

博士論文

QCD モノポールによるクォーク閉じ込め機構と
そのゲージ配位依存性について

令和3年3月

高知大学大学院総合人間自然科学研究科
博士課程応用自然科学専攻

平口敦基

目次

1	Introduction	2
2	背景	4
2.1	Lattice QCD と連続極限	4
2.2	QCD モノポール	9
2.3	非可換ビアンキ恒等式の破れによるアーベリアンモノポール	13
3	SU(2) ゲージ理論における VNABI による双対マイスナー効果とモノポールドミノランス	20
3.1	Lattice 上での Abelian 射影	20
3.2	Improved action	20
3.3	ゲージ固定 (MCG, DLCG, MAWL, MAU1)	21
3.4	モノポールドミノランス	23
3.5	Flux-tube profile	30
4	SU(3) ゲージ理論における VNABI による双対マイスナー効果	43
4.1	Wilson action	43
4.2	Flux-tube profile at finite temperature	43
4.3	格子上での Abelian 射影	44
5	まとめと考察	48
6	付録	49
6.1	SU(2)Link 変数の覚書	49
6.2	Jackknife 法	50
6.3	APE smearing	52
7	謝辞	53

1 Introduction

日常的に飲むコップ一杯の水の中には膨大な水分子が入っている。この水分子は構造を持っており酸素原子ひとつ、水素原子ふたつでできている。これらの原子は原子核と電子でできており、原子核は陽子と中性子でできている。現在、素粒子論では陽子と中性子は構造を持っており素粒子であるクォークとグルーオンで作られていると考えられている。このクォークとグルーオンを記述する力学は量子色力学 (Quantum Chromodynamics = QCD) で記述できると考えられている。しかしながら、クォークとグルーオンの存在は我々のエネルギースケールでは観測することができない。我々のエネルギースケールにおいては常にクォーク、グルーオンはそれらの複合粒子である陽子、中性子といったハドロンとして観測される。これをクォークの閉じ込めという。この閉じ込め機構は解明されていない難問に数えられている [1]。本研究の目的はクォークの閉じ込め機構の解明である。

クォークの閉じ込めは QCD の漸近自由性からも示唆される。クォークとグルーオン、グルーオンとグルーオンの相互作用の強さは結合定数で決まる。QCD では摂動論を用いた近似法によりエネルギースケールが高くなるにつれて結合定数の大きさは小さくなり、低くなるにつれて大きくなる。高エネルギーで結合定数が小さくなっていくことを漸近自由性という。この性質のため、QCD の低エネルギー領域を調べるには摂動論を用いない解析が必要であり、閉じ込めという非摂動効果の解析はモンテカルロ法を用いた数値シミュレーションが必要不可欠と考えられている。実際に、格子 QCD シミュレーションと呼ばれる QCD に対する第一原理計算は大きく発展しており、閉じ込め非閉じ込めの相転移は確かめられているが、ハドロンの質量を説明するカイラル対称性の自発的破れとの関係は明らかにされておらずクォークと反クォーク間の一次元状のカラーフラックスチューブがなぜ形成されるのかなど解明されていないことは多数存在する。これらの問題を解決することは QCD 相図の解明の進展に必要な不可欠である。

これまでに考えられてきたクォークの閉じ込め機構のアイデアのひとつとして、双対超伝導描像に基づいた双対マイスナー効果がある [2, 3]。通常の超伝導体の特徴としてマイスナー効果 (完全反磁性) があるがこれはそのアナロジーである。第二種の超伝導体では外部磁場が臨界磁場よりも大きくなると磁場が絞られた状態で入り込み周りにクーパー対を作り凝縮した電子が渦電流をつくる。これが通常の超伝導現象である。この第二種の超伝導体に対して磁気単極子 (モノポール) の存在を仮定する。磁気単極子が超伝導体の内部に存在すると考えると磁束が絞られた状態を考えることができる。さらに今、磁気単極子が存在しているので双対変換を行うと超伝導体内部に電束が絞られ、その周りを磁気単極子が凝縮し磁流を作っていると考えることができる。これを双対超伝導描像といい、上記にあがった性質を双対マイスナー効果という。これをクォーク間のカラー電束と考えると、カラーの磁気単極子が凝縮しカラー電束が絞られている状態と考えられる。クォーク間のカラー電束が絞られることはクォーク間に強い引力が働いていることを意味しており、クォークの閉じ込めを意味している。つまり、双対超伝導体を QCD の真空と考えるのである。

この双対超伝導描像による閉じ込め機構を考える上で重要になるのはモノポールである。QCD にはモノポールは自然に含まれていない。QCD においてモノポールを定義することが、この描像を確かめる上で必要不可欠である。QCD でモノポールを定義する方法として、't Hooft による Abelian 射影がある [4]。これは、部分的なゲージ固定を行うことで $SU(N)$ ゲージ理論に対して $U(1)^{N-1}$ のモノポールを定義することができる。このモノポールは格子 QCD シミュレーションで $SU(2)$ ゲージ理論および $SU(3)$ ゲージ理論で Maximal Abelian gauge 固定 (MAG 固定) [5, 6] や様々なゲージ固定のもと数値的に non-Abelian のストリングテンションを再現するモノポールドミナンスが確かめられている。これらの研究の発展は

[7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17] に見られる。さらに、ゲージ固定なしでもモノポールドミナンスは確認されている [18, 19, 20]。しかしながら、このゲージ固定なしのときのモノポールは Lattice 上で形式的に定義されたものであり、これまで連続極限で何かは理解されていなかった。

最近、連続理論において Dirac モノポールのアイデアと non-Abelian のゲージ場に Line singularity があると非可換ビアンキ恒等式の破れ (VNABI) が Abelian モノポールカレントを導くことが示された。このモノポールはカラーごとに定義することができ SU(2) ゲージ理論では 3 色、SU(3) ゲージ理論では 8 色のモノポールカレントを定義できる [21, 22, 23]。先行研究 [19] で Lattice 上で定義したモノポールは連続極限でこの非可換ビアンキ恒等式の破れによるモノポールであると考えられる。このモノポールによるモノポールドミナンスを調べるため、格子上で非可換ビアンキ恒等式の破れを調べることが重要であるがこれは難しいため、モノポールを Lattice 上で定義し、この連続極限を調べることで非可換ビアンキ恒等式の破れを間接的に確かめる。

これまで、SU(2) ゲージ理論においてこのモノポールの連続極限はブロックスピン変換を用いたモノポール密度の計算から確かめられてきているが、MAG 固定のときと同様にストリングテンションを再現するのか SU(2) ゲージ理論および SU(3) ゲージ理論の両方で調べられていない。さらに、これまでの MAG 固定の計算と異なりモノポールカレントは SU(2) では 3 色、SU(3) では 8 色定義できるため、双対マイスナー効果によりできるカラーフラクチューブの新しい描像が期待される。そこで、本研究では SU(2) ゲージ理論および SU(3) ゲージ理論の両方でカラー電場の空間分布およびモノポールカレントの空間分布を計算することを考える。さらに、ストリングテンションへの寄与を調べ、モノポールドミナンスを調べる。

本論文では、2 章で格子ゲージ理論での観測量および連続極限に関して簡潔に説明し、QCD におけるモノポールの自由度に関して説明する。さらに、非可換ビアンキ恒等式の破れによるモノポールの説明を行う。3 章では SU(2) ゲージ理論における非可換ビアンキ恒等式の破れによるモノポールでのストリングテンションおよび双対マイスナー効果の研究結果の説明を行う。4 章では SU(3) ゲージ理論における非可換ビアンキ恒等式の破れによるモノポールを定義するための格子上の Abelian 射影の方法を示し、カラーフラクチューブの研究結果を報告する。最後に 5 章で本論文のまとめを述べ、今後の展望を述べる。

本論文の成果の SU(2) ゲージ理論の主要部分は、[24] で論じられている。

2 背景

2.1 Lattice QCD と連続極限

クォークとグルーオンのダイナミクスは局所ゲージ変換に対して不変なゲージ理論である量子色力学 (QCD) により記述される。そのラグランジアン密度は、

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} \quad (2.1)$$

$$D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu^a \frac{\lambda^a}{2} \quad (2.2)$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf_{abc}A_\mu^b A_\nu^c \quad (2.3)$$

である。このラグランジアンからクォークはグルーオンを媒介して相互作用を行うことがわかる。また、そのときにカラーを交換して相互作用を行う。この QCD はカラー SU(3) ゲージ変換に対して不変な理論になっている。

クォークの閉じ込め機構は、上記の QCD で説明できるはずである。しかしながら、クォークが閉じ込められる現象というのは我々の住む低エネルギー領域であり、この低エネルギーの性質は QCD の漸近的自由性によって摂動論による解析を行うことができない。場の量子論において摂動論は強力な手法であるが、クォークの閉じ込め機構の研究に対してはうまく機能しない。このことから、別の手法を考える必要がある。そこで、時空を離散化した格子上で QCD を考える。

2.1.1 格子ゲージ理論

時空間を格子間隔 a で離散化を行うと自動的に運動量にカットオフをいれることになり厳密に理論を定義することができる。一方で、格子化したことにより、ローレンツ対称性といった対称性はあらわに破れてしまう。そこで観測量の評価には格子 QCD では連続極限を正しくとることが重要になる。ここでは、基本事項をまとめた。

4次元空間を図1のように離散化を行う。ここで、サイトにはクォークを定義し、それらを Link 変数でつなぐことでゲージ不変な理論が構成される。格子ゲージ理論では Link 変数が重要な量になる。今、Link 変数を

$$U_\mu(s) = \exp[i\theta_\mu(s)] \quad (2.4)$$

とする。ここでは、Pure SU(2) ゲージ理論を構成する。まずブラケットとよばれる Link 変数でつくった正方形の面を考える。

$$U_\mu(s)U_\nu(s+\hat{\mu})U_\mu^\dagger(s+\hat{\nu})U_\nu^\dagger(s) \quad (2.5)$$

$$= e^{i\theta_\mu(s)} e^{i\theta_\nu(s+\hat{\mu})} e^{-i\theta_\mu(s+\hat{\nu})} e^{-i\theta_\nu(s)} \quad (2.6)$$

であり、exponential の肩が行列であるためベーカー・キャンベル・ハウズドルフの公式

$$e^X e^Y = e^{X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]+\dots} \quad (2.7)$$

を用いると、ブラケットは

$$\begin{aligned} (\text{RHS}) &= \exp[i\theta_\mu(s) + i\theta_\nu(s+\hat{\mu}) + \frac{1}{2}[i\theta_\mu(s), i\theta_\nu(s+\hat{\mu})] - i\theta_\mu(s+\hat{\nu}) - i\theta_\nu(s) \\ &\quad + \frac{1}{2}[-i\theta_\mu(s+\hat{\nu}), -i\theta_\nu(s)] + \dots] \end{aligned} \quad (2.8)$$

となる。ここで、ゲージ場 A_μ を用いて

$$\theta_\mu(s) = agA_\mu(s) \quad (2.9)$$

とする。また

$$\begin{aligned} \theta_\mu(s + \hat{\nu}) &\approx \theta_\mu(s) + a\partial_\nu\theta_\mu(s) + O(a^2) \\ &= agA_\mu(s) + a^2g\partial_\nu A_\mu(s) + \dots \end{aligned}$$

よりブラケットを考えると、(exponential の肩のみ記載します。)

$$\begin{aligned} (\text{RHS の肩}) &= iagA_\mu(s) + iagA_\nu(s + \hat{\mu}) + \frac{1}{2}[iagA_\mu(s), iagA_\nu(s + \hat{\mu})] \\ &\quad - iagA_\mu(s + \hat{\nu}) - iagA_\nu(s) + \frac{1}{2}[-iagA_\mu(s + \hat{\nu}), -iagA_\nu(s)] + \dots \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} &= iagA_\mu(s) + i(agA_\nu(s) + a^2g\partial_\mu A_\nu(s)) + \frac{1}{2}[iagA_\mu, iagA_\nu(s) + ia^2g\partial_\mu A_\nu(s)] \\ &\quad - i(agA_\mu(s) + a^2g\partial_\nu A_\mu(s)) - iagA_\nu(s) + \frac{1}{2}[iagA_\mu(s) + ia^2g\partial_\nu A_\mu(s), iagA_\nu(s)] + \dots \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} &= ia^2g\partial_\mu A_\nu(s) - ia^2g\partial_\nu A_\mu(s) - \frac{1}{2}a^2g^2[A_\mu(s), A_\nu(s)] - \frac{1}{2}a^2g^2[A_\mu(s), A_\nu(s)] + \dots \\ &= ia^2g\{\partial_\mu A_\nu(s) - \partial_\nu A_\mu(s) + ig[A_\mu(s), A_\nu(s)] + O(a^2)\} \end{aligned} \quad (2.12)$$

となる。よって、場の強さを

$$F_{\mu\nu}(s) = \partial_\mu A_\nu(s) - \partial_\nu A_\mu(s) + ig[A_\mu(s), A_\nu(s)] \quad (2.13)$$

とし、ブラケットは

$$U_\mu(s)U_\nu(s + \hat{\mu})U_\mu^\dagger(s + \hat{\nu})U_\nu^\dagger(s) = e^{ia^2gF_{\mu\nu}(s)} \quad (2.14)$$

となる。

次にゲージ不変になるような作用をブラケットを用いて

$$S = \beta \sum_{s, \mu < \nu} \left[1 - \frac{1}{4} \text{Tr}(U_\mu(s)U_\nu(s + \hat{\mu})U_\mu^\dagger(s + \hat{\nu})U_\nu^\dagger(s) + h.c.) \right] \quad (2.15)$$

とする。この作用の連続極限 $a \rightarrow 0$ を考える。右辺を変形すると、

$$S = \beta \sum_{s, \mu < \nu} \left[1 - \frac{1}{4} \text{Tr}(2\cos(a^2gF_{\mu\nu}(s))) \right] \quad (2.16)$$

となる。 $a \rightarrow 0$ のとき

$$\text{Tr} 2\cos(a^2gF_{\mu\nu}) = \text{Tr} 2 \left[\mathbf{I} + a^2gF_{\mu\nu} - \frac{1}{2!}a^4g^2F_{\mu\nu}^2 + \dots \right] \quad (2.17)$$

