left( \frac{a'}{2} + \frac{1}{r} \right) \right] \\ &= 1 - r^2 e^{-b} \left[ \frac{a' - b'}{2r} - \frac{1}{r^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

$$\begin{aligned} R_{\phi\phi} &= I_\phi I_r r^2 \sin^2 \theta e^{-b} \left[ \frac{b' - a'}{2r} - \frac{1}{r^2} \right] + I_\phi I_\theta r^2 \sin^2 \theta \frac{1}{r^2} \\ &= -r^2 \sin^2 \theta \left[ e^{-b} \left( \frac{a' - b'}{2r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

と得られる。ここで、 $a'$  や  $b'$  はそれぞれの  $r$  微分を表している。対角的な計量テンソルにおいて、 $g^{\mu\mu} = (g_{\mu\mu})^{-1}$  の関係が成り立つ事に注意\*6すれば (C.8) 式から以下のような関係が得られる。

$$\begin{aligned} R^t_t &= g^{tt} R_{tt} = e^{-b} \left( \frac{a''}{2} + \frac{a'}{r} + \frac{a'^2}{4} - \frac{a'b'}{4} \right) \\ R^r_r &= e^{-b} \left( \frac{a''}{2} - \frac{b'}{r} + \frac{a'^2}{4} - \frac{a'b'}{4} \right) \\ R^\theta_\theta &= R^\phi_\phi = e^{-b} \left( \frac{a' - b'}{2r} + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} \right) . \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

これらの表式を用いればスカラー曲率  $R^\mu_\mu$  は

$$\begin{aligned} R^\mu_\mu &= R^t_t + R^r_r + R^\theta_\theta + R^\phi_\phi \\ &= e^{-b} \left( a'' + \frac{2(a' - b')}{r} + \frac{a'^2}{2} - \frac{a'b'}{2} + \frac{2}{r^2} \right) - \frac{2}{r^2} , \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

と求められる。

求められたリッチテンソルを用いてアインシュタイン方程式 (C.1) の生き残る成分は以下のように得られる。

$$G^t_t = R^t_t - \frac{1}{2} g^t_t R = e^{-b} \left( \frac{b'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 8\pi G T^t_t \quad (\text{C.14})$$

$$G^r_r = -e^{-b} \left( \frac{a'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 8\pi G T^r_r \quad (\text{C.15})$$

$$G^i_i = -\frac{1}{2} e^{-b} \left( a'' + \frac{a' - b'}{r} - \frac{a'^2}{2} - \frac{a'b'}{2} \right) = 8\pi G T^i_i , \text{ For } i = \theta \text{ or } \phi . \quad (\text{C.16})$$

---

\*6 計量テンソルは  $g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu$  の関係を満たす必要がある。

質量が球対称に分布している半径  $R$  の天体を考えたとき、 $r > R$  の領域ではエネルギー運動量テンソルは  $T_{\mu\mu} = 0$  となることに気をつければ

$$e^{-b} \left( \frac{b'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0 \quad (\text{C.17})$$

$$-e^{-b} \left( \frac{a'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) = 0 \quad (\text{C.18})$$

$$a(r)' + b(r)' = 0, \text{ i.e. } a(r) + b(r) = C, \quad (\text{C.19})$$

という関係が得られる。ここで、 $C$  は任意定数である。三行目の (C.19) 式は (C.17) 式と (C.18) 式の辺々を引き算すると得られる。

(C.17) 式の両辺に  $(-r^2)$  をかけてみると

$$\begin{aligned} 0 &= -r^2 \left[ e^{-b} \left( \frac{b'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} \right] = [e^{-b} (1 - b'r) - 1] \\ &= \frac{d}{dr} [r (e^{-b} - 1)] , \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

となるため、簡単に積分を実行することができ、その積分定数を  $-r_g$  と書くと  $a(r)$  と  $b(r)$  に関する具体的な表式、

$$\begin{aligned} r(e^b - 1) &= -r_g \\ \text{i.e. } e^{-b} &= 1 - \frac{r_g}{r} = Ce^a, \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

が得られる。任意定数の  $C$  は時間座標を  $t \rightarrow t\sqrt{C}$  と取り直せば時間に吸収することができる。定数  $r_g$  は距離を無限遠 ( $r \rightarrow \infty$ ) に取る事によって決定できる。無限遠の場合、重力場が弱くなって非相対論的に取り扱うことができるようになるためである。このときの計量はニュートンの重力ポテンシャル  $\phi_{Newton} = -GM/r$  を用いて

$$e^a = g_{tt} \approx 1 + \frac{2\phi}{c^2} = 1 - \frac{2GM}{r}, \quad (\text{C.22})$$

と書けるため、積分定数は  $r_g = 2GM = 2GM/c^2$  と求められる。この  $r_g$  を重力半径と呼ぶ。これらの表式をまとめると最終的に以下のような表式が得られる。

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{r_g}{r} \right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (\text{C.23})$$

これはシュバルツシルト解と呼ばれ、球対称な質量分布を持つ物体によって生じる重力場を記述する厳密な解となっている。時間計量  $(1 - r_g/r)$  は  $r > r_g$  の時に符号が逆転してしまうため、 $r = r_g$  の点で時空の性質が変化する事が見て取れる。多くの天体は天体の内部に  $r_g$  が存在する ( $R > r_g$ ) ため、分布の外側を前提としたシュバルツシルト解を適用することは出来ない。高密度の天体の場合は天体の外側に  $r_g$  が存在してしまう場合もある ( $R < r_g$ )。このような天体をブラックホールと呼ぶ。

空間計量については一見すると  $r = r_g$  で発散するように見えるが、この発散は以下のような座標を取る事で回避することができる。

$$\begin{aligned} r &= r' + \left(\frac{r_g}{2}\right)^2 \frac{1}{4r'} + \frac{r_g}{2} \\ &= r' \left(1 + \frac{r_g}{4r'}\right)^2. \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

このような新しい座標  $r'$  を採用し、

$$\begin{aligned} 1 - \frac{r_g}{r} &= \frac{r' + \left(\frac{r_g}{2}\right)^2 \frac{1}{4r'} - \frac{r_g}{2}}{r' + \left(\frac{r_g}{2}\right)^2 \frac{1}{4r'} + \frac{r_g}{2}} \\ &= \frac{1 - 2\frac{r_g}{4r'} + \left(\frac{r_g}{4r'}\right)^2}{1 + 2\frac{r_g}{4r'} + \left(\frac{r_g}{4r'}\right)^2} \\ &= \left(\frac{1 - \frac{r_g}{4r'}}{1 + \frac{r_g}{4r'}}\right)^2 \\ dr &= \left(1 + \frac{r_g}{4r'}\right) \left(1 - \frac{r_g}{4r'}\right), \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

のような関係が成り立つことに注意すれば (C.23) 式は

$$ds^2 = \left(\frac{1 - \frac{r_g}{4r'}}{1 + \frac{r_g}{4r'}}\right)^2 dt^2 - \left(1 + \frac{r_g}{4r'}\right)^4 (dr'^2 + r'^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)) \quad (\text{C.26})$$

となる。この表式は、 $r = r_g$  での時間計量の特異性を保ったまま空間の計量での発散を取り除いた形となっている。

## D TOV 方程式導出の概略

シュバルツシルト解は天体の外部、すなわちエネルギー運動量テンソルが  $T^\mu_\nu = 0$  となるような条件の下で得られた。内部の構造を理解するためにはエネルギー運動量テンソルの具体的な形を知る必要がある。完全流体の場合  $T^\mu_\nu = \text{diag.}(\rho(r), -P(r), -P(r), -P(r))$  を考えてみる。このとき、アインシュタイン方程式 (C.14)-(C.16) から

$$e^{-b} \left(\frac{b'}{r} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} = 8\pi G\rho \quad (\text{D.1})$$

$$e^{-b} \left(\frac{a'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2} = 8\pi GP \quad (\text{D.2})$$

$$\frac{1}{2}e^{-b} \left(a'' + \frac{a' - b'}{r} - \frac{a'^2}{2} - \frac{a'b'}{2}\right) = 8\pi GP, \quad (\text{D.3})$$