と展開できる。(I:単位行列) ここで、

$$\text{Tr} a^2gF_{\mu\nu} = \text{Tr} a^2gF_{\mu\nu}^i \sigma^i \quad (2.18)$$

$$= 0 \quad \because \text{Tr} \sigma^i = 0 \quad (2.19)$$

であることから、

$$\text{Tr} 2\cos(a^2 g F_{\mu\nu}) \approx \text{Tr} 2 \left[\mathbb{I} - \frac{1}{2} a^4 g^2 F_{\mu\nu}^2 \right] \quad (2.20)$$

とすると、作用は

$$S \approx \beta \sum_{s, \mu < \nu} \left[1 - \frac{1}{4} \text{Tr} 2 \left[\mathbb{I} - \frac{1}{2} a^4 g^2 F_{\mu\nu}^2 \right] \right] \quad (2.21)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^4x F_{\mu\nu}^i F_{\mu\nu}^j \frac{1}{2} \delta^{ij} \quad \because \text{Tr} \sigma^i \sigma^j = \frac{1}{2} \delta^{ij} \quad (2.22)$$

$$\therefore S \approx \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}^i F_{\mu\nu}^i \quad (2.23)$$

となり、これは連続理論の作用と一致する。上記のように格子ゲージ理論は構成される。

この理論では次元を持った量は格子間隔 a のみである。これは、通常ストリングテンションと呼ばれるクォーク間のポテンシャルの傾きから計算され、

$$a = \frac{\sqrt{\sigma_l}}{\sqrt{\sigma_p}} \quad (2.24)$$

で表される。ここで、 σ_l は格子ゲージ理論から計算される無次元のストリングテンションであり、 σ_p は物理的なストリングテンションであり、 $\sqrt{\sigma_p} = 440 \text{ MeV}$ である。次に、格子ゲージ理論におけるゲージ不変な観測を紹介する。以下の観測からクォーク間のポテンシャルを評価し、クォークが閉じ込められることを調べることができる。

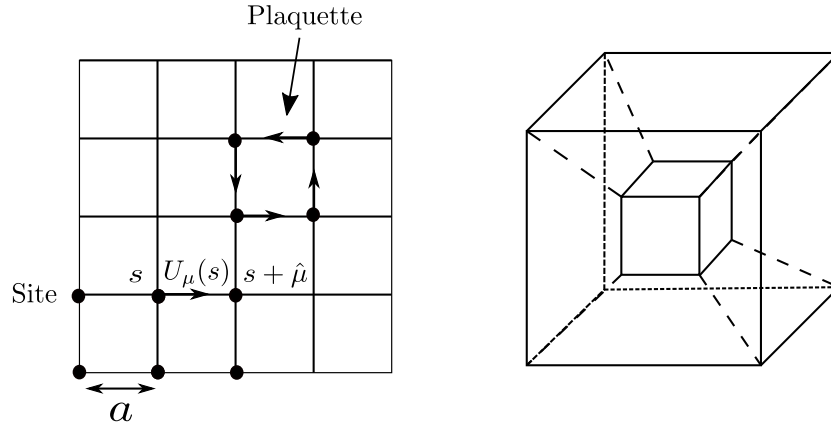


図1 (左図) 4次元格子の断面図、(右図) 4次元空間のキューブ。

2.1.2 Wilson loop

格子ゲージ理論では観測量はゲージ不変であり、Link 変数により構成される。ここで、Wilson loop を述べる。Wilson loop は格子上で、

$$W(C = R \times T) = \text{Tr} \left[\prod_{i \in C} U_i \right] \quad (2.25)$$

と定義される。C は長方形を表していて、R は空間方向、T は時間方向の各辺の長さを表している。これは、物理的には真空中のエネルギーと静的なクォークをいれたときのエネルギー差を表す。すなわち、クォークと反クォークをある距離 R 離して置き、ある時刻 T で消すことに対応している。結果として、エネルギー差はポテンシャルエネルギーと等しく $T \rightarrow \infty$ でクォーク反クォーク間のポテンシャル $V_{q\bar{q}}$ を計算したことになる。すなわち、

$$\langle W(C) \rangle \rightarrow \exp[-TV_{q\bar{q}}(R)] \quad (T \rightarrow \infty) \quad (2.26)$$

となる。つまり、Wilson loop を計算するとポテンシャルエネルギーがわかることになるが、Wilson loop の期待値がどのようにふるまうかに依ってクォーク反クォーク間のポテンシャルが変化することになる。実際に、Wilson loop が以下のようにふるまう。

$$\langle W(C) \rangle \propto \exp(-cRT) \quad (\text{面積則}) \quad (2.27)$$

$$\langle W(C) \rangle \propto \exp(-c'(R+T)) \quad (\text{周辺則}) \quad (2.28)$$

この面積則のとき、静的なポテンシャルはクォークと反クォークの距離に対して線形である。これは、クォークと反クォークを引き離すとその分ポテンシャルエネルギーが増えていくことになり、クォークが閉じ込められることを意味する。つまり、格子ゲージ理論において Wilson loop は閉じ込め・非閉じ込めの秩序パラメータである。

2.1.3 Polyakov loop

ゲージ理論の観測量として、Polyakov loop がある。格子として $S^3 \times T$ を考えると、T の方向を時間と考え、周期的境界条件があるとゲージ不変な観測量として、Polyakov loop は時間方向の Link 変数を用いて、

$$P(s) = \text{Tr} U_4(s, 0)U_4(s, 1) \cdots U_4(s, T) \quad (2.29)$$

と表せる。この Polyakov loop の真空期待値は、逆温度を β とすると

$$\langle P \rangle \rightarrow \exp(-\beta F_q) \quad (2.30)$$

となる。ここで、 F_q は静的なクォーク 1 つを生成するのに必要な自由エネルギーに対応する。Polyakov loop の値によりクォークが閉じ込められているを判断することができる。

$$\langle P \rangle = 0 \rightarrow F_q = \infty \quad (2.31)$$

$$\langle P \rangle \neq 0 \rightarrow F_q \neq \infty \quad (2.32)$$

$$(2.33)$$

となる。すなわち、Polyakov loop の値が 0 のとき自由エネルギーが無限大必要なことになるためクォークが閉じ込められている。Polyakov loop も Wilson loop と同様に閉じ込め・非閉じ込めの秩序変数になっている。また距離 r だけ離れた 2 本の Polyakov loop の相関はクォーク・反クォークの間のポテンシャル $V_{q\bar{q}}$ を与える。

$$\langle P(0)P^\dagger(r) \rangle \propto \exp(-\beta V_{q\bar{q}}(r)) \quad (2.34)$$

と表せる。ここで蛇足ではあるが、Polyakov loop が 0 のとき SU(N) ゲージ理論において Z_N 対称性が保たれており、Polyakov loop が 0 ではないとき Z_N 対称性が破れている。Polyakov loop は Z_N 対称性の秩序変数にもなっている。

2.1.4 連続極限

格子ゲージ理論で、ナイーブに格子間隔 $a \rightarrow 0$ とったときにできる連続理論は非自明である。以下にその理由を示す。まず 3 次元のスピン系を考える。

$$H = - \sum_{s,\mu} \vec{S}(s) \cdot \vec{S}(s + \hat{\mu}) \quad (2.35)$$

これは、強磁性相と常磁性相の相転移をキュリー点 T_c で特徴づけられる。この系における相転移は、相関関数

$$\langle \vec{S}(n) \cdot \vec{S}(m) \rangle = \frac{\sum \vec{S}(n) \cdot \vec{S}(m) \exp(-\beta H)}{\sum \exp(-\beta H)} \quad (2.36)$$

で区別できる。 $T > T_c$ では、

$$\langle \vec{S}(n) \cdot \vec{S}(m) \rangle = e^{-\frac{r}{\xi}} \quad (2.37)$$

となる。ここで、 $r = |\vec{n} - \vec{m}|$ であり、 ξ は相関距離と呼ぶ。 T_c を超える高温では系は乱雑になり、スピン間の相関は指数関数的に減少するが、低温では系が秩序状態になりスピンの向きが同じ方向を向き始めることを相関が示す。このとき、温度を下げるにつれて相関距離 ξ が大きくなり、相転移点 $T = T_c$ で相関距離は、

$$\xi \rightarrow \infty \quad (2.38)$$

となる。

ここで、格子ゲージ理論に話を戻す。格子上的スカラー場に対しての 2 点の連結相関関数を考える。

$$\langle 0 | \hat{\phi}(n_t) \hat{\phi}(0) | 0 \rangle_c = \langle 0 | \hat{\phi}(n_t) \hat{\phi}(0) | 0 \rangle - | \langle 0 | \hat{\phi}(0) | 0 \rangle |^2 \quad (2.39)$$

ここで、 $\hat{\phi}$ は空間的に和をとっている。また、 $|0\rangle$ はハミルトニアン \hat{H} の最低固有状態である。これは、 n_t を大きくすると、

$$\langle 0 | \hat{\phi}(n_t) \hat{\phi}(0) | 0 \rangle_c \rightarrow | \langle 0 | \hat{\phi}(0) | 1 \rangle |^2 e^{-(E_1 - E_0)n_t} \quad (2.40)$$

となる。状態 $|1\rangle$ は空間運動量が 0 の 1 粒子状態であるため、 $E_1 - E_0$ はこの粒子の格子上的質量 m_0 となる。式 (2.37) と同様に指数関数的な減少を表す相関長を、

$$\xi = \frac{1}{m_0} \quad (2.41)$$

と置く。さらに、 \exp の肩は無次元であるため、

$$m_0 n_t = m_p t \quad (2.42)$$

と書ける。 t は次元を持った時間 $t = n_t a$ である。この関係から、格子間隔 a を用いて物理的な質量 m_p は、

$$m_p = \frac{m_0}{a} \quad (2.43)$$

と関係する。これは、ナイーブに連続極限を格子間隔 $a \rightarrow 0$ としたときに物理的な質量が m_p が有限に保たれないことを意味する。すなわち、連続極限をとるとき m_0 も同時に 0 になること、相関長 $\xi \rightarrow \infty$ になることを意味する。つまり、格子ゲージ理論は 2 次相転移点の直上で定義される。統計力学では、温度 T により相転移が起こるが、漸近的自由性を持つ格子ゲージ理論が連続理論で有限な質量を持つようにするには、相互作用の結合定数 g を 0 に持っていた時に、上記の相関長 ξ が無限大になる必要がある。本研究では、複数の結合定数で観測量を調べることで連続極限をとる。

2.2 QCD モノポール

't Hooft は QCD に対して部分的なゲージ固定を行いトポロジカルカレントとしてモノポールカレントを定義した。部分的なゲージ固定の方法は無数に存在すると考えられるが、その中でも MAG 固定はこれまでの先行研究でモノポールドミナンスを示した。これは、モノポールによる閉じ込めを示唆する結果である一方でゲージ固定に依存するという問題が残っている。ここでは、SU(2) ゲージ理論において Lattice 上でのモノポールカレントの定義を述べる。この定義は [25] に基づく。

2.2.1 格子上でのモノポールカレント

この格子上の SU(2) の理論においてアーベリアン射影を用いてモノポールの定義を考えたい。SU(2) 理論においてアーベリアン射影で対角化すべき行列は、

$$X(s) = X_0(s)I + iX_i(s)\sigma_i \quad (2.44)$$

である。I は単位行列、 σ_i はパウリ行列である。($|X|^2 = 1$ である。) ここで、次のようにパラメトライズする。

$$X_1 = \sqrt{1 - X_0^2} \sin\theta \cos\phi \quad (2.45)$$

$$X_2 = \sqrt{1 - X_0^2} \sin\theta \sin\phi \quad (2.46)$$

$$X_3 = \sqrt{1 - X_0^2} \cos\theta \quad (2.47)$$

この θ 、 ϕ を用いて SU(2) のゲージ変換は

$$V(s) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta(s)}{2} & \sin\frac{\theta(s)}{2} e^{-i\phi(s)} \\ -\sin\frac{\theta(s)}{2} e^{i\phi(s)} & \cos\frac{\theta(s)}{2} \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

と表せる。これを用いて X を変換すると、

$$\begin{aligned} V(s)X(s)V^\dagger(s) &= V(s)(X_0(s)I + iX_i(s)\sigma_i)V^\dagger(s) \\ &= X_0(s)I + V(iX_i(s)\sigma_i)V^\dagger(s) \end{aligned} \quad (2.49)$$

となり、

$$\begin{aligned} V(iX_i\sigma_i)V^\dagger &= i\sqrt{1 - X_0^2} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \\ -\sin\frac{\theta}{2} e^{i\phi} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \cos\phi - i\sin\theta \sin\phi \\ \sin\theta \cos\phi + i\sin\theta \sin\phi & -\cos\theta \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \\ \sin\frac{\theta}{2} e^{i\phi} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を計算すると対角化されることを確かめることができる。

$$\begin{aligned}
(\text{RHS}) &= i\sqrt{1-X_0^2} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \\
A &= \cos^2\frac{\theta}{2}\cos\theta + e^{-i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta\cos\phi + ie^{-i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta\sin\phi + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} - ie^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta\sin\phi - \sin^2\frac{\theta}{2}\cos\theta \\
&= \frac{1}{2}(1+\cos\theta)\cos\theta - \frac{1}{2}(1-\cos\theta)\cos\theta + \sin^2\theta\cos\phi\frac{e^{i\phi}+e^{-i\phi}}{2} + \sin^2\theta\sin\phi\frac{e^{i\phi}-e^{-i\phi}}{2i} \\
&= \cos^2\theta + \sin^2\theta\cos^2\phi + \sin^2\theta\sin^2\phi \\
&= 1 \\
B &= -e^{-i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\theta - e^{-2i\phi}\sin^2\frac{\theta}{2}\sin\theta\sin\phi + \cos^2\frac{\theta}{2}\sin\theta\cos\phi - i\cos^2\sin\theta\sin\phi - e^{-i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\theta \\
&= -e^{-i\phi}\sin\theta\{\cos\theta + \cos\phi(\frac{1}{2}e^{-i\phi}(1-\cos\theta) - \frac{1}{2}e^{i\phi}(1+\cos\theta))\} - ie^{-i\phi}\sin\theta\sin\phi[\frac{1}{2}e^{-i\phi}(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}e^{i\phi}(1+\cos\theta)] \\
&= -e^{-i\phi}\sin\theta\{\cos\theta + \cos\phi(-i\sin\phi - \cos\theta\cos\phi)\} - ie^{-i\phi}\sin\theta\sin\phi\{\cos\phi + i\cos\theta\sin\phi\} \\
&= -e^{-i\phi}\sin\theta\cos\theta + e^{-i\phi}\sin\theta\cos\theta(\sin^2\phi + \cos^2\phi) \\
&= 0
\end{aligned}$$

C, D に関しても同様の計算である。これより、

$$(\text{RHS}) = \begin{pmatrix} i\sqrt{1-X_0^2} & 0 \\ 0 & -i\sqrt{1-X_0^2} \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

となるため、 X は

$$X' = VXV^\dagger = \begin{pmatrix} X_0 + i\sqrt{1-X_0^2} & 0 \\ 0 & X_0 - i\sqrt{1-X_0^2} \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

と対角化されることがわかる。また、この変換には次の行列

$$d(s) = \begin{pmatrix} e^{i\alpha_1(s)} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_2(s)} \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

で変換する自由度が残っている。(det $d = 1$ である。)

X を dV で変換すると

$$X \rightarrow dVXV^\dagger d^\dagger = dX'd^\dagger = X' \quad (2.53)$$

となるため V で変換することと、 dV で変換することは X を対角化するように V を選んだとき同じになるため自由度が残っている。すなわち、部分的にゲージ固定している。

今、格子上での Link 変数 $U_\mu(s)$ を V でゲージ変換すると、

$$U_\mu(s) \rightarrow U'_\mu(s) = V(s)U_\mu(s)V^\dagger(s + \hat{\mu}) \quad (2.54)$$

となる。変換された Link 変数を $U(1)$ の変換性を示す Link 場 u_μ と物質場 $C_\mu(s)$ に

$$U'_\mu(s) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-|c_\mu(s)|^2} & -c_\mu(s)^* \\ c_\mu(s) & \sqrt{1-|c_\mu(s)|^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta_\mu(s)} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta_\mu(s)} \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

$$\equiv C_\mu(s)u_\mu(s) \quad (2.56)$$

と分離する。これは d で次のように変換すると

$$u_\mu(s) \rightarrow u'_\mu(s) = d(s)u_\mu(s)d^\dagger(s + \hat{\mu}) \quad (2.57)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i\alpha_1(s)} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_2(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta_\mu(s)} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta_\mu(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\alpha_1(s+\hat{\mu})} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha_2(s+\hat{\mu})} \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i\alpha_1(s)+i\theta_\mu(s)-i\alpha_1(s+\hat{\mu})} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_2(s)-i\theta_\mu(s)-i\alpha_2(s+\hat{\mu})} \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{iag(A_\mu(s)+\frac{1}{g}\partial_\mu\alpha_1(s))} & 0 \\ 0 & e^{-iag(A_\mu(s)+\frac{1}{g}\partial_\mu\alpha_2(s))} \end{pmatrix} \because \theta_\mu(s) = agA_\mu(s) \quad (2.60)$$

となり、ゲージ場の変換性を示す。すなわち、SU(2) の Link 変数から部分的なゲージ固定を用いて U(1) の Link 変数を抜き出すことができた。Link 変数を

$$U'_\mu(s) = U_\mu^0(s)\mathbf{I} + iU_\mu^i(s)\sigma^i \quad (2.61)$$

$$= \begin{pmatrix} U_\mu^0(s) + iU_\mu^3(s) & iU_\mu^1(s) + U_\mu^2(s) \\ iU_\mu^1(s) - U_\mu^2(s) & U_\mu^0(s) - iU_\mu^3(s) \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

と表すと、 $\theta_\mu(s)$ は、

$$\begin{pmatrix} \sqrt{1 - |c_\mu(s)|^2}e^{i\theta_\mu(s)} & -c_\mu(s)^*e^{-i\theta_\mu(s)} \\ c_\mu(s)e^{i\theta_\mu(s)} & \sqrt{1 - |c_\mu(s)|^2}e^{-i\theta_\mu(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_\mu^0(s) + iU_\mu^3(s) & iU_\mu^1(s) + U_\mu^2(s) \\ iU_\mu^1(s) - U_\mu^2(s) & U_\mu^0(s) - iU_\mu^3(s) \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

となる。すなわち、

$$\sqrt{1 - |c_\mu(s)|^2}e^{i\theta_\mu(s)} = U_\mu^0(s) + iU_\mu^3(s) \quad (2.64)$$

$$\sqrt{1 - |c_\mu(s)|^2}e^{-i\theta_\mu(s)} = U_\mu^0(s) - iU_\mu^3(s) \quad (2.65)$$

の辺々の和、差を考えれば、

$$2U_\mu^0(s) = \sqrt{1 - |c_\mu(s)|^2}(e^{i\theta_\mu(s)} + e^{-i\theta_\mu(s)}) \quad (2.66)$$

$$\therefore U_\mu^0(s) = \sqrt{1 - |c_\mu(s)|^2}\cos\theta_\mu(s) \quad (2.67)$$

$$2iU_\mu^3(s) = \sqrt{1 - |c_\mu(s)|^2}(e^{i\theta_\mu(s)} - e^{-i\theta_\mu(s)}) \quad (2.68)$$

$$\therefore U_\mu^3(s) = \sqrt{1 - |c_\mu(s)|^2}\sin\theta_\mu(s) \quad (2.69)$$

となり、 $\theta_\mu(s)$ は

$$\theta_\mu(s) = \tan^{-1} \frac{U_\mu^3(s)}{U_\mu^1(s)} \quad (2.70)$$

と表せる。

上記のようにアーベリアン射影を用いて、U(1) の変換性を示す $\theta_\mu(s)$ を抜き出すことができれば、モノポールを考えることができる。アーベリン射影で抜き出したアーベリアンの Link 変数 $u_\mu(s)$ のブラケットを考え

れば、

$$u_{\mu\nu}(s) = u_\mu(s)u_\nu(s + \hat{\mu})u_\mu^\dagger(s + \hat{\nu})u_\nu^\dagger(s) \quad (2.71)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i\theta_\mu(s)} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta_\mu(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta_\nu(s+\hat{\mu})} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta_\nu(s+\hat{\mu})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\theta_\mu(s+\hat{\nu})} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_\mu(s+\hat{\nu})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\theta_\nu(s)} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_\nu(s)} \end{pmatrix} \quad (2.72)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i\alpha(\partial_\mu\theta_\nu(s) - \partial_\nu\theta_\mu(s))} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha(\partial_\mu\theta_\nu(s) - \partial_\nu\theta_\mu(s))} \end{pmatrix} \quad (2.73)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i\Theta_{\mu\nu}(s)} & 0 \\ 0 & e^{-i\Theta_{\mu\nu}(s)} \end{pmatrix} \quad (2.74)$$

となり、格子上の U(1) ゲージ理論におけるモノポールの定義の議論を用いることができる。 θ_μ の取りうる範囲が

$$-\pi < \theta_\mu \leq \pi \quad (2.75)$$

より、 $\Theta_{\mu\nu} = \partial_\mu\theta_\nu - \partial_\nu\theta_\mu$ の取りうる範囲が

$$-4\pi < \Theta_{\mu\nu} \leq 4\pi \quad (2.76)$$

となるために $\cos\Theta_{\mu\nu}$ を $\Theta_{\mu\nu}$ が 0 周りのみでなく、 $\pm 2\pi$ 、 $\pm 4\pi$ でも同様のことが起こり、連続理論の場の強さに対応するものが一つに決まらない。このことから、

$$-\pi < \bar{\Theta}_{\mu\nu} \leq \pi \quad (2.77)$$

の範囲の $\bar{\Theta}_{\mu\nu}$ という変数を新しく考え、この変数を用いて $\Theta_{\mu\nu}$ を

$$\Theta_{\mu\nu} = \bar{\Theta}_{\mu\nu} + 2\pi n_{\mu\nu} \quad (2.78)$$

と考える。 $n_{\mu\nu}$ は反対称テンソルで $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ の値をとる。

すなわち、今、連続極限の場の強さを改めて

$$\bar{\Theta}_{\mu\nu} = a^2 g F_{\mu\nu} \quad (2.79)$$

と定義する。この場の強さ $\bar{\Theta}_{\mu\nu}$ に対して Abelian のビアンキ恒等式

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu \bar{\Theta}_{\rho\sigma} = 0 \quad (2.80)$$

は破れる。なぜなら、

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu \Theta_{\rho\sigma} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu \bar{\Theta}_{\rho\sigma} + 2\pi \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu n_{\rho\sigma} \quad (2.81)$$

$$\therefore \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu \bar{\Theta}_{\rho\sigma} = -2\pi \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu n_{\rho\sigma} \quad (2.82)$$

となり恒等的に 0 にならない。

ここで、モノポールカレントを

$$k_\nu(s) = \frac{1}{4\pi} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu \bar{\Theta}_{\rho\sigma}(s + \hat{\nu}) \quad (2.83)$$

と定義すると、

$$k_\nu(s) = -\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu n_{\rho\sigma}(s + \hat{\nu}) \quad (2.84)$$

と表せる。これより、モノポールカレントが整数で表せることがわかり、カレント保存則

$$\partial'_\mu k_\mu(s) = 0 \quad (2.85)$$

が成り立つ。 ∂' は後方差分である。この Lattice 上のモノポールカレントは、双対 Lattice 上ではカレント (link) であるが、今考えている Lattice 上では 6 つの面を足しあげたキューブであるため注意が必要である。

2.3 非可換ビアンキ恒等式の破れによるアーベリアンモノポール

QCD において、モノポールの自由度を定義するためにはこれまで 't Hooft の部分的なゲージ固定による定義が必要であった。しかし、先行研究 [22] において、ゲージ場に Line singularity があると非可換ビアンキ恒等式が破れそれが Abelian monopole を導くことが提唱された。これは、Dirac のモノポールと同様のアイディアである。ここでは、まず Dirac モノポールの説明を行い、ゲージ場に Line singularity があるとモノポールを導くことを見る。

2.3.1 Dirac モノポール

電磁場の運動を記述する Maxwell 方程式において、磁気単極子が存在しないことは、

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (2.86)$$

と表現されている。この方程式からベクトルポテンシャルが構成されるが、まず Monopole があることを仮定してベクトルポテンシャルを考える。3次元空間の原点に磁荷 g のモノポールがあるとする、Maxwell 方程式は、

$$\text{div} \vec{B} = 4\pi g \delta(\vec{r}) \quad (2.87)$$

となる。 $r = 0$ を含めたときにベクトル解析の恒等式 ($r = 0$ を含めた時。 $r \neq 0$ の時は 0 となる。)

$$\text{div grad} \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi \delta(\vec{r}) \quad (2.88)$$

を用いる。マクスウェル方程式を変形すると、

$$(\text{RHS}) = -g \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) \quad (2.89)$$

$$= -g \vec{\nabla} \cdot \left(-\frac{\vec{r}}{r^3} \right) \quad (2.90)$$

$$= \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{g\vec{r}}{r^3} \right) \quad (2.91)$$

となるため、右辺と左辺を比べると磁場は、

$$\vec{B} = \frac{g\vec{r}}{r^3} \quad (2.92)$$

となることがわかる。この磁場を満たし、なおかつ上記の Maxwell 方程式を満たすような形のベクトルポテンシャルを考えてやればよい。今、ベクトルポテンシャルを

$$A_x^N = \frac{-gy}{r(r+z)} \quad (2.93)$$

$$A_y^N = \frac{gx}{r(r+z)} \quad (2.94)$$

$$A_z^N = 0 \quad (2.95)$$

とする。この回転をとると、

$$(\text{rot}\vec{A}^N)_x = -\frac{\partial}{\partial z} \frac{gx}{r(r+z)} \quad (2.96)$$

$$(\text{rot}\vec{A}^N)_y = -\frac{\partial}{\partial z} \frac{gy}{r(r+z)} \quad (2.97)$$

$$(\text{rot}\vec{A}^N)_z = \frac{\partial}{\partial x} \frac{gx}{r(r+z)} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{gy}{r(r+z)} \quad (2.98)$$

となる。この偏微分を素直に実行する。

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{gx}{r(r+z)} = \frac{\partial r(r+z)}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r(r+z)} \frac{gx}{r(r+z)} \quad (2.99)$$

$$= \frac{-gx}{[r(r+z)]^2} \frac{\partial}{\partial z} (x^2 + y^2 + z^2 + z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \quad (2.100)$$

$$= \frac{-gx}{[r(r+z)]^2} \left(2z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + z \frac{\partial}{\partial z} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right) \quad (2.101)$$

$$= \frac{-gx}{[r(r+z)]^2} \left(2z + r + \frac{z^2}{r} \right) \quad (2.102)$$

$$= \frac{-gx}{[r(r+z)]^2} \frac{1}{r} (r+z)^2 \quad (2.103)$$

$$= \frac{-gx}{r^3} \quad (2.104)$$

$$\therefore (\text{rot}\vec{A}^N)_x = \frac{gx}{r^3} \quad (2.105)$$

同様に、

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{gy}{r(r+z)} = \frac{-gy}{r^3} \quad (2.106)$$

$$\therefore (\text{rot}\vec{A}^N)_y = \frac{gy}{r^3} \quad (2.107)$$

である。さらに、

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{gx}{r(r+z)} \right) = \frac{g}{r(r+z)} - \frac{gx^2(2r+z)}{r^3(r+z)^2} \quad (2.108)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{gx}{r(r+z)} \right) = \frac{g}{r(r+z)} - \frac{gy^2(2r+z)}{r^3(r+z)^2} \quad (2.109)$$