のような三つの方程式が導かれる。(C.22) 式にならって  $e^{-b}$  を

$$e^{-b(r)} \equiv 1 - \frac{2G\mathcal{M}(r)}{r}, \quad (\text{D.4})$$

と表記する。ここで、 $\mathcal{M}(r)$  は図 45 で図示されている天体の中心から距離  $r$  までの範囲に含まれる質量と同じ物である。天体の全質量  $M$  と区別するためにあからさまに  $\mathcal{M}(r)$  と書いている。天体の外側ではシュバル

ツシルト解と一致しないといけないので、

$$\mathcal{M}(r \geq R) = M, \quad (\text{D.5})$$

となるべきである。(D.4) 式の両辺を  $r$  で微分すると

$$e^{-b}b' = 2G \left( \frac{1}{r} \frac{d\mathcal{M}}{dr} - \frac{\mathcal{M}}{r^2} \right), \quad (\text{D.6})$$

のような関係が成立することに気がつけて (D.1) 式を書き換えると

$$\begin{aligned} 2G \left( \frac{1}{r^2} \frac{d\mathcal{M}}{dr} - \frac{\mathcal{M}}{r^3} \right) - \frac{1}{r^2} + \frac{2G\mathcal{M}(r)}{r^3} + \frac{1}{r^2} &= 8\pi G\rho \\ \frac{d\mathcal{M}}{dr} &= 4\pi r^2 \rho(r), \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

という関係が得られる。これはまさしく TOV 方程式の片割れ、(B.1) 式である。

次に圧力勾配  $dP/dr$  を求める。これは (D.2) 式の両辺を  $r$  で微分し、(D.3) 式と連立させて  $a''$  を消去することによって求められる。

$$e^{-b}a'' = 16\pi GP - e^{-b} \left( \frac{a' - b'}{r} + \frac{a'^2}{2} - \frac{a'b'}{2} \right), \quad (\text{D.8})$$

の関係に注意すれば (D.2) 式の左辺の微分は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left[ e^{-b} \left( \frac{a'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} \right] &= -e^{-b}b' \left( \frac{a'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + e^{-b} \left( \frac{a''}{r} - \frac{a'}{r^2} - \frac{2}{r^3} \right) - \frac{2}{r^3} \\ &= -\frac{a'}{2} e^{-b} \left( \frac{b'}{r} + a'r \right) - \frac{2}{r} \left[ e^{-b} \left( \frac{a'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} - 8\pi GP \right] \\ &= -\frac{a'}{2} 8\pi G(\rho + P), \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

と得られるため、圧力勾配の表式

$$-\frac{dP(r)}{dr} = 8\pi G(\rho + P)a', \quad (\text{D.10})$$

が得られる。さらに (D.2) と (D.4) の二つの式を連立して  $a'(r)$  と  $b(r)$  を消去してみる。

$$a' = \left( 8\pi GPr + \frac{1}{r} \right) e^{-b} - \frac{1}{r}, \quad (\text{D.11})$$

を (D.10) 式に代入してうまく変形すると最終的に

$$-\frac{dP}{dr} = \frac{G\mathcal{M}\rho}{r^2} \frac{\left( 1 + \frac{P}{\rho} \right) \left( 1 + \frac{4\pi Pr^3}{\mathcal{M}} \right)}{\left( 1 - \frac{2G\mathcal{M}}{r} \right)}, \quad (\text{D.12})$$

という形が得られる。これはまさしく TOV 方程式の圧力の釣り合いを表す (B.2) 式である。

ここまで TOV 方程式について議論してきたが、この章の冒頭でも述べたとおり、TOV 方程式は球対称を仮定した方程式で有り、本研究で行ったような内部にスピン偏極を持ちうる系の場合は球対称性が失われるため、星の構造を見積もる方程式としては厳密では無い。

対称性を崩した天体の構造を見積もる方程式の一つとして Hartle 方程式<sup>34,35</sup> が提案されている。これは回転する天体を考慮した方程式で、回転の遠心力によって天体が楕円状に変形したと仮定している。詳しくは言及しないが今後類似の研究を行う場合はこの Hartle 方程式を用いてどのような変化が生じるのかも調べてみると面白いかもしれない。

## E 2 フレーバーの NJL 模型の書き換え

行列式型相互作用は 2 フレーバーの NJL 模型には行列式型相互作用を含める必要はないが、無理矢理行列式型の相互作用項を含めた形で書くこともできるため、ここではそのような形への書き直しを試みる。この書き換えによって得られる行列式型相互作用項は、3 フレーバーの NJL 模型に含まれるような軸性異常の効果を表した物では無く、ただの式変形の帰結であるため、注意する必要がある。

2 フレーバーの NJL 模型は具体的には

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu)\psi + G_S[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2] \\ &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_S ,\end{aligned}\tag{E.1}$$

と書けるが、この 2 フレーバーのスカラー型相互作用項を 3 フレーバーのスカラー型相互作用項

$$\mathcal{L}_{S3} = \sum_{a=0}^8 [(\bar{\psi}\lambda_a\psi)^2 + (\bar{\psi}i\lambda_a\gamma_5\psi)^2]\tag{E.2}$$

のようにアイソスピン行列の和を含めた形で書いてみると、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_S &= \sum_{i=0}^3 [(\bar{\psi}\tau_i\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\tau_i\psi)^2] - (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2 - (\bar{\psi}\vec{\tau}\psi)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 [(\bar{\psi}\tau_i\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\tau_i\psi)^2] \\ &\quad + \frac{1}{2} [(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2 - (\bar{\psi}\vec{\tau}\psi)^2 - (\bar{\psi}i\gamma_5\psi)^2] ,\end{aligned}\tag{E.3}$$

のように書き表せる。2 行目では見栄えをよくするために形を整えた。この 2 行目を変形してみる。全体にかかる係数  $\frac{1}{2}$  は一旦忘れることとして力任せに項を分解してみる。



$$\begin{aligned}
& (\bar{\psi}\psi)^2 - (\bar{\psi}i\gamma_5\psi)^2 - (\bar{\psi}\vec{\tau}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2 \\
&= (\bar{u}u + \bar{d}d)^2 + (\bar{u}\gamma_5 u + \bar{d}\gamma_5 d)^2 \\
&\quad - [(\bar{u}d + \bar{d}u)^2 - (-\bar{u}d + \bar{d}u)^2 + (\bar{u}u - \bar{d}d)^2] \\
&\quad + [-(\bar{u}\gamma_5 d + \bar{d}\gamma_5 u)^2 + (\bar{u}\gamma_5 d - \bar{d}\gamma_5 u)^2 - (\bar{u}\gamma_5 u - \bar{d}\gamma_5 d)^2] \\
&= (\bar{u}u + \bar{d}d)^2 + (\bar{u}\gamma_5 u + \bar{d}\gamma_5 d)^2 \\
&\quad - [2(\bar{u}d)(\bar{d}u) + 2(\bar{d}u)(\bar{u}d) + (\bar{u}u - \bar{d}d)^2] \\
&\quad + [-2(\bar{u}\gamma_5 d)(\bar{d}\gamma_5 u) - 2(\bar{d}\gamma_5 u)(\bar{u}\gamma_5 d) - (\bar{u}\gamma_5 u - \bar{d}\gamma_5 d)^2] \\
&= 2(\bar{u}u)(\bar{d}d) + 2(\bar{d}d)(\bar{u}u) + 2(\bar{u}\gamma_5 u)(\bar{d}\gamma_5 d) + 2(\bar{d}\gamma_5 d)(\bar{u}\gamma_5 u) \\
&\quad - [2(\bar{u}d)(\bar{d}u) + 2(\bar{d}u)(\bar{u}d)] \\
&\quad - [2(\bar{u}\gamma_5 d)(\bar{d}\gamma_5 u) + 2(\bar{d}\gamma_5 u)(\bar{u}\gamma_5 d)] \\
&= 4[(\bar{u}u)(\bar{d}d) - (\bar{u}d)(\bar{d}u) + (\bar{u}\gamma_5 u)(\bar{d}\gamma_5 d) - (\bar{u}\gamma_5 d)(\bar{d}\gamma_5 u)] .
\end{aligned} \tag{E.4}$$