より、

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{gx}{r(r+z)} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{gx}{r(r+z)} \right) = \frac{1}{r^3(r+z)^2} (2gr^2(r+z^2) - 2gx^2r - 2gy^2r - gx^2z - gy^2z) \quad (2.110)$$

$$= \frac{gz}{r^3(r+z)^2} (r^2 + 2rz + z^2) \quad (2.111)$$

$$\therefore (\text{rot}\vec{A}^N)_z = \frac{gz}{r^3} \quad (2.112)$$

となる。すなわち、このベクトルポテンシャルがモノポールのつくる磁場を満たす。三次元空間上の極座標変換を行う。ベクトルポテンシャルは二次元平面にあるために単位ベクトルの極座標変換

$$\vec{e}_r = \cos\phi\vec{e}_x + \sin\phi\vec{e}_y \quad (2.113)$$

$$\vec{e}_\phi = -\sin\phi\vec{e}_x + \cos\phi\vec{e}_y \quad (2.114)$$

を用いる。これを用いれば、

$$\vec{A}^N = A_x^N \vec{e}_x + A_y^N \vec{e}_y \quad (2.115)$$

$$= A_r^N \vec{e}_r + A_\phi^N \vec{e}_\phi \quad (2.116)$$

から、

$$A_r^N = \vec{A}^N \cdot \vec{e}_r \quad (2.117)$$

$$A_\phi^N = \vec{A}^N \cdot \vec{e}_\phi \quad (2.118)$$

より、 A_r は

$$A_r^N = \left(\frac{-gr\sin\phi\sin\theta}{r(r+r\cos\phi)}, \frac{gr\cos\phi\sin\theta}{r(r+r\cos\phi)}, 0 \right) \cdot (\cos\phi, \sin\phi, 0) \quad (2.119)$$

$$= \frac{-gr\sin\phi\cos\phi\sin\theta}{r(r+r\cos\phi)} + \frac{gr\cos\phi\sin\phi\sin\theta}{r(r+r\cos\phi)} \quad (2.120)$$

$$= 0 \quad (2.121)$$

となり、 A_ϕ は

$$A_\phi^N = \left(\frac{-gr\sin\phi\sin\theta}{r(r+r\cos\phi)}, \frac{gr\cos\phi\sin\theta}{r(r+r\cos\phi)}, 0 \right) \cdot (-\sin\phi, \cos\phi, 0) \quad (2.122)$$

$$= \frac{gr\sin^2\phi\sin\theta}{r(r+r\cos\phi)} + \frac{gr\cos^2\phi\sin\theta}{r(r+r\cos\phi)} \quad (2.123)$$

$$= \frac{g\sin\theta}{r+r\cos\theta} \quad (2.124)$$

$$= \frac{g\sin\theta(1-\cos\theta)}{r(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)} \quad (2.125)$$

$$= \frac{g(1-\cos\theta)}{\sin\theta} \quad (2.126)$$

と表せる。ゆえに、ベクトルポテンシャルは極座標で

$$\vec{A}^N = \frac{g(1-\cos\theta)}{r\sin\theta} \vec{e}_\phi \quad (2.127)$$

と表される。これから、 $\theta = \pi$ の時、つまり、 z 軸が負のところの特異点になっていることがわかる。(なぜなら、 $\cos\pi = -1, \sin\pi = 0$ より) この線状の特異点を考慮すると、モノポールが作る磁場 \vec{B} は上記で考えたベクトルポテンシャルより

$$\vec{B} = \frac{g\vec{r}}{r^3} = \text{rot}\vec{A} - 4\pi g\delta(x)\delta(y)\theta(-z)\vec{e}_z \quad (2.128)$$

と表せる。これは Maxwell 方程式

$$\text{div}\vec{B} = \text{div}\text{rot}\vec{A} - \frac{\partial}{\partial z}(4\pi g\delta(x)\delta(y)\theta(-z)) \quad (2.129)$$

$$= 4\pi g\delta(\vec{r}) \quad (2.130)$$

を満たすことが確かめられる。

また、次のベクトルポテンシャル

$$A_x^S = \frac{gy}{r(r-z)} \quad (2.131)$$

$$A_y^S = \frac{-gx}{r(r-z)} \quad (2.132)$$

$$A_z^S = 0 \quad (2.133)$$

を用いても、同様にモノポールの作る磁場を表すことができ、この極座標表示は

$$\vec{A}^S = -\frac{g(1+\cos\theta)}{r\sin\theta}\vec{e}_\phi \quad (2.134)$$

となる。これは、 $\theta = 0$ の時に特異的である。 $(\cos 0 = 1, \sin 0 = 0)$ より、 z 軸の正の方向に線状の特異点を持つ。このために、モノポールの磁場は

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A}^S + 4\pi\delta(x)\delta(y)\theta(z)\vec{e}_z \quad (2.135)$$

とすれば Maxwell 方程式を満たす。

このことから 2 通りベクトルポテンシャルが見つかった。これは、言い換えれば線状の特異点の選び方によるものである。これらのベクトルポテンシャルの差を考えると

$$\Delta A_x = (\vec{A}^S)_x - (\vec{A}^N)_x \quad (2.136)$$

$$= \frac{gy}{r(r-z)} + \frac{gy}{r(r+z)} \quad (2.137)$$

$$= \frac{2gy}{x^2 + y^2} \quad (2.138)$$

$$\Delta A_y = (\vec{A}^S)_y - (\vec{A}^N)_y \quad (2.139)$$

$$= -\frac{gx}{r(r-z)} + \frac{gx}{r(r+z)} \quad (2.140)$$

$$= -\frac{2gx}{x^2 + y^2} \quad (2.141)$$

となる。ゆえに、

$$\vec{A}^S = \vec{A}^N - \text{grad}\left(2g\tan^{-1}\frac{y}{x}\right) \quad (2.142)$$

$$= \vec{A}^N - \text{grad}(2g\phi) \quad (2.143)$$

と表せる。 $(\phi$ は xy 平面上の角度)

スカラー関数として

$$\chi = 2g\phi \quad (2.144)$$

と置けば、ベクトルポテンシャル \vec{A}^N, \vec{A}^S はゲージ変換で結びついている、すなわち、線状の特異点はゲージ関数 χ によって決まることがわかる。

さらに、量子力学で考える。磁荷 g_m のモノポールが作る磁場中において、電荷 e 、質量 m の点粒子が運動しているとき、シュレディンガー方程式は、

$$\frac{1}{2m}(\vec{p} - e\vec{A})^2\phi(\vec{x}) = E\phi(\vec{x}) \quad (2.145)$$

となる。(ħ = c = 1)

この方程式の解は、

$$\phi(\vec{x}) = \phi_0(\vec{x}) \exp \left[ie \int^{\vec{x}} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \right] \quad (2.146)$$

である。φ₀(\vec{x}) は自由粒子のときの波動関数とする。自由粒子のシュレディンガー方程式は

$$\frac{1}{2m} (-\vec{\nabla}^2) \phi_0(\vec{x}) = E \phi_0(\vec{x}) \quad (2.147)$$

である。解が上記であることを確かめる。

$$\frac{1}{2m} (-i\vec{\nabla} - e\vec{A}) \cdot (-i\vec{\nabla} - e\vec{A}) \phi_0(\vec{x}) e^{ie \int^{\vec{x}} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}} \quad (2.148)$$

$$= \frac{1}{2m} (-i\vec{\nabla} - e\vec{A}) \cdot \left(-i(\vec{\nabla} \phi_0(\vec{x})) e^{ie \int^{\vec{x}} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}} - i\phi_0(\vec{x}) \vec{\nabla} e^{ie \int^{\vec{x}} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}} - e\vec{A} \phi_0(\vec{x}) e^{ie \int^{\vec{x}} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}} \right) \quad (2.149)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2m} \left\{ -\vec{\nabla}^2 \phi_0(\vec{x}) e^{ie \int^{\vec{x}} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}} - (\vec{\nabla} \phi_0(\vec{x})) \cdot \vec{\nabla} e^{ie \int^{\vec{x}} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}} \right. \\ &\quad - (\vec{\nabla} \phi_0(\vec{x})) \cdot \vec{\nabla} e^{ie \int^{\vec{x}} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}} - \phi_0(\vec{x}) \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} e^{ie \int^{\vec{x}} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}} \\ &\quad + ie(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \phi_0(\vec{x}) e^{ie \int^{\vec{x}} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}} + ie\vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \phi_0(\vec{x})) e^{ie \int^{\vec{x}} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}} + ie\vec{A} \cdot \phi_0(\vec{x}) \vec{\nabla} e^{ie \int^{\vec{x}} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}} \\ &\quad \left. + ie\vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \phi_0(\vec{x})) e^{ie \int^{\vec{x}} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}} + ie\phi_0(\vec{x}) \vec{A} \cdot \vec{\nabla} e^{ie \int^{\vec{x}} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}} + e^2 \vec{A} \cdot \vec{A} \phi_0(\vec{x}) e^{ie \int^{\vec{x}} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}} \right\} \quad (2.150) \end{aligned}$$

これは、

$$-\phi_0(\vec{x}) \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} e^{ie \int^{\vec{x}} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}} = -\phi_0(\vec{x}) \vec{\nabla} \cdot ie\vec{A} e^{ie \int^{\vec{x}} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}} \quad (2.151)$$

$$= -\phi_0(\vec{x}) ie(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) e^{ie \int^{\vec{x}} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}} + e^2 \phi_0(\vec{x}) \vec{A} \cdot \vec{A} e^{ie \int^{\vec{x}} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}} \quad (2.152)$$

等の積の微分を気をつけて行えば、

$$(\text{RHS}) = \frac{1}{2m} (-\vec{\nabla}^2 \phi_0(\vec{x})) e^{ie \int^{\vec{x}} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}} \quad (2.153)$$

$$= E \phi_0(\vec{x}) e^{ie \int^{\vec{x}} \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}} \quad (2.154)$$

$$= E \phi(\vec{x}) \quad (2.155)$$

となることから解であることが確かめられる。

今、ふたつの経路を考える。(仮にふたつの経路を経路 red、経路 green とする。) 波動関数は一価であるため、経路が交差する点に注意する。点 A において、波動関数は、

$$\phi_{\text{red}}(A) = \phi_{\text{green}}(A) \quad (2.156)$$

である。式 (2.146) からこの系の波動関数は自由粒子の波動関数とベクトルポテンシャルによって決まる部分の掛け算であるが、経路の取り方により後者は値を変える。しかしながら、ふたつの経路の交差する点 A で

は波動関数の一価性よりこのファクターも等しくなくてはならない。そのため、

$$\phi_{0red}(A)\exp\left[ie\int_{red}^A\vec{A}\cdot d\vec{r}\right]=\phi_{0green}(A)\exp\left[ie\int_{green}^A\vec{A}\cdot d\vec{r}\right] \quad (2.157)$$

$$1=\exp\left[ie\int_{red}^A\vec{A}\cdot d\vec{r}-ie\int_{green}^A\vec{A}\cdot d\vec{r}\right]\because\phi_{0red}(A)=\phi_{0green}(A) \quad (2.158)$$

$$\therefore 1=\exp\left[ie\oint\vec{A}\cdot d\vec{r}\right] \quad (2.159)$$

となる。さらに、ストークスの定理を用いて

$$\oint\vec{A}\cdot d\vec{r}=\int_S(\text{rot}\vec{A})\cdot\vec{n}dS \quad (2.160)$$

$$=\int_S\vec{B}\cdot\vec{n}dS \quad (2.161)$$

$$=g_m \quad (2.162)$$

となる。よって、Dirac の量子化条件

$$eg_m=2\pi n \quad (2.163)$$

が求まる。(n : 整数)

以上のことから、量子力学においてベクトルポテンシャルに Line singularity があるとモノポールが存在し、さらに波動関数の一価性から Dirac の量子化条件が成り立ち、電荷が量子化されることがわかった。

本研究で議論している非可換ビアンキ恒等式の破れによるモノポールは、上記の Dirac モノポールのアイデアをもとに提唱されている。それは、場の量子論においてゲージ場に Line singularity を仮定し、それが非可換ビアンキ恒等式の破れを起こすと主張しているため上記の議論はそのまま適用できない。また、非可換ビアンキ恒等式の破れから導かれるモノポールは Dirac の量子化条件を満たすことを証明することはできていない [22]。しかしながら、この理論では QCD でモノポールの自由度をカラーごとに定義できるなど部分的なゲージ固定を行ったときに定義されるモノポールとは異なる部分が多く興味深いと考えられる。

2.3.2 VNABI

QCD において、モノポールカレントを定義する新しい方法として考えられているのが、非可換ビアンキ恒等式の破れによる Abelian monopole である。ひとつの仮定として、ゲージ場に Line singularity を仮定することで、非可換のビアンキ恒等式が破れそれがモノポールを導くことを見る。これは、上記に述べた Dirac モノポールのアイデアに基づいている。

まず共変微分を

$$D_\mu=\partial_\mu-igA_\mu \quad (2.164)$$

と定義する。この共変微分に対してヤコビ恒等式から、

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}[D_\nu,[D_\rho,D_\sigma]]=0 \quad (2.165)$$

が成り立つ。ここで、次のような dual な非可換ゲージ理論の場の強さの共変微分を考える。

$$D_\nu G_{\mu\nu}^* = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} D_\nu G_{\rho\sigma} \quad (2.166)$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} [D_\nu, G_{\rho\sigma}] \quad (2.167)$$

となる。これは、

$$[D_\nu, G_{\rho\sigma}] = D_\nu G_{\rho\sigma} \quad (2.168)$$

という関係を用いた。二行目の交換関係を計算するため、共変微分の交換関係を計算しておく。

$$\begin{aligned} [D_\rho, D_\sigma] &= [\partial_\rho - igA_\rho, \partial_\sigma - igA_\sigma] \\ &= -ig(\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho - ig[A_\rho, A_\sigma]) + [\partial_\rho, \partial_\sigma] \\ &= -igG_{\rho\sigma} + [\partial_\rho, \partial_\sigma] \end{aligned}$$

このとき、通常消える偏微分の交換関係を残した。これは求めたい交換関係に現れるゲージ場に Line singularity があると仮定したときに落とすことができないためである。これを用いて、

$$\begin{aligned} (\text{RHS}) &= -\frac{1}{2ig} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} [D_\nu, [D_\rho, D_\sigma] - [\partial_\rho, \partial_\sigma]] \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} [\partial_\rho, \partial_\sigma] A_\nu \\ &= \partial_\nu f_{\mu\nu}^* \end{aligned}$$

となる。よって、

$$D_\nu G_{\mu\nu}^* = \partial_\nu f_{\mu\nu}^*$$

が成り立つ。ここで、 $f_{\mu\nu}$ は、

$$f_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.169)$$

$$= (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) \frac{\sigma^a}{2} \quad (2.170)$$

である。 σ^a は SU(2) ゲージ理論であれば Pauli 行列である。

ここで、非可換ビアンキ恒等式の破れ $D_\nu G_{\mu\nu}^* \neq 0$ のときモノポールカレント

$$k_\mu = \frac{1}{2} k_\mu^a \sigma^a = \partial_\nu f_{\mu\nu}^* = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu f_{\rho\sigma} \quad (2.171)$$

が導かれることがわかる。本研究では、このモノポールを格子上で定義しストリングテンションおよび双対マイスナー効果を調べた。

3 SU(2) ゲージ理論における VNABI による双対マイスナー効果とモノポールドミナンス

3.1 Lattice 上での Abelian 射影

Lattice 上で、カラーごとに Abelian ゲージ場 $\theta_\mu(s)$ を定義することを考える。non-Abelian の Link 変数とのオーバーラップを最大にすることで、Abelian ゲージ場を定義する。ひとつの例として、Pauli 行列のひとつ σ_1 を用いる。以下の量

$$R_1 = \sum_{s,\mu} \text{Re Tr}[e^{i\theta_\mu^1(s)\sigma_1} U_\mu^\dagger(s)] \quad (3.1)$$

を最大にすることを考える。これを最大にする条件として

$$\theta_\mu^1(s) = \tan^{-1} \frac{U_\mu^1(s)}{U_\mu^0(s)} \quad (|\theta_\mu^1(s)| < \pi) \quad (3.2)$$

を得る。これは、先行研究 [19] で形式的に定義した Abelian ゲージ場と等しい。残りのカラーに対しては、 σ_2 、 σ_3 を用いて同様に計算できる。この Abelian ゲージ場 $\theta_\mu^1(s), \theta_\mu^2(s), \theta_\mu^3(s)$ を用いて、Lattice 上では3つの Monopole current を

$$k_\nu^a(s) = \frac{1}{4\pi} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu \bar{\theta}_{\rho\sigma}^a(s + \hat{\nu}), \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \theta_{\mu\nu}^a(s) &= \partial_\mu \theta_\nu^a(s) - \partial_\nu \theta_\mu^a(s), \\ \bar{\theta}_{\mu\nu}^a(s) &= \theta_{\mu\nu}^a(s) - 2\pi n_{\mu\nu}^a(s), \end{aligned} \quad (3.4)$$

と定義する。ここで、 $\theta_{\mu\nu}^a(s)$ は Abelian ゲージ場の場の強さであり、 $n_{\mu\nu}^a(s)$ は反対称テンソルであり、整数値 $\{-2,-1,0,1,2\}$ をとる。これより、 $\bar{\theta}_{\mu\nu}^a \in [-\pi, \pi]$ となる。これらの定義は [25] に基づく。

3.2 Improved action

連続理論で SU(2) ゲージ理論での作用、

$$S_{con} = \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}^\alpha(x) F_{\mu\nu}^\alpha(x), \quad (3.5)$$

を考える。ここで、場の強さ $F_{\mu\nu}^\alpha$ は、

$$F_{\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha - \epsilon^{\alpha\beta\gamma} A_\mu^\beta A_\nu^\gamma \quad (3.6)$$

である。 $\epsilon^{\alpha\beta\gamma}$ は完全反対称テンソルである。

この理論を格子上で考える。SU(2) の Wilson 作用

$$S_{pl} = \beta \sum_{s,\mu < \nu} \left[1 - \frac{1}{4} \text{Tr}(U_\mu(s) U_\nu(s + \hat{\mu}) U_\mu^\dagger(s + \hat{\nu}) U_\nu^\dagger(s) + h.c.) \right], \quad (3.7)$$

を考える。ここで、 $\beta = \frac{4}{g^2}$ である。また、 $U_\mu(s)$ は Link 変数である。

$$U_\mu(s) = \exp[i\theta_\mu(s)] = \exp[iagA_\mu(s)] \quad (3.8)$$

この作用 S_{lat} はナイーブな連続極限 $a \rightarrow 0$ をとると、はじめに定義した連続理論の作用 S_{con} に一致することがわかる。

本研究では、SU(2) tadpole Improved 作用

$$S = \beta \left\{ \sum_{pl} S_{pl} - \frac{1}{20u_0^2} \sum_{rt} S_{rt} \right\} \quad (3.9)$$

を考える。 S_{rt} は長方形のループであり、 u_0 は入力パラメータである。この作用は先行研究 [22, 23] で用いられ、本研究ではクエンチ近似のもと結合定数 $\beta = 3.0$ から 3.9、格子サイズ 24^4 , 48^4 までの配位を用意した。先行研究ではグローバルにカラーの対称性を保つためゲージ固定なしで計算が行われたが、これには膨大な統計数が必要であった。本研究ではグローバルなカラーの対称性を保つゲージ固定を採用することで少ない統計数でカラーごとに定義したモノポールの寄与を計算することができることを示す。(真空のタイプの計算には、Iwasaki 作用を用いた。モノポールカレントの二乗 k^2 を disconnect 相関から計算するときは誤差が大きいためゲージ固定をしても 1000 個ほどの真空を用意している。これは先行研究の MAG 固定の計算でも同様である。)

3.3 ゲージ固定 (MCG, DLCG, MAWL, MAU1)

ここでは、本研究で用いたゲージ固定を説明する。

Maximal center gauge 固定 (MCG) と Direct Laplacian center gauge 固定 (DLCG)

MCG と DLCG は、Center vortex の計算で用いられてきたゲージ固定である [26, 27, 28]。格子上で

$$R = \sum_{s,\mu} (\text{Tr } U_\mu(s))^2 \quad (3.10)$$

を最大にすることでゲージを固定することができる。このゲージ固定は、MAG 固定と異なりカラーの対称性を保つゲージ固定になっている。また DLCG 固定も MCG 固定と同様にグローバルなカラーの対称性を守るゲージ固定であり、Gribov copies の問題に対して導入されたゲージ固定である [28]。

これまでの先行研究では、SU(2) ゲージ理論において Landau ゲージ固定

$$R = \sum_{s,\mu} \text{Tr } U_\mu(s) \quad (3.11)$$

で格子上のモノポールカレントが消えるという研究 [12, 11] があるが、MCG は Landau ゲージ固定と Z(2) 対称性が異なるのみである。このことから Z(2) 対称性が SU(2) ゲージ理論において Degrand 流のモノポールカレントを定義することに重要であることが示唆される。MCG 固定と Landau ゲージ固定で異なる点は、Abelian ゲージ場からつくられる場の強さのヒストグラムを計算するとわかる。MCG 固定と Landau ゲージ固定での場の強さに対するヒストグラムの一例を図 2 にまとめた。Lattice 上でモノポールカレントを抜くために重要なのは、周期性 (2.77) であり、これを用いて整数値を抜き出し Dirac string の解釈するのであるが、Landau ゲージ固定を行うとヒストグラムからもわかるように例えば $2\pi, -2\pi$ の値をもつ場の強さはなくなる。そのため格子上でモノポールを計算することができない。しかしながら、このゲージ固定のもとで閉じ込めがなくなることを意味しているわけではない。Landau ゲージ固定では、双対アンペールの法則に基づきモノポールの代わりに $\partial_4 B_\phi$ がまわっていると調べられている [11, 12]。

ここで、SU(2) ゲージ理論における主要なゲージ固定の特徴を表 1 にまとめた。また下記に本研究でゲージ依存性を調べるために用いたその他のゲージ固定に関して簡単に説明する。

	対称性	Monopole dominance
MAG	カラーの対称性を破る。	Great!
MCG	グローバルなカラーの対称性を守る。Z(2) 対称性を守る。	○
Landau	グローバルなカラーの対称性を守る。Z(2) 対称性を破る。	$k_\mu(s) \rightarrow \partial_t B$

表 1: SU(2) 理論における各ゲージ固定の特徴とモノポールドミナンス

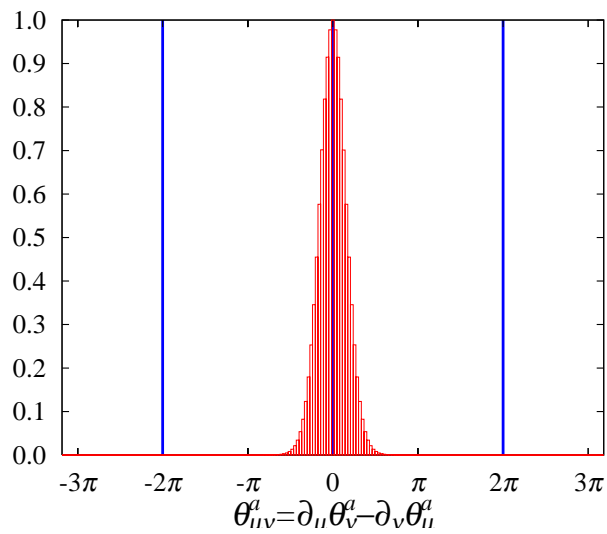
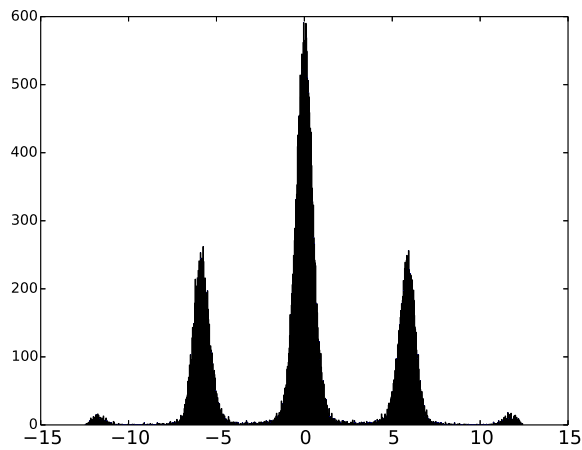


図 2 (上図) MCG 固定における Abelian の場の強さのヒストグラム。(下図) Landau ゲージ固定における Abelian の場の強さのヒストグラム。[12] からの引用。

Maximal Abelian Wilson loop gauge 固定 (MAWL)

MAWL は、MCG を行った配位に対して行うゲージ固定である。MCG の配位で、Abelian 射影によって得られた Abelian ゲージ場 $\theta_\mu^a(s)$ ($a = 1, 2, 3$) から以下の量、

$$R = \sum_{s\mu \neq \nu} \sum_a (\cos(\theta_{\mu\nu}^a(s))) \quad (3.12)$$

を最大にするゲージ固定である。ここで、 $\cos(\theta_{\mu\nu}^a(s))$ は 1×1 の Abelian Wilson loop である。このゲージ固定は先行研究 [9, 22, 23] で導入されている。

Maximal Abelian + U(1) Landau gauge 固定 (MAU1)

MAU1 は、まず MAG 固定と同様に

$$R = \sum_{s\mu} \text{Tr} (\sigma_3 U_\mu(s) \sigma_3 U_\mu^\dagger(s)) \quad (3.13)$$

を最大にするようにゲージ固定し、残った U(1) 対称性に対して Landau ゲージ固定を行う。つまり、 $\sum_{s,\mu} (\cos\theta_\mu^3(s))$ を最大にするゲージ固定である [29]。このゲージ固定は上記で説明した MCG、DLCG、MAWL の三つのゲージ固定と異なりグローバルカラーの対称性を破るゲージ固定になっている。

3.4 モノポールドミナンス

MCG 固定が MAG 固定と同様にストリングテンションを再現するかを調べた。今、Abelian ゲージ場が 3 色あるため Abelian Wilson loop は、

$$W_A^a = \exp\left\{\sum J_\mu(s)\theta_\mu^a(s)\right\} \quad (3.14)$$

と表す。ここで、 $J_\mu(s)$ は Wilson loop に沿って ± 1 をとる外場である。この Abelian Wilson loop は以下のように書き換えることができる。

$$W_A^a = \exp\left\{-\frac{i}{2} \sum M_{\mu\nu}(s)\theta_{\mu\nu}^a(s)\right\} \quad (a = 1, 2, 3) \quad (3.15)$$

と表される。ここで、 $M_{\mu\nu}$ は Wilson loop の境界で ± 1 をとる反対称テンソルであり、 $J_\nu(s) = \partial'_\mu M_{\mu\nu}(s)$ である。 $\theta_{\mu\nu}^a$ は場の強さである。この Abelian Wilson loop をモノポールカレントの寄与とそうではない部分 (フォトンパート) に分解する。

$$W_A^a = W_{mon}^a W_{ph}^a, \quad (3.16)$$

$$W_{mon}^a = \exp\left\{2\pi i \sum k_\beta^a(s) D(s-s') \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} \partial_\alpha M_{\rho\sigma}(s')\right\}, \quad (3.17)$$

$$W_{ph}^a = \exp\left\{-i \sum \partial'_\mu \bar{\theta}_{\mu\nu}^a(s) D(s-s') J_\nu(s')\right\}. \quad (3.18)$$

ここで、 $D(s-s')$ は Lattice 上でのクーロンプロパゲータであり、 $\partial_\nu \partial'_\nu D(s-s') = -\delta_{ss'}$ を満たす。これを数値計算で評価するときは、まずクーロンプロパゲータの運動量表示を用いて計算したものをフーリエ変換してこれらの Wilson loop を評価する。

上記の Wilson loop を用いて、それぞれポテンシャルを計算しストリングテンションを求めた。ポテンシャルをフィットする関数として、

$$V_{fit}(r) = \sigma r - c/r + \mu, \quad (3.19)$$

を用いた。ここで、 σ はストリングテンション、 c はクーロン項に対する係数、 μ は定数である。MCG、DLCG、MAWL、MAU1 という4つのゲージ固定でストリングテンションを計算した。格子サイズ 24^4 および結合定数 $\beta = 3.5$ で計算を行い、表2にまとめた。結果として、モノポールパートから計算したストリングテンションと non-Abelian から計算されるストリングテンションの比 σ_{mon}/σ_{NA} は、グローバルにカラーの対称性を守る3つのゲージ固定 (MCG、DLCG、MAWL) では一致していた。また MAU1 の結果はその3つよりも少しだけ大きな値をとっている。