この式に  $(\bar{u}u)(\bar{d}\gamma_5 d) - (\bar{u}u)(\bar{d}\gamma_5 d)$  などの  $\gamma_5$  を一つだけ含む 0 を挿入してやると、

$$\begin{aligned}
& (\bar{\psi}\psi)^2 - (\bar{\psi}i\gamma_5\psi)^2 - (\bar{\psi}\vec{\tau}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2 \\
&= 2[(\bar{u}u)(\bar{d}d) - (\bar{u}u)(\bar{d}\gamma_5 d) - (\bar{u}\gamma_5 u)(\bar{d}d) + (\bar{u}\gamma_5 u)(\bar{d}\gamma_5 d) \\
&\quad + (\bar{u}u)(\bar{d}d) + (\bar{u}u)(\bar{d}\gamma_5 d) + (\bar{u}\gamma_5 u)(\bar{d}d) + (\bar{u}\gamma_5 u)(\bar{d}\gamma_5 d) \\
&\quad - (\bar{u}d)(\bar{d}u) - (\bar{u}d)(\bar{d}\gamma_5 u) - (\bar{u}\gamma_5 d)(\bar{d}u) - (\bar{u}\gamma_5 d)(\bar{d}\gamma_5 u) \\
&\quad - (\bar{u}d)(\bar{d}u) + (\bar{u}d)(\bar{d}\gamma_5 u) + (\bar{u}\gamma_5 d)(\bar{d}u) - (\bar{u}\gamma_5 d)(\bar{d}\gamma_5 u)] ,
\end{aligned} \tag{E.5}$$

という表式が得られる。因数分解して項をまとめると、

$$\begin{aligned}
& (\bar{\psi}\psi)^2 - (\bar{\psi}i\gamma_5\psi)^2 - (\bar{\psi}\vec{\tau}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2 \\
&= 2[(\bar{u}u - \bar{u}\gamma_5 u)(\bar{d}d - \bar{d}\gamma_5 d) \\
&\quad + (\bar{u}u + \bar{u}\gamma_5 u)(\bar{d}d + \bar{d}\gamma_5 d) \\
&\quad - (\bar{u}d - \bar{u}\gamma_5 d)(\bar{d}u - \bar{d}\gamma_5 u) \\
&\quad - (\bar{u}d + \bar{u}\gamma_5 d)(\bar{d}u + \bar{d}\gamma_5 u)] \\
&= 2[\bar{u}(1 - \gamma_5)u\bar{d}(1 - \gamma_5)d \\
&\quad + \bar{u}(1 + \gamma_5)u\bar{d}(1 + \gamma_5)d \\
&\quad - \bar{u}(1 - \gamma_5)d\bar{u}(1 - \gamma_5)d \\
&\quad - \bar{u}(1 + \gamma_5)d\bar{u}(1 + \gamma_5)d] \\
&= 2[\bar{u}(1 - \gamma_5)u\bar{d}(1 - \gamma_5)d - \bar{u}(1 - \gamma_5)d\bar{u}(1 - \gamma_5)d \\
&\quad + \bar{u}(1 + \gamma_5)u\bar{d}(1 + \gamma_5)d - \bar{u}(1 + \gamma_5)d\bar{u}(1 + \gamma_5)d] ,
\end{aligned} \tag{E.6}$$

となり、2 章で見た表式に近い物が見えてくる。もう少し詳しく書いてみると、

$$\begin{aligned}
& (\bar{\psi}\psi)^2 - (\bar{\psi}i\gamma_5\psi)^2 - (\bar{\psi}\vec{\tau}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2 \\
&= \det \begin{pmatrix} \bar{u}(1-\gamma_5)u & \bar{u}(1-\gamma_5)d \\ \bar{d}(1-\gamma_5)u & \bar{d}(1-\gamma_5)d \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \bar{u}(1+\gamma_5)u & \bar{u}(1+\gamma_5)d \\ \bar{d}(1+\gamma_5)u & \bar{d}(1+\gamma_5)d \end{pmatrix} \\
&= \det\bar{\psi}(1-\gamma_5)\psi + \det\bar{\psi}(1+\gamma_5)\psi, \tag{E.7}
\end{aligned}$$

となる。これは 2 フレーバー NJL 模型のスカラー型相互作用項  $\mathcal{L}_{S2}$  の一部を切り出した計算だったので元に戻してやると

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{S2} &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 [(\bar{\psi}\tau_i\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\tau_i\psi)^2] \\
&\quad + \frac{1}{2} \det\bar{\psi}(1-\gamma_5)\psi + \det\bar{\psi}(1+\gamma_5)\psi, \tag{E.8}
\end{aligned}$$

という式が得られる。このように、2 フレーバーの NJL 模型でも行列式型相互作用を含めたような形で相互作用を記述する事ができる。この行列式はスカラー型相互作用と同じくクォーク場が四つ含まれる 4 点相互作用となっていることから分かります。3 フレーバーの模型に含まれる行列式型 6 点相互作用とは似て非なる物である。繰り返しになるが、これは単なる式変形の帰結であり、3 フレーバーの模型に含まれる軸性異常項とは関係が無いことに注意してほしい。

## F 物理量の見積もり

本文中で、「単体のクォークは高温の環境や高密度の環境で出現する」や「ハイブリッド星の質量が太陽に比べてどの程度か」等を書いてきた。ここでは、これらの量に具体的な数値を与えてその規模感の直感的なイメージを与えたい。

### F.1 ハイブリッド星の密度

ハイブリッド星 (コンパクト星) が具体的にどのくらい高密度なのか大まかな見積もりを与える。9.1 章で計算したハイブリッド星は太陽と同程度の質量と 10km 程度の半径を持っていた。

この天体はどの程度高密度なのであろうか。太陽の質量と半径はおおよそ、 $M_{\odot} \approx 1.989 \times 10^{30} [\text{kg}]$ 、 $R_{\odot} \approx 6.960 \times 10^5 \text{km}$  程度である。これを質量密度に換算すると太陽の質量密度は  $\rho_{\odot} \approx 1.41 \text{ g/cm}^3$  と見積もられる。水の密度が  $1 \text{ g/cm}^3$  なので、太陽の質量密度は水よりも少し大きいと言える。

では、ハイブリッド星の密度はどうだろうか。ハイブリッド星の典型的な半径 10km を  $R_{\odot}$  に換算すると  $10\text{km} = 1.437 \times 10^{-5} R_{\odot} \sim 10^{-5} R_{\odot}$  となるので、ハイブリッド星の半径は太陽の 10 万分の 1 程度だということがわかる。密度を計算するにはこれを体積に換算すればよい。単純に半径を 3 乗すればハイブリッド星の体積は太陽の  $10^{-15}$  倍 ( $= \frac{1}{1000}$  兆倍)、質量密度は太陽の 1000 兆倍ということになる。

このような見積もりをすると、クォーク物質が出現するような“高密度の天体”がどれほどに高密度なのか想像しやすくなるのではないだろうか。

## F.2 単体のクォークが出現するほどの高温

非閉じ込めの単体のクォークは高密度の環境の他に高温の環境でも出現する。この閉じ込め、非閉じ込めの境界でのクォークの詳細な振る舞いは未だ解き明かされていないが、この境界となる温度は 170MeV 程度であることはよく知られている。この 170MeV というのは我々のよく知るセルシウス温度 [°C] や絶対温度 [K] ではどの程度の温度になるのだろうか。A 章での換算によると、 $1\text{eV} \approx 1 \text{ 万 } ^\circ\text{C}$  であったので、 $170\text{MeV} \approx 170 \times 10^4 \times 10^6 = 1.7 \times 10^{12} = 1700 \text{ 億 } ^\circ\text{C}$  と見積もることができる。太陽の温度がその表面で  $5500^\circ\text{C}$ 、内部でも  $1500 \text{ 万 } ^\circ\text{C}$  であることを考えると、この高温がどれほどの物なのかイメージしやすくなるだろう。<sup>\*7</sup>