さらに、格子サイズを 48^4 および結合定数 $\beta = 3.0, 3.2, 3.5, 3.9$ で MCG 固定および MAU1 固定でのストリ

表2 $\beta = 3.5$ 、格子サイズ 24^4 での各ゲージ固定でのストリングテンション

		$\sqrt{\sigma a^2}$	σ_A/σ_{NA}	σ_{mon}/σ_{NA}	σ_{ph}/σ_{NA}
MCG	V_{NA}	0.1555(6)	0.8149	0.7053	0.3709
	V_A	0.1267(7)			
	V_{mon}	0.1096(3)			
	V_{ph}	0.0576(2)			
DLCG	V_{NA}	0.1555(6)	0.8316	0.708	0.3605
	V_A	0.1293(6)			
	V_{mon}	0.1100(5)			
	V_{ph}	0.0560(2)			
MAWL	V_{NA}	0.1555(6)	0.8151	0.7066	0.3693
	V_A	0.1267(7)			
	V_{mon}	0.1098(3)			
	V_{ph}	0.0574(3)			
MAU1	V_{NA}	0.1555(6)	0.8778	0.722	0.4114
	V_A	0.136(1)			
	V_{mon}	0.1122(2)			
	V_{ph}	0.0639(9)			

ングテンションを測定し、ストリングテンションの比を比較した。測定した MCG および MAU1 の結果を図3、4にまとめた。結果として、MCG 固定と MAU1 固定の両方でストリングテンションの比 σ_{mon}/σ_{NA} は75から80パーセントに近い値が4点の結合定数で測定された。表3、4にまとめた。これは、グローバルなカラーの対称性を守るゲージ固定である MCG 固定もグローバルなカラーの対称性を破る MAU1 固定と同様にモノポールドミナンスを示していると考えられる。

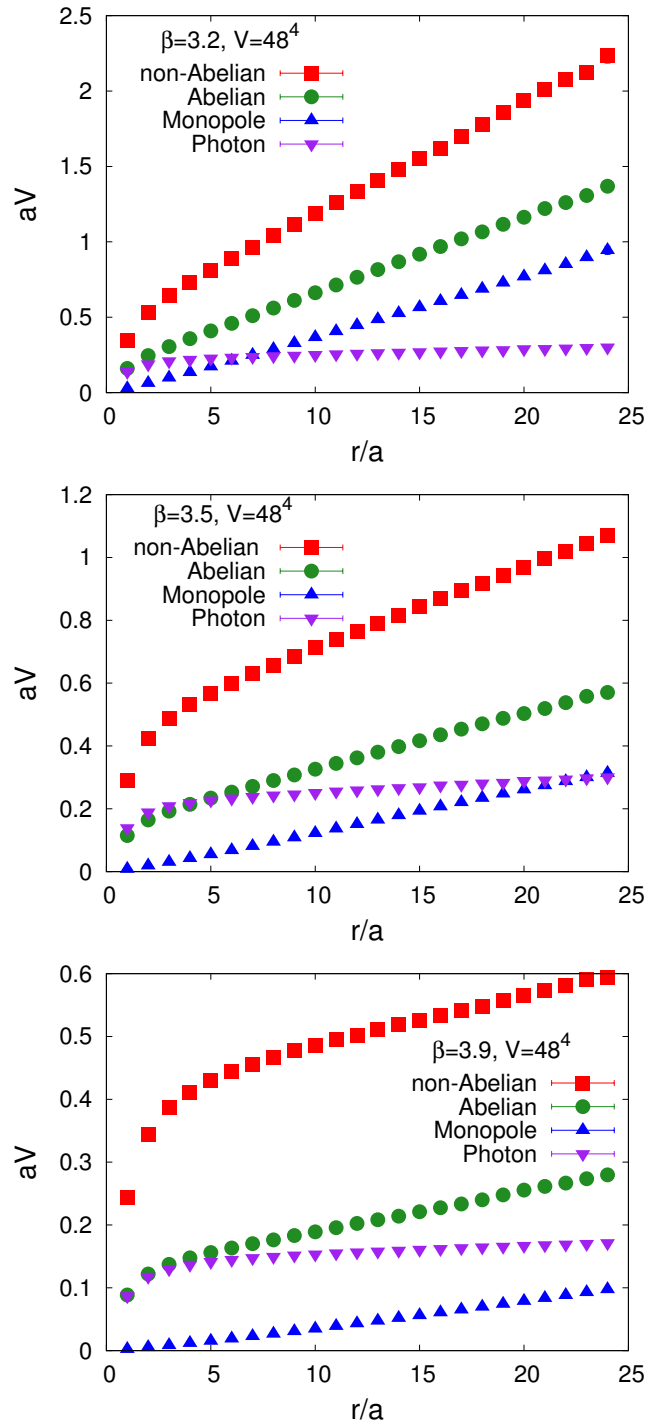


図3 MCG 固定におけるクォーク・反クォーク間のポテンシャル。格子サイズ 48^4 、 $\beta = 3.2$ (上)、 3.5 (中)、 3.9 (下)

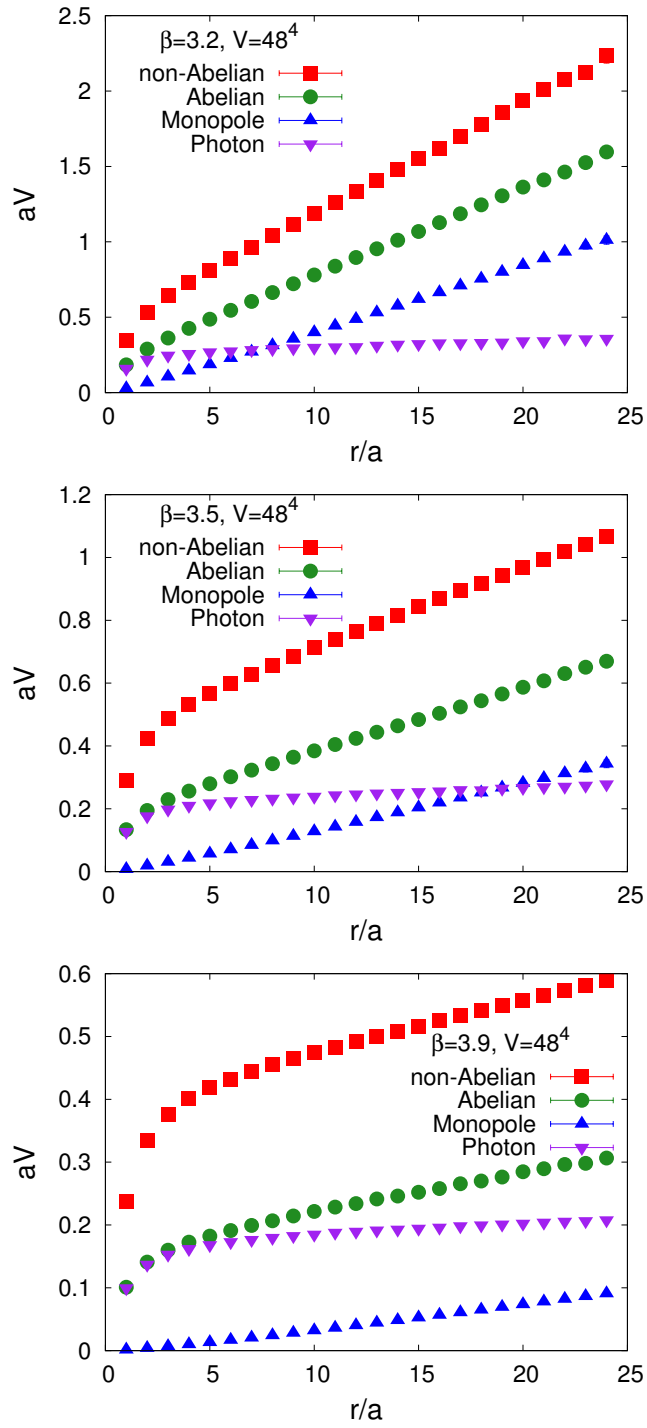


図4 MAU1 固定におけるクォーク・反クォーク間のポテンシャル。格子サイズ 48^4 、 $\beta = 3.2$ (上)、 3.5 (中)、 3.9 (下)

表3 MCG 固定における格子サイズ 48^4 でのストリングテンション

		$\sqrt{\sigma a^2}$	σ_A/σ_{NA}	σ_{mon}/σ_{NA}	σ_{ph}/σ_{NA}
$\beta = 3.0$	V_{NA}	0.3728(4)	0.8923	0.7807	0.1794
	V_A	0.3326(3)			
	V_{mon}	0.2910(1)			
	V_{ph}	0.066(1)			
$\beta = 3.2$	V_{NA}	0.2630(4)	0.8541	0.7576	0.2110
	V_A	0.2246(3)			
	V_{mon}	0.1992(2)			
	V_{ph}	0.0554(4)			
$\beta = 3.5$	V_{NA}	0.1546(3)	0.8525	0.7604	0.2701
	V_A	0.1317(3)			
	V_{mon}	0.1175(4)			
	V_{ph}	0.0417(1)			
$\beta = 3.9$	V_{NA}	0.0829(2)	0.9283	0.77	0.3841
	V_A	0.0769(4)			
	V_{mon}	0.0638(3)			
	V_{ph}	0.0318(1)			

表4 MAU1 固定における格子サイズ 48^4 でのストリングテンション

		$\sqrt{\sigma a^2}$	σ_A/σ_{NA}	σ_{mon}/σ_{NA}	σ_{ph}/σ_{NA}
$\beta = 3.0$	V_{NA}	0.3728(4)	0.9382	0.8119	0.188
	V_A	0.3497(3)			
	V_{mon}	0.3026(1)			
	V_{ph}	0.070(1)			
$\beta = 3.2$	V_{NA}	0.2630(4)	0.9078	0.7936	0.235
	V_A	0.2387(3)			
	V_{mon}	0.2087(3)			
	V_{ph}	0.061(2)			
$\beta = 3.5$	V_{NA}	0.1546(3)	0.9003	0.7846	0.2951
	V_A	0.1391(2)			
	V_{mon}	0.1212(4)			
	V_{ph}	0.0456(5)			
$\beta = 3.9$	V_{NA}	0.0829(2)	0.937	0.752	0.435
	V_A	0.0776(3)			
	V_{mon}	0.0623(3)			
	V_{ph}	0.0360(3)			

3.4.1 Blocked monopole current

グローバルなカラーの対称性を守るゲージ固定において、モノポールドミナンスは示されたが、モノポールパートの寄与は 100 パーセントはストリングテンションを再現していない。これまでの先行研究、特にゲージ固定なしでの計算ではモノポールパートの寄与はストリングテンションを 100 パーセント再現するほか、クローン項まで一致する。これを踏まえ、本研究で用いた MCG 固定でのモノポールカレントが 100 パーセントストリングテンションを再現することが可能であるのかを調べた。Lattice artifact なモノポールの寄与を落とすため、より長距離の領域でのモノポールの寄与を調べたい。本研究では、格子上のモノポールに対してブロックスピン変換を行った。まず格子サイズ 48^4 の配位を用意し、それに対して $n = 2, 3$ のブロックスピン変換を行い、ブロックスピン変換された 24^4 および 16^4 の格子でモノポールパートの Wilson loop を計算することでそこから計算されるストリングテンションが向上されるのかを調べた。ここで、モノポールカレントに対するブロックスピン変換は、

$$k_\mu^{(n)}(s_n) = \sum_{i,j,l=0}^{n-1} k_\mu(ns + (n-1)\hat{\mu} + i\hat{\nu} + j\hat{\rho} + l\hat{\sigma}). \quad (3.20)$$

と定義した [30]。これを n^3 Type2 extended monopole という。これは例えば $n = 2$ のとき

$$\begin{aligned} k_\mu^{(2)}(s^{(2)}) &= \sum_{i,j,l=0}^1 k_\mu(2s^{(2)} + \hat{\mu} + i\hat{\nu} + j\hat{\rho} + l\hat{\sigma}) \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{4\nu\rho\sigma} \partial_\nu \{ n_{\rho\sigma}(2s^{(2)} + \hat{4}) + n_{\rho\sigma}(2s^{(2)} + \hat{4} + \hat{\nu}) \\ &\quad + n_{\rho\sigma}(2s^{(2)} + \hat{4} + \hat{\sigma}) + n_{\rho\sigma}(2s^{(2)} + \hat{4} + \hat{\nu} + \hat{\sigma}) \\ &\quad + n_{\rho\sigma}(2s^{(2)} + \hat{4} + \hat{\rho}) + n_{\rho\sigma}(2s^{(2)} + \hat{4} + \hat{\nu} + \hat{\rho}) \\ &\quad + n_{\rho\sigma}(2s^{(2)} + \hat{4} + \hat{\sigma} + \hat{\rho}) + n_{\rho\sigma}(2s^{(2)} + \hat{4} + \hat{\nu} + \hat{\sigma} + \hat{\rho}) \} \end{aligned} \quad (3.22)$$

となり、モノポールカレントひとつに対して 1^3 がキューブに対応していたのと同様に、上で定義した $k_\mu^{(n)}(s^{(n)})$ が $n = 2$ のときにモノポールカレント 8 つを導きそれに対して 2^3 のキューブが対応していることがわかる。

上記のことを SU(2) tadpole improved 作用において考えるため、スケール変換 $b = na(\beta)$ から b が一致するように配位を準備した。まず、 $n = 1$ のときは結合定数 $\beta = 3.0$ および格子サイズ 48^4 の original lattice、 $n = 2$ のときは結合定数 $\beta = 3.4$ および格子サイズ 24^4 の blocked lattice、 $n = 3$ のときは結合定数 $\beta = 3.6$ および格子サイズ 16^4 の配位の blocked lattice である。これらの β がおおよそ同じ値の $b = na(\beta)$ を与える。MCG 固定において、ブロックスピン変換されたモノポールカレントから計算されたポテンシャルを図 5 に載せた。さらに MAG 固定のときも同様に測定を行いそのときの比較を表 5 にまとめた。結果として、ブロックスピン変換を行うとモノポールパートから計算されるストリングテンションが向上することがわかった。さらに、original lattice 上ではストリングテンションの比は MAG 固定が高い値を示していたのに対して、ブロックスピン変換後は MCG 固定も同等もしくはそれ以上の値を示すことがわかった。