宇宙創世の直後はこれよりも高温の状態が実現し、数十マイクロ秒程度でこの境界の温度まで宇宙が冷却されたらしい。

## F.3 フィクションの話

単体のクォークは我々にとって身近な環境には出現しない。そうすると、このような研究について「何の役に立つの？」と人に聞かれることがよくある。これは実生活に直結しない研究に携わっている以上避けては通れない質問だろう。そういう時は、理論的に予測を立てておくことの意義を説いたり、ファラデーが電磁誘導の法則を発表したときの逸話のように「このような研究は生まれたばかりの赤ちゃんと同じだ」と言ったりしてもよいのだが、SF 作品の話を経絡めて、実生活で役に立つかもしれないという夢を話すこともできるので紹介したい。

とある SF 作品では人類が宇宙に進出した時代が描かれており、宇宙で活動する上での必需品として「水の玉」という道具が登場する。これはスイカ程度の大きさと重さの球体であり、その内部には数百リットルの水が貯蔵されているという代物である。このような道具は理論的に実現できるのだろうか。体積は何らかの未知の技術で圧縮することができるとしても、質量 (重さ) に関しては質量保存の法則を考えるとどうしようもないように思える。

ここで、陽子や中性子を構成するアップクォークとダウンクォークの質量に注目してみる。2.2 章での計算や付録 A の質量の項目でも見積もった通り、アップクォークとダウンクォークは単体では数 MeV 程度の質量しか持たないにも関わらず、陽子や中性子などのハドロンを構成している間はカイラル対称性の自発的破れにより 300MeV 程の質量を獲得している。大雑把に見積もれば、閉じ込められていない、単体の u,d クォークはハドロンとして存在していた時と比べて 100 分の 1 程度の質量しか持っていないと言えるだろう。

よく知られているとおり、原子の質量はその大半が陽子と中性子によるものであるため、水分子を構成する陽子と中性子をクォーク化して保存することができれば「水の玉」の中に数百リットルの水を貯蔵することも可能となりえる。数百リットルの水をスイカ大の球体に圧縮した「水の玉」の内部は非常に高密度になっている

---

<sup>\*7</sup> ちなみに、コンパクト星の一種である中性子星の表面温度は誕生から 1 年で  $0.1\text{MeV} \approx 10 \text{ 億 } ^\circ\text{C}$  以下の温度まで冷却される。この温度は地球と比べるとずいぶん高温だが、核子のエネルギースケールと比べてずっと小さいので、冷たい星と呼ばれることもある。

るはずであるため、高密度クォーク物質が出現してもおかしくはない。実際に作れるのかどうかは定かではないが、もしもこのような「水の玉」を作るような時代が到来すれば高密度クォーク物質の研究が人類にとって直接的に有意義に働くことがあるのかもしれない。

## G テンソル型相互作用を追加した NJL 模型の有効ポテンシャルの積分範囲

ここでは 4.2 章では詳細に記載しなかった、有効ポテンシャルを求めるに当たっての積分範囲に関する詳細を記述する。(4.13) 式に含まれるステップ関数により  $\mu > E_f$  の条件が課されるが、同時に運動量がカットオフを超えてはならないという条件  $p^2 \leq \Lambda^2$  も同時に課される。

擬ベクトル型の相互作用を追加した NJL 模型でのポテンシャルを取り扱った 3.2 章では、解析的に積分範囲を求めるに当たっては  $\mu > E_f$  の条件のみを考慮し、 $p^2 \leq \Lambda^2$  の条件は数値的に計算する際の制約として計算したため、(見かけ上は) 積分範囲はシンプルになっていた。

実際に積分範囲を精査するに当たって、運動量のカットオフ  $\Lambda$  をどのように扱うかを整理しておこう。あからさまに書いてやれば、

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \leq \Lambda^2, \quad (\text{G.1})$$

となるが、テンソル型相互作用を追加した NJL 模型では  $q^2 \equiv p_x^2 + p_y^2 + M_f^2$  とする変数変換を行ったので、カットオフ  $\Lambda$  による積分範囲の制約は

$$q^2 + p_z^2 \leq \Lambda^2 + M_f^2, \quad (\text{G.2})$$

と得られる。正エネルギー項の積分範囲はステップ関数  $\theta(\mu - E_f)$  と (G.2) 式の連立によって、真空の寄与の項の積分範囲は (G.2) 式によって与えられる。真空の寄与の積分範囲はほぼ自明だが、正エネルギー項の積分範囲はこの連立によって複雑になる。(4.10) 式のエネルギー固有値をもう一度書いておくと、以下のような形をしている。

$$E_f = \sqrt{p_z^2 + (q + \eta F_f)^2} \quad (f = u, d, s). \quad (\text{G.3})$$

式中の  $\eta F_f$  がくせ者で、この正負によって範囲分けが異なってくる。

### G.1 $\eta F \geq 0$ の場合

まず、比較的シンプルな  $\eta F \geq 0$  の場合から見ていく。

ステップ関数の条件より、 $p_z$  の積分範囲は

$$\begin{aligned} \mu &\geq E_{q,f,\eta} \\ \mu^2 &\geq p_z^2 + (q + \eta F)^2 \\ p_z^2 &\leq \mu^2 - (q + \eta F)^2 \\ p_z &\leq \sqrt{\mu^2 - (q + \eta F)^2}, \end{aligned} \quad (\text{G.4})$$

と制約が課される。また、 $q$  の積分範囲は  $p_z$  が実数となるように

$$\begin{aligned}\mu^2 &\geq (q + \eta F)^2 \\ q &\leq \mu - \eta F ,\end{aligned}\tag{G.5}$$

と制約が課される。

これは  $p_{Max} \leq \Lambda$  が確実に成り立つ場合はこの場合分けだけで済むが、 $p_{Max} > \Lambda$  となりえる場合は積分範囲を分割して

$$\begin{cases} 0 \leq p_z \leq \sqrt{\mu^2 - (q + \eta F)^2} & , \quad \frac{\mu^2 - \Lambda^2 - M^2 - F^2}{2\eta F} \leq q \leq \mu - \eta F \\ 0 \leq p_z \leq \sqrt{\Lambda^2 + M^2 - q^2} & , \quad M \leq q \leq \frac{\mu^2 - \Lambda^2 - M^2 - F^2}{2\eta F} \end{cases}\tag{G.6}$$

の二つの積分範囲を取る。あからさまに書くと

$$\int_{\frac{\mu^2 - \Lambda^2 - M^2 - F^2}{2\eta F}}^{\mu - \eta F} dq \int_0^{\sqrt{\mu^2 - (q + \eta F)^2}} dp_z(\cdots) + \int_M^{\frac{\mu^2 - \Lambda^2 - M^2 - F^2}{2\eta F}} dq \int_0^{\sqrt{\Lambda^2 + M^2 - q^2}} dp_z(\cdots)\tag{G.7}$$

のような積分を実行することになる。表記の簡略化のため、以後、 $\frac{\mu^2 - \Lambda^2 - M^2 - F^2}{2\eta F} \equiv X_+$  と略記する。

## G.2 $\eta F < 0$ の場合

$\eta F \geq 0$  の場合と同様に  $p_z$  の積分範囲には

$$p_z \leq \sqrt{\mu^2 - (q + \eta F)^2} \quad \left( = \sqrt{\mu^2 - (q - |\eta F|)^2} \right) ,\tag{G.8}$$

の条件が課される。 $q$  の範囲も同様に制約条件

$$q \leq \mu - \eta F \quad (= \mu + |\eta F|) ,\tag{G.9}$$

がつくが、 $|\eta F| + \mu \geq M$  の場合は積分の下端にも制約がつき、

$$\begin{aligned}M &\leq q \leq |\eta F| + \mu \\ \text{or} \\ |\eta F| - \mu &\leq q \leq |\eta F| + \mu ,\end{aligned}\tag{G.10}$$

のような積分範囲を取る。 $p_{Max} > \Lambda$  となりえる場合は

$$\begin{cases} 0 \leq p_z \leq \sqrt{\mu^2 - (q + \eta F)^2} & , \quad \begin{cases} M \leq q \leq \frac{-\mu^2 + \Lambda^2 + M^2 + F^2}{2|\eta F|} \\ \text{or} \\ |\eta F| - \mu \leq q \leq \frac{-\mu^2 + \Lambda^2 + M^2 + F^2}{2|\eta F|} \end{cases} \\ 0 \leq p_z \leq \sqrt{\Lambda^2 + M^2 - q^2} & , \quad \frac{-\mu^2 + \Lambda^2 + M^2 + F^2}{2|\eta F|} \leq q \leq |\eta F| + \mu \end{cases}\tag{G.11}$$