表 5 MCG 固定と MAG 固定でのブロックスピン変換されたモノポールカレントのストリングテンション。FR はフィッティングレンジを表す。

	n	β	$\sqrt{\sigma a^2}$	FR(r/a)	$\chi^2/N_{d.o.f}$	σ_{mon}/σ_{NA}
MCG	1	3.0	0.2910(1)	5-16	0.482225	0.7807
	2	3.4	0.296(2)	3-11	0.325642	0.815
	3	3.6	0.330(2)	2-8	0.25499	0.842
MAG	1	3.0	0.3026(1)	2-20	0.995868	0.8119
	2	3.4	0.304(1)	2-11	0.919558	0.836
	3	3.6	0.328(3)	2-8	0.827499	0.837

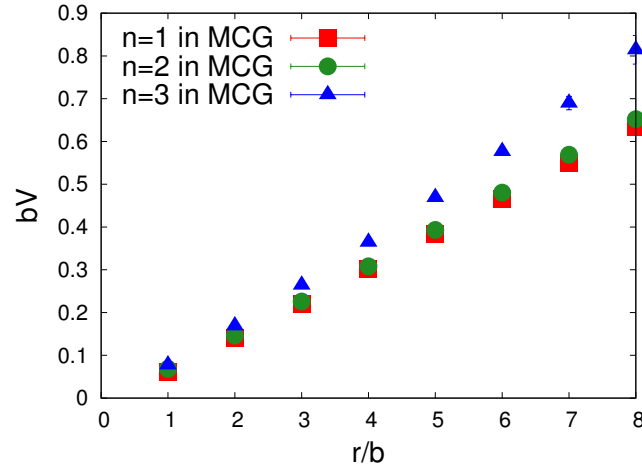


図 5 MCG 固定におけるモノポールの Wilson loop から計算したクォーク・反クォークポテンシャル。 $\beta = 3.0$ は original lattice、 $\beta = 3.4(\beta = 3.6)$ は $n = 2(n = 3)$ の blocked lattice 上で計算されたモノポールからのポテンシャル。

3.5 Flux-tube profile

non-Abelian のカラー電場の空間分布は、Wilson loop とプラケットの相関から計算することが可能である。ここでは、コネク特相関を考える。コネク特相関とは、図 6 のような Wilson loop とプラケットを Schwinger line と呼ばれる Link 変数で繋いだものである [31]。この相関は、

$$\rho_{conn}(W, U_p) = \frac{\langle \text{Tr}(W L U_p L^\dagger) \rangle}{\langle \text{Tr} W \rangle} - \frac{1}{2} \frac{\langle \text{Tr} W \text{Tr} U_p \rangle}{\langle \text{Tr}(W) \rangle} \quad (3.23)$$

で表される。ナイーブに連続極限 $a \rightarrow 0$ をとると、これは場の強さの一次を抜くことに対応していることがわかる。ここで、注意として APE スメアリング等を行った時は、Schwinger line をどこから伸ばすかは注意が必要である。空間方向に APE スメアリングを行った場合は、Wilson loop の時間方向から伸ばすと誤差が小さくなり統計数を少なく計算できる。これは、時間方向から伸ばすことで空間方向の Link 変数を Schwinger line として使用するためである。

この相関から non-Abelian のカラー電場を計算することができるが、Abelian のカラー電場を計算することも容易である。今、Abelian 射影によって得た Abelian ゲージ場から作った Abelian のプラケットを U_p^A と書き、Wilson loop を W^A と書く。ソースである Abelian Wilson loop と Abelian のプラケットの相関を調べるときに、このコネク特相関を全て Abelian の Link 変数に書き換えれば自動的に Schwingerline がキャンセルされディスコネク特相関になる。

$$\rho_{conn}(W^A, U_p^A) = \frac{\langle \text{Tr}(W^A U_p^A) \rangle}{\langle \text{Tr} W^A \rangle} - \frac{1}{2} \frac{\langle \text{Tr} W^A \text{Tr} U_p^A \rangle}{\langle \text{Tr} W^A \rangle} \quad (3.24)$$

ここで、 A はアーベリアンであることを表すしるしである。また双対格子上でカレントのモノポールカレントもオリジナル Lattice 上ではキューブであるために上記の相関から計算が可能であり、

$$\rho_{conn}(W^A, k_i) = \frac{\langle \text{Tr}(W^A k_i) \rangle}{\langle \text{Tr} W^A \rangle} - \frac{1}{2} \frac{\langle \text{Tr} W^A \text{Tr} k_i \rangle}{\langle \text{Tr} W^A \rangle} \quad (3.25)$$

を計算すればよい。ここで、 i は空間の方向の三つの方向である。

本研究では、連続極限を示すため結合定数 3 点 ($\beta = 3.0, 3.3, 3.5$) で測定を行った。ここで、相関をとる Wilson loop のサイズを結合定数ごとに $(R, T) = (3, 3), (5, 5), (7, 7)$ と変えることでクォークと反クォークの距離をおおよそ 0.48 fm で一定に保った。また、フラックスチューブを計算するために座標系を図 7 のようにとった。MCG 固定でのフラックスチューブの結果として、Abelian カラー電場に対して図 8、モノポールカレントに対して図 9 を得た。 E_z 方向のみが相関がでて、残りの方向である E_r, E_ϕ は相関がでなかった。これは、カラー電場が一方方向のみに絞られていることを示しており、フラックスチューブを作っていることを示している。さらに、モノポールカレントは k_ϕ がフラックスチューブから少しだけ離れたところにピークがでていいる。残りの方向は相関を示していないことからモノポールカレントがフラックスチューブのまわりを回転していることが示されている。この結果は、MCG 固定においてもこれまでの先行研究と同様にモノポールの凝縮がカラー電場を絞るといふ双対超伝導描像を支持している。

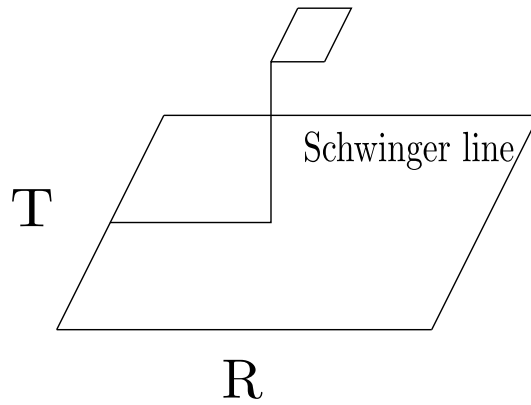


図6 Wilson loop とオペレータを Schwinger line でコネクした図。R は空間方向、T は時間方向を表す。

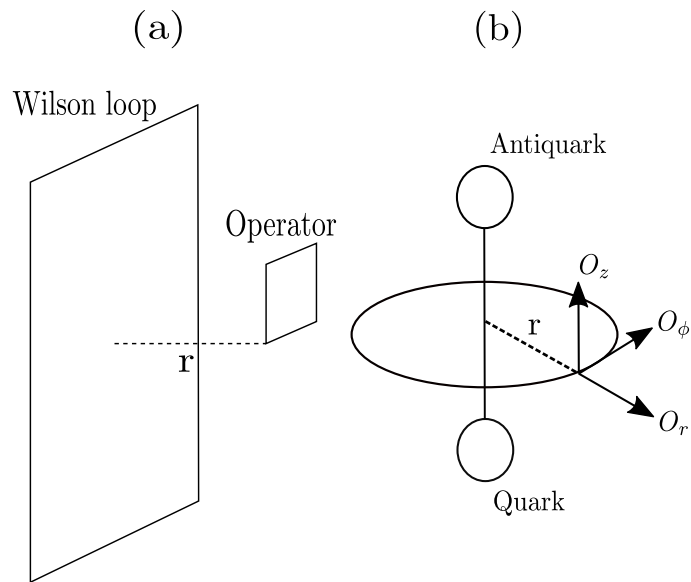


図7 (a) は Wilson loop とオペレータのディスコネクト相関。Abelian の Wilson loop と Abelian のオペレータの相関を計算する際に用いる。(b) はクォーク・反クォークの軸に沿って定義した円柱座標系 (r, ϕ, z) 。

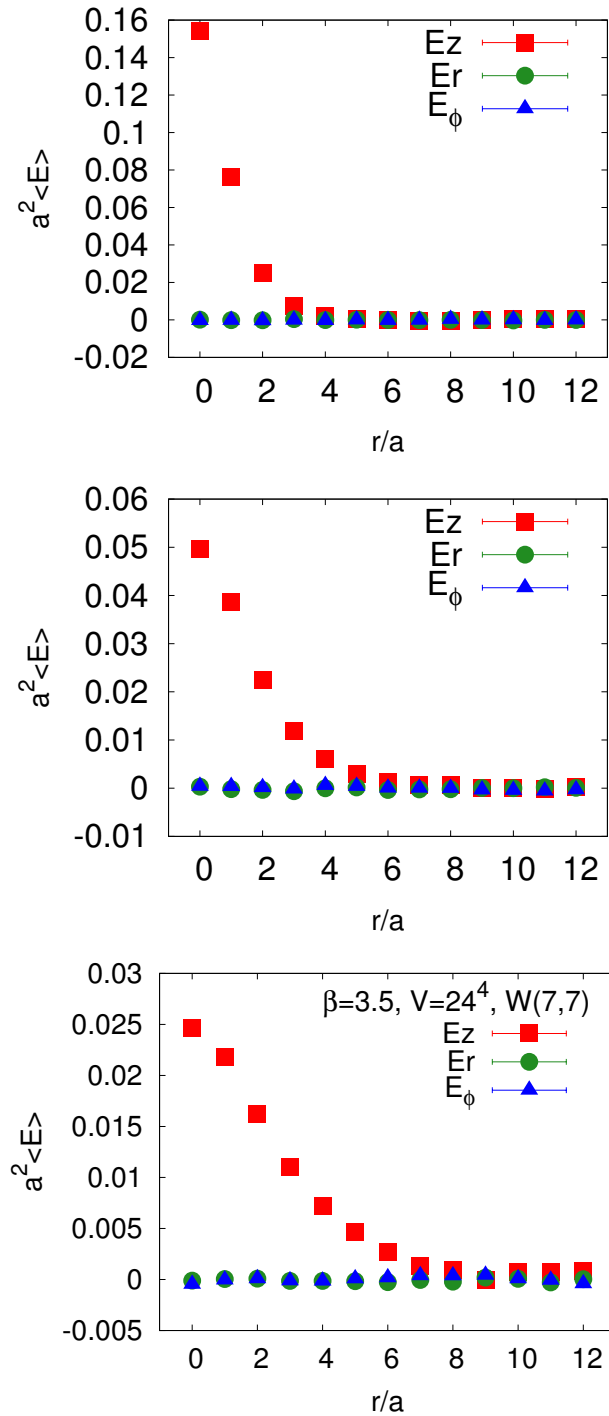


図 8 格子サイズ 24^4 における MCG 固定でのアーベリアンカラー電場の空間分布。結合定数 3 点 ($\beta = 3.0$ (上)、 3.3 (中)、 3.5 (下)) でカラー電場の E_z 方向のみ相関を示しており、カラー電場が一方に絞られていることがわかる。

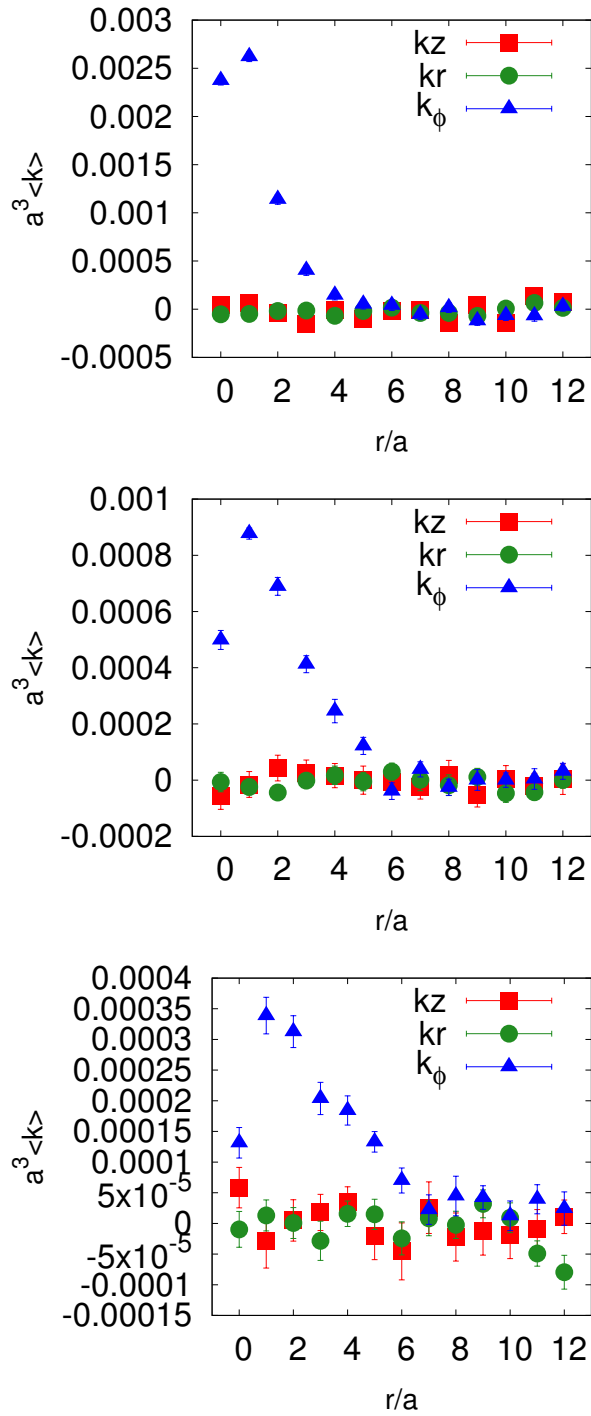


図9 格子サイズ 24^4 における MCG 固定でのモノポールカレントの空間分布。結合定数 3 点 ($\beta = 3.0$ (上)、3.3(中)、3.5(下)) でフラクチュアの周りのモノポールカレントは回転方向である ϕ 方向のみ相関を示している。