のような積分範囲となる。あからさまに書くと

$$\int_{M \text{ or } |\eta F| - \mu}^{\frac{-\mu^2 + \Lambda^2 + M^2 + F^2}{2|\eta F|}} dq \int_0^{\sqrt{\mu^2 - (q + \eta F)^2}} dp_z(\cdots) + \int_M^{\frac{\mu^2 - \Lambda^2 - M^2 - F^2}{2\eta F}} dq \int_0^{\sqrt{\Lambda^2 + M^2 - q^2}} dp_z(\cdots)\tag{G.12}$$

のような積分を実行する。

$G.1$  と同様に表記の簡略化のため、 $\frac{\mu^2 - \Lambda^2 - M^2 - F^2}{2\eta F} \equiv X_-$  と略記する。

なお、 $F_3$  と  $F_8$  を正にとるため、 $F_u = F_3 + F_8/\sqrt{3}$  は常に正の値を、 $F_s = -2F_8/\sqrt{3}$  は常に負の値をとる。

## H テンソル型相互作用を追加した NJL 模型の有効ポテンシャルの解析計算

正エネルギーの項は積分範囲に応じて以下のように計算される。 $p_z$  についての積分は G 章からも明らかのように  $\eta F$  の正負に関わらず、有効ポテンシャルは同じ形を取る。後の計算を楽にするためにあらかじめ  $p_z$  についての定積分と  $q$  についての不定積分を実行した形を導出しておく。

■  $0 \leq p_z \leq \sqrt{\Lambda^2 + M^2}$  の場合

$$\begin{aligned}
\Phi_f &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\eta, \alpha} \int_{q_{min}}^{q_{Max}} dq \int_0^{\sqrt{\Lambda^2 + M^2 - q^2}} dp_z q (E_{q,f,\eta} - \mu) \\
&= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\eta, \alpha} \int_{q_{min}}^{q_{Max}} dq \int_0^{\sqrt{\Lambda^2 + M^2 - q^2}} dp_z q \left( \sqrt{p_z^2 + (q + \eta F)^2} - \mu \right) \\
&= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\eta, \alpha} \int_{q_{min}}^{q_{Max}} dq q \frac{1}{2} \left[ p_z \sqrt{p_z^2 + (q + \eta F)^2} \right. \\
&\quad \left. + (q + \eta F)^2 \ln \left( p_z + \sqrt{p_z^2 + (q + \eta F)^2} \right) - 2\mu p_z \right]_0^{\sqrt{\Lambda^2 + M^2 - q^2}} \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\eta, \alpha} \int_{q_{min}}^{q_{Max}} dq q \sqrt{\Lambda^2 + M^2 - q^2} \sqrt{\Lambda^2 + M^2 - q^2 + (q + \eta F)^2} \\
&\quad + q (q + \eta F)^2 \ln \left( \frac{\sqrt{\Lambda^2 + M^2 - q^2} + \sqrt{\Lambda^2 + M^2 - q^2 + (q + \eta F)^2}}{|q + \eta F|} \right) \\
&\quad - 2\mu q \sqrt{\Lambda^2 + M^2 - q^2} \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\eta, \alpha} \int_{q_{min}}^{q_{Max}} dq \left[ q \sqrt{\Lambda^2 + M^2 - q^2} \sqrt{\Lambda^2 + M^2 - q^2 + (q + \eta F)^2} \right. \\
&\quad \left. + q (q + \eta F)^2 \ln \left( \frac{\sqrt{\Lambda^2 + M^2 - q^2} + \sqrt{\Lambda^2 + M^2 - q^2 + (q + \eta F)^2}}{|q + \eta F|} \right) \right] \\
&\quad + \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\eta, \alpha} \left[ \frac{2}{3} \mu (\Lambda^2 + M^2 - q^2)^{3/2} \right]_{q_{min}}^{q_{Max}} \tag{H.1}
\end{aligned}$$

■  $0 \leq p_z \leq \sqrt{\mu^2 - (q + \eta F)^2}$  の場合

$$\begin{aligned}
\Phi_f &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\eta, \alpha} \int_{q_{min}}^{q_{Max}} dq \int_0^{\sqrt{\mu^2 - (q + \eta F)^2}} dp_z q (E_{q, \eta} - \mu) \\
&= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\eta, \alpha} \int_{q_{min}}^{q_{Max}} dq \int_0^{\sqrt{\mu^2 - (q + \eta F)^2}} dp_z q \left( \sqrt{p_z^2 + (q + \eta F)^2} - \mu \right) \\
&= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\eta, \alpha} \int_{q_{min}}^{q_{Max}} dq q \frac{1}{2} \left[ p_z \sqrt{p_z^2 + (q + \eta F)^2} \right. \\
&\quad \left. + (q + \eta F)^2 \ln \left( p_z + \sqrt{p_z^2 + (q + \eta F)^2} \right) - 2\mu p_z \right]_0^{\sqrt{\mu^2 - (q + \eta F)^2}} \\
&= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\eta, \alpha} \int_{q_{min}}^{q_{Max}} dq q \frac{1}{2} \left[ -\mu \sqrt{\mu^2 - (q + \eta F)^2} + (q + \eta F)^2 \ln \left( \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - (q + \eta F)^2}}{|q + \eta F|} \right) \right] \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\eta, \alpha} \frac{1}{12} \left[ \mu \sqrt{\mu^2 - (q + \eta F)^2} (3F^2 - 2\eta F q - 5q^2 + 2\mu^2) \right. \\
&\quad \left. + 4\eta F \mu^3 \tan^{-1} \left( \frac{q + \eta F}{\sqrt{\mu^2 - (q + \eta F)^2}} \right) \right. \\
&\quad \left. + (3q^4 + 8\eta F q^3 + 6F^2 q^2 - F^4) \ln \left( \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - (q + \eta F)^2}}{|q + \eta F|} \right) \right]_{q_{min}}^{q_{Max}} \quad (H.2)
\end{aligned}$$

■  $0 \leq p_z \leq \sqrt{\Lambda^2 + M^2 - q^2}$  ,  $M \leq q \leq \sqrt{\Lambda^2 + M^2}$  の場合 これは、(H.1) 式において  $q_{Max} = \sqrt{\Lambda^2 + M^2}$  ,  $q_{min} = M$  とした場合に対応する。

$$\begin{aligned}
\Phi_f &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\eta, \alpha} \int_M^{\sqrt{\Lambda^2 + M^2}} dq \left[ q \sqrt{\Lambda^2 + M^2 - q^2} \sqrt{\Lambda^2 + M^2 - q^2 + (q + \eta F)^2} \right. \\
&\quad \left. + q (q + \eta F)^2 \ln \left( \frac{\sqrt{\Lambda^2 + M^2 - q^2} + \sqrt{\Lambda^2 + M^2 - q^2 + (q + \eta F)^2}}{|q + \eta F|} \right) \right] \\
&\quad + \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\eta, \alpha} \left[ \frac{2}{3} \mu (\Lambda^2 + M^2 - q^2)^{3/2} \right]_M^{\sqrt{\Lambda^2 + M^2}} \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\eta, \alpha} \int_M^{\sqrt{\Lambda^2 + M^2}} dq \left[ q \sqrt{\Lambda^2 + M^2 - q^2} \sqrt{\Lambda^2 + M^2 - q^2 + (q + \eta F)^2} \right. \\
&\quad \left. + q (q + \eta F)^2 \ln \left( \frac{\sqrt{\Lambda^2 + M^2 - q^2} + \sqrt{\Lambda^2 + M^2 - q^2 + (q + \eta F)^2}}{|q + \eta F|} \right) \right] \\
&\quad - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\eta, \alpha} \frac{2}{3} \mu \Lambda^3 \quad (H.3)
\end{aligned}$$

## H.1 $\eta F \geq 0$ の場合

■  $0 \leq p_z \leq \sqrt{\mu^2 - (q + \eta F)^2}$ ,  $M \leq q \leq \mu - \eta F$  の場合 これは、(H.2) 式において  $q_{Max} = \mu - \eta F$ ,  $q_{min} = M$  とした場合に対応する。

$$\begin{aligned}
\Phi_f &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\eta, \alpha} \frac{1}{12} \left[ \mu \sqrt{\mu^2 - (q + \eta F)^2} (3F^2 - 2\eta F q - 5q^2 + 2\mu^2) \right. \\
&\quad + 4\eta F \mu^3 \tan^{-1} \left( \frac{q + \eta F}{\sqrt{\mu^2 - (q + \eta F)^2}} \right) \\
&\quad + (3q^4 + 8\eta F q^3 + 6F^2 q^2 - F^4) \ln \left( \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - (q + \eta F)^2}}{|q + \eta F|} \right) \Big]_M^{\mu - \eta F} \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\eta, \alpha} \frac{1}{12} \left[ 4\eta F \mu^3 \left( \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left( \frac{0}{\mu} \right) \right) - \mu \sqrt{\mu^2 - (M + \eta F)^2} (3F^2 - 2\eta F M - 5M^2 + 2\mu^2) \right. \\
&\quad - 4\eta F \mu^3 \tan^{-1} \left( \frac{M + \eta F}{\sqrt{\mu^2 - (M + \eta F)^2}} \right) \\
&\quad - (3M^4 + 8\eta F M^3 + 6F^2 M^2 - F^4) \ln \left( \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - (M + \eta F)^2}}{M + \eta F} \right) \Big] \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\eta, \alpha} \frac{1}{12} \left[ -\mu \sqrt{\mu^2 - (M + \eta F)^2} (3F^2 - 2\eta F M - 5M^2 + 2\mu^2) \right. \\
&\quad + 4\eta F \mu^3 \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{\mu^2 - (M + \eta F)^2}}{M + \eta F} \right) \\
&\quad - (3M^4 + 8\eta F M^3 + 6F^2 M^2 - F^4) \ln \left( \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - (M + \eta F)^2}}{M + \eta F} \right) \Big] \quad (H.4)
\end{aligned}$$

と得られる。2 行目、3 行目の変形には

$$\tan^{-1} \left( \frac{1}{x} \right) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x \quad \dots x > 0 \quad (H.5)$$

の関係を用いた。

■ 積分範囲が分割されている場合 (G.6) 式の範囲を取る場合の有効ポテンシャルを計算する。有効ポテンシャルは

$$\begin{aligned}
\Phi_f &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\eta, \alpha} \int_{\frac{\mu^2 - \Lambda^2 - M^2 - F^2}{2\eta F}}^{\mu - \eta F} dq \int_0^{\sqrt{\mu^2 - (q + \eta F)^2}} dp_z (E - \mu) \\
&\quad + \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\eta, \alpha} \int_M^{\frac{\mu^2 - \Lambda^2 - M^2 - F^2}{2\eta F}} dq \int_0^{\sqrt{\Lambda^2 + M^2 - q^2}} dp_z (E - \mu) \\
&= \Phi_{f1} + \Phi_{f2}, \quad (H.6)
\end{aligned}$$



のような形をしている。ここで、 $\Phi_{f1}$  と  $\Phi_{f2}$  はそれぞれ、(H.6) 式の一行目の第一項、第二項に相当する。それぞれの項について計算する。

$\Phi_{f1}$  の計算 これは、(H.2) 式において  $q_{Max} = \mu - \eta F$  ,  $q_{min} = \frac{\mu^2 - \Lambda^2 - M^2 - F^2}{2\eta F} \equiv X_+$  とした場合に対応する。

$$\begin{aligned}
\Phi_{f1} &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\eta, \alpha} \frac{1}{12} \left[ \mu \sqrt{\mu^2 - (q + \eta F)^2} (3F^2 - 2\eta F q - 5q^2 + 2\mu^2) \right. \\
&\quad + 4\eta F \mu^3 \tan^{-1} \left( \frac{q + \eta F}{\sqrt{\mu^2 - (q + \eta F)^2}} \right) \\
&\quad \left. + (3q^4 + 8\eta F q^3 + 6F^2 q^2 - F^4) \ln \left( \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - (q + \eta F)^2}}{|q + \eta F|} \right) \right]_{X_+}^{\mu - \eta F} \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\eta, \alpha} \frac{1}{12} \left[ 4\eta F \mu^3 \left( \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left( \frac{0}{\mu} \right) \right) - \mu \sqrt{\mu^2 - (X_+ + \eta F)^2} (3F^2 - 2\eta F X_+ - 5X_+^2 + 2\mu^2) \right. \\
&\quad - 4\eta F \mu^3 \tan^{-1} \left( \frac{X_+ + \eta F}{\sqrt{\mu^2 - (X_+ + \eta F)^2}} \right) \\
&\quad \left. - (3X_+^4 + 8\eta F X_+^3 + 6F^2 X_+^2 - F^4) \ln \left( \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - (X_+ + \eta F)^2}}{X_+ + \eta F} \right) \right] \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\eta, \alpha} \frac{1}{12} \left[ 4\eta F \mu^3 \frac{\pi}{2} - \mu \sqrt{\mu^2 - (X_+ + \eta F)^2} (3F^2 - 2\eta F X_+ - 5X_+^2 + 2\mu^2) \right. \\
&\quad - 4\eta F \mu^3 \tan^{-1} \left( \frac{X_+ + \eta F}{\sqrt{\mu^2 - (X_+ + \eta F)^2}} \right) \\
&\quad \left. - (3X_+^4 + 8\eta F X_+^3 + 6F^2 X_+^2 - F^4) \ln \left( \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - (X_+ + \eta F)^2}}{X_+ + \eta F} \right) \right] \quad (H.7)
\end{aligned}$$

$\Phi_{f2}$  の計算 これは、(H.1) 式において  $q_{Max} = X_+$  ,  $q_{min} = M$  とした場合に対応する。

$$\begin{aligned}
\Phi_{f2} &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\eta, \alpha} \int_M^{X_+} dq \left[ q \sqrt{\Lambda^2 + M^2 - q^2} \sqrt{\Lambda^2 + M^2 - q^2 + (q + \eta F)^2} \right. \\
&\quad \left. + q (q + \eta F)^2 \ln \left( \frac{\sqrt{\Lambda^2 + M^2 - q^2} + \sqrt{\Lambda^2 + M^2 - q^2 + (q + \eta F)^2}}{|q + \eta F|} \right) \right] \\
&\quad + \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\eta, \alpha} \frac{2}{3} \mu \left[ (\Lambda^2 + M^2 - X_+^2)^{3/2} - \Lambda^3 \right] \quad (H.8)
\end{aligned}$$

## H.2 $\eta F < 0$ の場合

■  $0 \leq p_z \leq \sqrt{\mu^2 - (q - |\eta F|)}$  ,  $M \leq q \leq \mu + |\eta F|$  の場合 これは (H.2) 式において  $\eta F$  を  $-|\eta F|$  に置き換えて、 $q_{Max} = \mu + |\eta F|$  ,  $q_{min} = M$  とした場合に対応する。(H.4) 式とほぼ同様にして以下のように計算できる。

$$\begin{aligned}
\Phi_f &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\eta, \alpha} \frac{1}{12} \left[ \mu \sqrt{\mu^2 - (q - |\eta F|)^2} (3F^2 + 2|\eta F|q - 5q^2 + 2\mu^2) \right. \\
&\quad \left. - 4|\eta F|\mu^3 \tan^{-1} \left( \frac{q - |\eta F|}{\sqrt{\mu^2 - (q - |\eta F|)^2}} \right) \right. \\
&\quad \left. + (3q^4 - 8|\eta F|q^3 + 6F^2q^2 - F^4) \ln \left( \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - (q - |\eta F|)^2}}{|q - |\eta F||} \right) \right]_{M}^{\mu + |\eta F|} \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\eta, \alpha} \frac{1}{12} \left[ -4|\eta F|\mu^3 \left( \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left( \frac{0}{\mu} \right) \right) - \mu \sqrt{\mu^2 - (M - |\eta F|)^2} (3F^2 + 2|\eta F|M - 5M^2 + 2\mu^2) \right. \\
&\quad \left. + 4|\eta F|\mu^3 \tan^{-1} \left( \frac{M - |\eta F|}{\sqrt{\mu^2 - (M - |\eta F|)^2}} \right) \right. \\
&\quad \left. - (3M^4 - 8|\eta F|M^3 + 6F^2M^2 - F^4) \ln \left( \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - (M - |\eta F|)^2}}{|M - |\eta F||} \right) \right] \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\eta, \alpha} \frac{1}{12} \left[ -\mu \sqrt{\mu^2 - (M - |\eta F|)^2} (3F^2 + 2|\eta F|M - 5M^2 + 2\mu^2) \right. \\
&\quad \left. - 4|\eta F|\mu^3 \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{\mu^2 - (M - |\eta F|)^2}}{M - |\eta F|} \right) \right. \\
&\quad \left. - (3M^4 - 8|\eta F|M^3 + 6F^2M^2 - F^4) \ln \left( \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - (M - |\eta F|)^2}}{|M - |\eta F||} \right) \right] \quad (\text{H.9})
\end{aligned}$$

■  $0 \leq p_z \leq \sqrt{\mu^2 - (q - |\eta F|)^2}$ ,  $\mu - |\eta F| \leq q \leq \mu + |\eta F|$  の場合 これは (H.9) 式において、 $q_{min} = \mu - |\eta F|$  とした場合と同じ形になる。この場合はほとんどの項が消えて

$$\begin{aligned}
\Phi_f &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\eta, \alpha} \frac{1}{12} \left[ \mu \sqrt{\mu^2 - (q - |\eta F|)^2} (3F^2 + 2|\eta F|q - 5q^2 + 2\mu^2) \right. \\
&\quad \left. - 4|\eta F|\mu^3 \tan^{-1} \left( \frac{q - |\eta F|}{\sqrt{\mu^2 - (q - |\eta F|)^2}} \right) \right. \\
&\quad \left. + (3q^4 - 8|\eta F|q^3 + 6F^2q^2 - F^4) \ln \left( \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - (q - |\eta F|)^2}}{|q - |\eta F||} \right) \right]_{\mu - |\eta F|}^{\mu + |\eta F|} \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\eta, \alpha} \frac{1}{12} \left[ -4|\eta F|\mu^3 \left( \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left( \frac{0}{\mu} \right) \right) + 4|\eta F|\mu^3 \left( -\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left( \frac{0}{\mu} \right) \right) \right] \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\eta, \alpha} \left[ -\frac{\pi}{3} |\eta F| \mu^3 \right]
\end{aligned} \tag{H.10}$$

2 行目への式変形には (H.5) 式と

$$\tan^{-1} \left( \frac{1}{x} \right) = -\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x \quad \cdots x < 0 \tag{H.11}$$

の公式を用いた。

■ 積分範囲が分割されている場合 (G.11) 式の範囲を取る場合の有効ポテンシャルを計算する。 $\eta F \geq 0$  の時と同様に有効ポテンシャルは

$$\begin{aligned}
\Phi_f &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\eta, \alpha} \int_{M \text{ or } |\eta F| - \mu}^{\frac{-\mu^2 + \Lambda^2 + M^2 + F^2}{2|\eta F|}} dq \int_0^{\sqrt{\mu^2 - (q + \eta F)^2}} dp_z (E - \mu) \\
&\quad + \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\eta, \alpha} \int_{\frac{-\mu^2 + \Lambda^2 + M^2 + F^2}{2|\eta F|}}^{\sqrt{\Lambda^2 + M^2}} dq \int_0^{\sqrt{\Lambda^2 + M^2 - q^2}} dp_z (E - \mu) \\
&= \Phi_{f3M \text{ or } f3F} + \Phi_{f4},
\end{aligned} \tag{H.12}$$

のような形をしている。ここで、 $\Phi_{f3M}$ 、 $\Phi_{f3F}$  と  $\Phi_{f4}$  はそれぞれ、(H.12) 式の一行目の第一項、第二項に相当する。 $\Phi_{f3M}$  と  $\Phi_{f3F}$  はそれぞれ第一項の  $q$  についての積分範囲の下端で区別していて、下端が  $M$  となる場合を  $\Phi_{f3M}$  と、下端が  $|\eta F| - \mu$  となる場合を  $\Phi_{f3F}$  と書いた。以下でそれぞれの項について計算していく。  
 $\Phi_{f3M}$  の計算 これは、(H.2) 式において  $q_{Max} = \frac{-\mu^2 + \Lambda^2 + M^2 + F^2}{2|\eta F|} \equiv X_-$ ,  $q_{min} = M$  とした場合に対応する。

$$\begin{aligned}
\Phi_{f3M} &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\eta,\alpha} \frac{1}{12} \left[ \mu \sqrt{\mu^2 - (q + \eta F)^2} (3F^2 - 2\eta F q - 5q^2 + 2\mu^2) \right. \\
&\quad + 4\eta F \mu^3 \tan^{-1} \left( \frac{q + \eta F}{\sqrt{\mu^2 - (q + \eta F)^2}} \right) \\
&\quad + (3q^4 + 8\eta F q^3 + 6F^2 q^2 - F^4) \ln \left( \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - (q + \eta F)^2}}{|q + \eta F|} \right) \Big]_M^{X_-} \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\eta,\alpha} \frac{1}{12} \left[ \mu \sqrt{\mu^2 - (X_- + \eta F)^2} (3F^2 - 2\eta F X_- - 5q^2 + 2\mu^2) \right. \\
&\quad + 4\eta F \mu^3 \tan^{-1} \left( \frac{X_- + \eta F}{\sqrt{\mu^2 - (X_- + \eta F)^2}} \right) \\
&\quad + (3X_-^4 + 8\eta F X_-^3 + 6F^2 X_-^2 - F^4) \ln \left( \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - (X_- + \eta F)^2}}{|X_- + \eta F|} \right) \\
&\quad - \mu \sqrt{\mu^2 - (M + \eta F)^2} (3F^2 - 2\eta F M - 5M^2 + 2\mu^2) \\
&\quad - 4\eta F \mu^3 \tan^{-1} \left( \frac{M + \eta F}{\sqrt{\mu^2 - (M + \eta F)^2}} \right) \\
&\quad \left. - (3M^4 + 8\eta F M^3 + 6F^2 M^2 - F^4) \ln \left( \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - (M + \eta F)^2}}{|M + \eta F|} \right) \right] \quad (\text{H.13})
\end{aligned}$$

$\Phi_{f3F}$  の計算 これは、積分の下端が  $q_{min} = |\eta F| - \mu$  となっていることを除けば (H.13) 式と同様である。

$$\begin{aligned}
\Phi_{f3M} &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\eta, \alpha} \frac{1}{12} \left[ \mu \sqrt{\mu^2 - (q + \eta F)^2} (3F^2 - 2\eta F q - 5q^2 + 2\mu^2) \right. \\
&\quad + 4\eta F \mu^3 \tan^{-1} \left( \frac{q + \eta F}{\sqrt{\mu^2 - (q + \eta F)^2}} \right) \\
&\quad + (3q^4 + 8\eta F q^3 + 6F^2 q^2 - F^4) \ln \left( \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - (q + \eta F)^2}}{|q + \eta F|} \right) \Big]_{|\eta F| - \mu}^{X_-} \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\eta, \alpha} \frac{1}{12} \left[ \mu \sqrt{\mu^2 - (X_- + \eta F)^2} (3F^2 - 2\eta F X_- - 5q^2 + 2\mu^2) \right. \\
&\quad + 4\eta F \mu^3 \tan^{-1} \left( \frac{X_- + \eta F}{\sqrt{\mu^2 - (X_- + \eta F)^2}} \right) \\
&\quad + (3X_-^4 + 8\eta F X_-^3 + 6F^2 X_-^2 - F^4) \ln \left( \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - (X_- + \eta F)^2}}{|X_- + \eta F|} \right) \\
&\quad \left. - 4\eta F \mu^3 \tan^{-1} \left( \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left( \frac{0}{\mu} \right) \right) \right] \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\eta, \alpha} \frac{1}{12} \left[ \mu \sqrt{\mu^2 - (X_- + \eta F)^2} (3F^2 - 2\eta F X_- - 5q^2 + 2\mu^2) \right. \\
&\quad + (3X_-^4 + 8\eta F X_-^3 + 6F^2 X_-^2 - F^4) \ln \left( \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - (X_- + \eta F)^2}}{|X_- + \eta F|} \right) \\
&\quad \left. - 4\eta F \mu^3 \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{\mu^2 - (X_- + \eta F)^2}}{X_- + \eta F} \right) \right] \tag{H.14}
\end{aligned}$$

$\Phi_{f4}$  の計算 これは、(H.1) 式において  $q_{Max} = \sqrt{\Lambda^2 + M^2}$  ,  $q_{min} = X_-$  とした場合に対応する。

$$\begin{aligned}
\Phi_{f4} &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\eta, \alpha} \int_{X_-}^{\sqrt{\Lambda^2 + M^2}} dq \left[ q \sqrt{\Lambda^2 + M^2 - q^2} \sqrt{\Lambda^2 + M^2 - q^2 + (q + \eta F)^2} \right. \\
&\quad + q (q + \eta F)^2 \ln \left( \frac{\sqrt{\Lambda^2 + M^2 - q^2} + \sqrt{\Lambda^2 + M^2 - q^2 + (q + \eta F)^2}}{|q + \eta F|} \right) \Big] \\
&\quad - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\eta, \alpha} \frac{2}{3} \mu (\Lambda^2 + M^2 - X_-^2)^{3/2} \tag{H.15}
\end{aligned}$$

■  $0 \leq p_z \leq \sqrt{\Lambda^2 + M^2 - q^2}$  ,  $M \leq q \leq \sqrt{\Lambda^2 + M^2}$  の場合 これは、(H.1) 式において  $q_{Max} = \sqrt{\Lambda^2 + M^2}$  ,  $q_{min} = M$  とした場合に対応する。

$$\begin{aligned}
\Phi_f &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\eta, \alpha} \int_M^{\sqrt{\Lambda^2 + M^2}} dq \left[ q \sqrt{\Lambda^2 + M^2 - q^2} \sqrt{\Lambda^2 + M^2 - q^2 + (q + \eta F)^2} \right. \\
&\quad \left. + q (q + \eta F)^2 \ln \left( \frac{\sqrt{\Lambda^2 + M^2 - q^2} + \sqrt{\Lambda^2 + M^2 - q^2 + (q + \eta F)^2}}{|q + \eta F|} \right) \right] \\
&\quad + \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\eta, \alpha} \left[ \frac{2}{3} \mu (\Lambda^2 + M^2 - q^2)^{3/2} \right]_M^{\sqrt{\Lambda^2 + M^2}} \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\eta, \alpha} \int_M^{\sqrt{\Lambda^2 + M^2}} dq \left[ q \sqrt{\Lambda^2 + M^2 - q^2} \sqrt{\Lambda^2 + M^2 - q^2 + (q + \eta F)^2} \right. \\
&\quad \left. + q (q + \eta F)^2 \ln \left( \frac{\sqrt{\Lambda^2 + M^2 - q^2} + \sqrt{\Lambda^2 + M^2 - q^2 + (q + \eta F)^2}}{|q + \eta F|} \right) \right] \\
&\quad - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\eta, \alpha} \frac{2}{3} \mu \Lambda^3
\end{aligned} \tag{H.16}$$

## 参考文献

- [1] K. Fukushima and T. Hatsuda, *Rep. Prog. Phys.* **74**, 014001 (2011).
- [2] R. C. Duncan and C. Thompson, *Astrophys. J.* **392**, L9 (1992).
- [3] C. Thompson and R. C. Duncan, *Astrophys. J.* **408**, 194 (1993), *ibid.* **473**, 322 (1996).
- [4] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.* **122**, 345 (1961), *Phys. Rev.* **124**, 246 (1961).
- [5] S. P. Klevansky, *Rev. Mod. Phys.* **64**, 649 (1992).
- [6] T. Hatsuda and T. Kunihiro, *Phys. Rep.* **247**, 221 (1994).
- [7] M. Buballa, *Phys. Rep.* **407**, 205 (2005).
- [8] E. Nakano, T. Maruyama and T. Tatsumi, *Phys. Rev. D* **68**, 105001 (2003).
- [9] T. Tatsumi, T. Maruyama and E. Nakano, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* No. 153, 190 (2004).
- [10] S. Maedan, *Prog. Theor. Phys.* **118**, 729 (2007).
- [11] M. Morimoto, Y. Tsue, J. da Providência, C. Providência and M. Yamamura, *Int. J. Mod. Phys. E* **27**, 1850028 (2018).
- [12] M. Morimoto, Y. Tsue, J. da Providência, C. Providência and M. Yamamura, *Int. J. Mod. Phys. E* **29**, 2050003 (2020).
- [13] H. Bohr, P. K. Panda, C. Providência and J. da Providência, *Braz. J. Phys.* **42**, 68 (2012).
- [14] H. Bohr, P. K. Panda, C. Providência and J. da Providência, *Int. J. Mod. Phys. E* **22**, 1350019 (2013).
- [15] Y. Tsue, J. da Providência, C. Providência and M. Yamamura, *Prog. Theor. Phys.* **128**, 507 (2012).

- [16] Y. Tsue, J. da Providência, C. Providência, M. Yamamura and H. Bohr, *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2013**, Issue 10, 103D01 (2013).
- [17] Y. Tsue, J. da Providência, C. Providência, M. Yamamura and H. Bohr, *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2015**, Issue 1, 013D02 (2015).
- [18] Y. Tsue, J. da Providência, C. Providência, M. Yamamura and H. Bohr, *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2015**, Issue 10, 103D01 (2015).
- [19] H. Matsuoka, Y. Tsue, J. da Providência, C. Providência, M. Yamamura and H. Bohr, *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2016**, Issue 5, 053D02 (2016).
- [20] H. Matsuoka, Y. Tsue, J. da Providência, C. Providência and M. Yamamura, *Phys. Rev. D* **95**, 054025 (2017).
- [21] E. J. Ferrer, V. de la Incera, I. Portillo and M. Quiroz, *Phys. Rev. D* **89**, 085034 (2014).
- [22] T. Maruyama and T. Tatsumi, *Phys. Rev. D* **96**, 096016 (2017).
- [23] T. Maruyama, E. Nakano, K. Yanase and N. Yoshinaga, *Phys. Rev. D* **97**, 114014 (2018).
- [24] A. Abhishek, A. Das, H. Mishra and R. K. Mohapatra, *Phys. Rev. D* **100**, 114012 (2019).
- [25] A. Kagawa, M. Morimoto, Y. Tsue, J. da Providência, C. Providência and M. Yamamura, *Int. J. Mod. Phys. E* **29**, 2050036 (2020).
- [26] M. Kobayashi and T. Maskawa, *Prog. Theor. Phys.* **44**, 1422 (1970).
- [27] G. 't Hooft, *Phys. Rev. D* **14**, 3432 (1976). [Erratum, *ibid.* **D 18**, 2199 (1978).]
- [28] H. Matsuoka, Y. Tsue, J. da Providência, C. Providência and M. Yamamura, *Phys. Rev. D* **98**, 074027 (2018).
- [29] M. Morimoto, Y. Tsue, J. da Providência, C. Providência and M. Yamamura, DOI:10.1142/S0218301320500937.
- [30] M. Jaminon, M. C. Ruvio and C. A. de Sousa, *Int. J. Mod. Phys. A* **17**, 4903 (2002).
- [31] G. A. Lalazissis, Tamara Nikšić, D. Vretenar and P. Ring, *Phys. Rev. C* **71**, 024312 (2005).
- [32] S. Benic, D. Blaschke, D. E. Alvarez-Castillo, T. Fischer, and S. Typel, *Astron. Astrophys.* **577**, A40 (2015).
- [33] D. E. Alvarez-Castillo and D. B. Blaschke, *Phys. Rev. C* **96**, 045809 (2017).
- [34] J. B. Hartle, *Astrophys. J.* **150**, 1005 (1967).
- [35] K. Yanase, N. Yoshinaga, E. Nakano and C. Watanabe, *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2019**, Issue 8, 083E01 (2019).
- [36] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Pergamon Press (1971).