アーベリアンカラー電場のゲージ依存性

アーベリアンのカラー電場がどのようにゲージ依存するのかを調べた。ここで、採用したゲージ固定は MCG、DLCG、MAWL、MAU1 固定の 4 つである。ゲージ固定を行った配位でそれぞれ disconnect 相関で Abelian カラー電場を測定し、 E_z 方向をプロットした。結果は図 10 である。図中の MAU1-off はカラー 3 成分に対して MAU1 固定したときのカラー 1, 2 成分のことである。これらの特徴づけるため E_z を、

$$f(r) = c_1 \exp\left(-\frac{r}{\lambda}\right) + c_0 \quad (3.26)$$

という関数でフィッティングを行った。ここで、 λ はロンドン侵入長である。フィッティングの結果を表 6、7、8 にまとめた。係数である c_0 、 c_1 は値がゲージによって異なるが、侵入長 λ は誤差の範囲で概ね一致していることがわかる。これは、侵入長はゲージ依存性がないことを示唆している。侵入長は低エネルギー有効模型において、質量に対応するためこれらの結果は今考えている描像が現実の物理量を導く可能性を示している。

表 6 $\beta = 3.0$ での侵入長

	$\lambda[\text{fm}]$	c_1	c_0
MCG	0.147(5)	0.236(4)	-0.00012(15)
DLCG	0.149(4)	0.232(2)	-0.00016(8)
MAWL	0.147(5)	0.241(4)	-0.00015(15)
MAU1	0.141(5)	0.358(5)	-0.00019(17)
MAU1(off-diagonal)	0.153(6)	0.147(2)	-0.00010(10)

表 7 $\beta = 3.3$ での侵入長

	$\lambda[\text{fm}]$	c_1	c_0
MCG	0.168(12)	0.0705(15)	-0.00027(21)
DLCG	0.173(13)	0.0703(17)	-0.00089(25)
MAWL	0.168(12)	0.0718(16)	-0.00020(22)
MAU1	0.167(15)	0.10(7)	-0.00049(49)
MAU1(off-diagonal)	0.164(12)	0.041(1)	-0.00022(13)

表 8 $\beta = 3.5$ での侵入長

	$\lambda[\text{fm}]$	c_1	c_0
MCG	0.189(16)	0.0330(12)	-0.00045(44)
DLCG	0.175(13)	0.0352(12)	-0.00067(36)
MAWL	0.189(16)	0.0336(13)	-0.00043(45)
MAU1	0.190(14)	0.0482(15)	-0.00065(53)
MAU1(off-diagonal)	0.175(17)	0.0175(8)	-0.000(2)

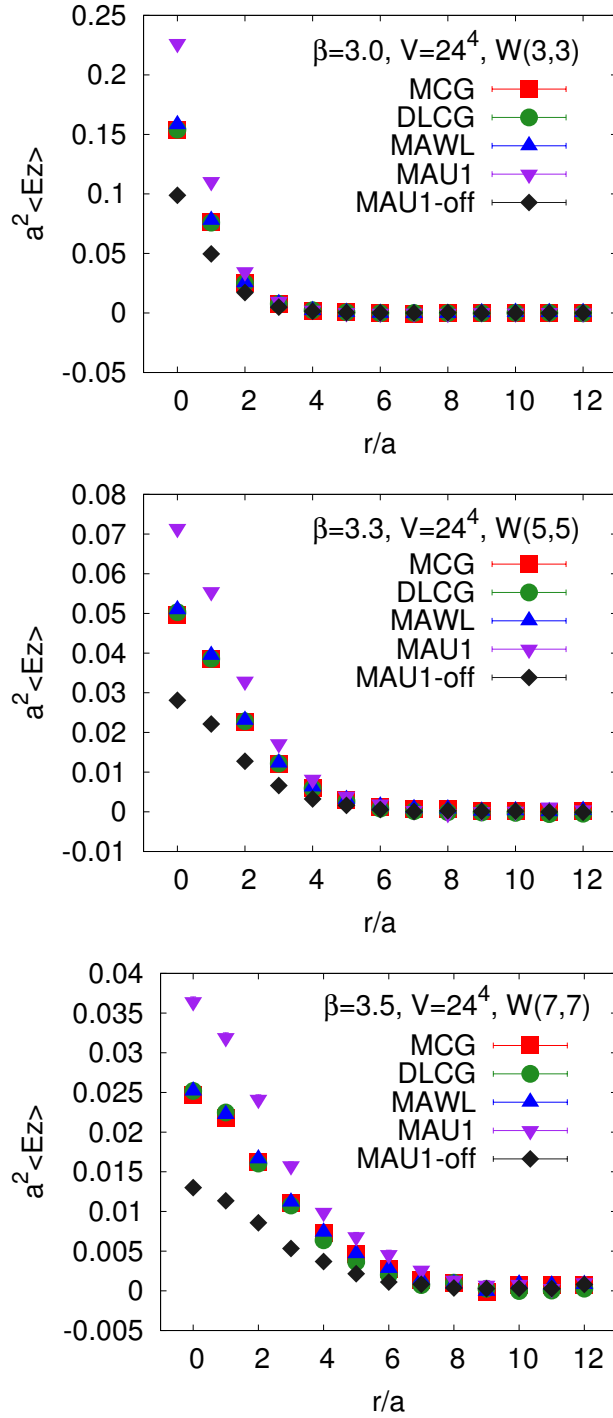


図 10 格子サイズ 24^4 、結合定数 $\beta = 3.0$ (上)、 3.3 (中)、 3.5 (下) での各ゲージ固定での Abelian カラー電場 E_z

カラー間の相関

本研究では、VNABIに基づき Lattice 上で Abelian ゲージ場をカラー事に定義しているためにカラー間の相関を調べることができる。例えば、カラー電場は、

$$\rho_{conn}(W^a, U_p^b) = \frac{\langle \text{Tr}(W^a U_p^b) \rangle}{\langle \text{Tr} W^a \rangle} - \frac{1}{2} \frac{\langle \text{Tr} W^a \text{Tr} U_p^b \rangle}{\langle \text{Tr} W^a \rangle} \quad (3.27)$$

という相関から計算できる。カラーの添え字である a, b を変えることでカラー間の相関を調べることができる。この相関はグローバルにカラーの対称性があるゲージ固定のもとでのみ計算が可能である。ゲージ固定なしの先行研究 [19] でもグローバルにカラーの対称性があるがこの場合は上記の相関を計算するのが統計的に非常に困難である。計算した結果を図 11 にまとめた。結果として、異なるカラーのときには相関はないことがわかった。さらに、オペレータを変えることで Wilson loop とモノポールでカラー間の相関を計算することができる。

$$\rho_{conn}(W^a, k_\phi^b) = \frac{\langle \text{Tr}(W^a k_\phi^b) \rangle}{\langle \text{Tr} W^a \rangle} - \frac{1}{2} \frac{\langle \text{Tr} W^a \text{Tr} k_\phi^b \rangle}{\langle \text{Tr} W^a \rangle} \quad (3.28)$$

この相関の計算した結果を図 12 にまとめた。この結果から、カラーフラックスチューブは同じカラーのモノポールカレントによって絞られていることが示唆される。

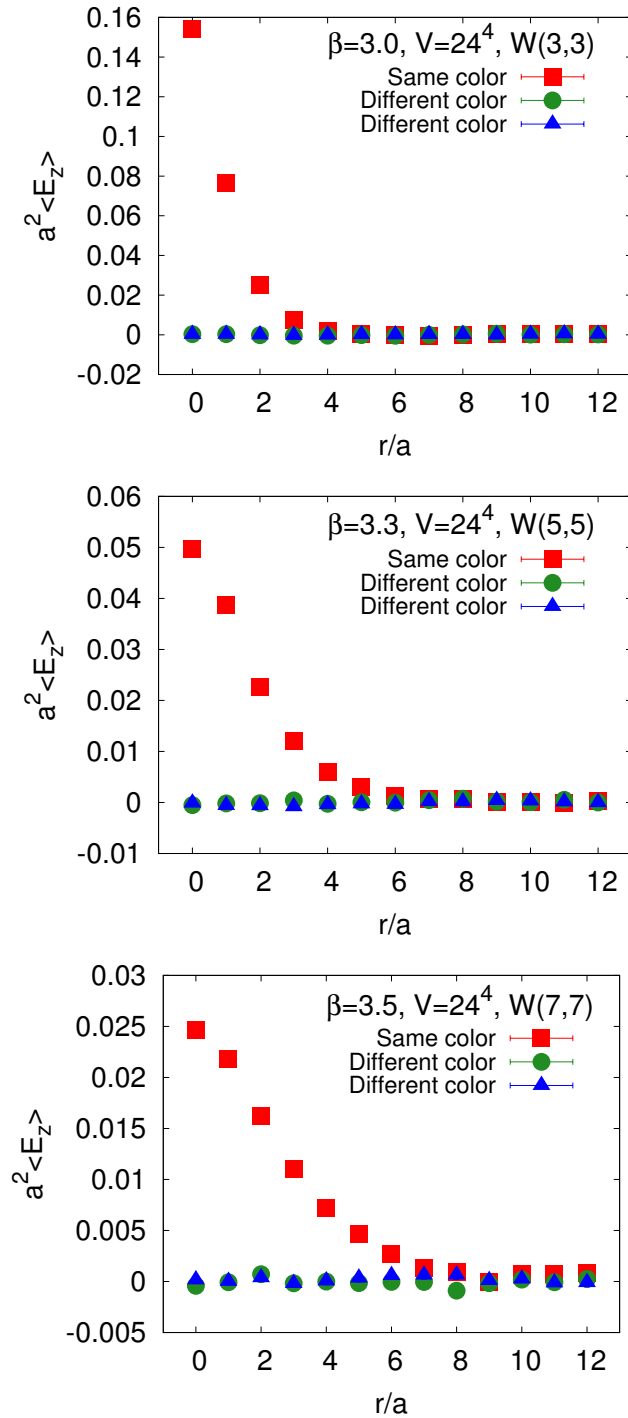


図 11 MCG 固定における格子サイズ 24^4 、結合定数 $\beta = 3.0$ (上)、 3.3 (中)、 3.5 (下) でのカラー間の相関。

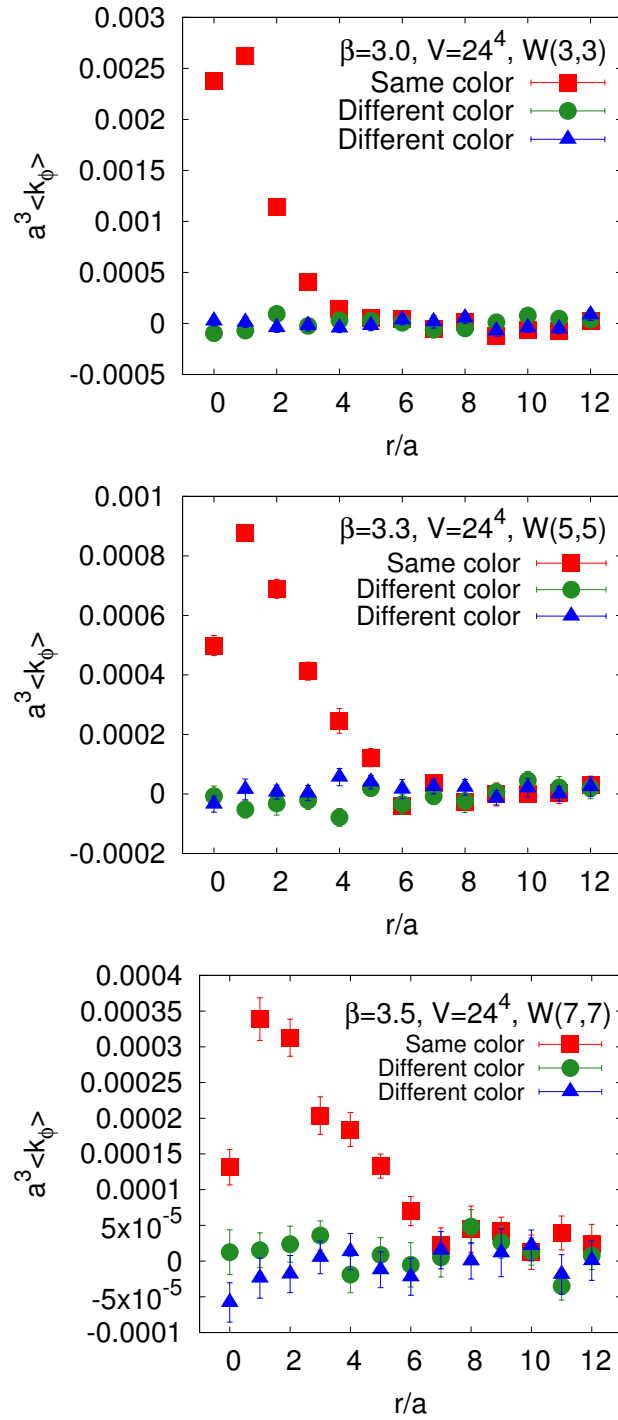


図 12 MCG 固定における格子サイズ 24^4 、結合定数 $\beta = 3.0$ (上)、 3.3 (中)、 3.5 (下) でのモノポールカレントとカラーが同じ (異なる) ソース間の相関。

双対アンペールの法則

ここで、Abelian カラー電場を何が絞っているかを調べるために双対アンペールの法則

$$(\text{rot}E^a)_\phi = \partial_t B_\phi^a + 2\pi k_\phi^a, \quad (3.29)$$

を確かめた。ゲージによっては、格子上ではモノポールカレントではなく Abelian カラー磁場の時間変化 $\partial_t B_\phi$ が Abelian カラー電場を絞っていることが Landau ゲージ固定を用いた先行研究で調べられている。一方で、ゲージ固定なしでの先行研究では $\partial_t B_\phi = 0$ が確かめられている。今回は MCG 固定および MAU1 固定で双対アンペールの法則を結合定数 3 点で測定し図 13 にまとめた。結果として、まず結合定数が大きいところでは双対アンペールの法則を確認できた。また、MCG 固定のときは $\partial_t B_\phi \neq 0$ であることが図 13 からわかる。これは、モノポールカレントから計算されるストリングテンションが non-Abelian のストリングテンションから計算されるストリングテンションを 100 パーセント再現していないことと関連があると考えられる。実際、ゲージ固定なしの先行研究ではストリングテンションを完全に再現しておりなおかつ $\partial_t B_\phi = 0$ であった。

また、MAU1 の off-diagonal での計算結果は図 14 である。MAU1 はカラーの対称性を破れるゲージ固定になっており、off-diagonal はそのときのカラー 1, 2 成分のことである。この結果は、Landau ゲージ固定の結果に類似しており、Lattice 上でモノポールカレントの定義に関係していると考えられる。

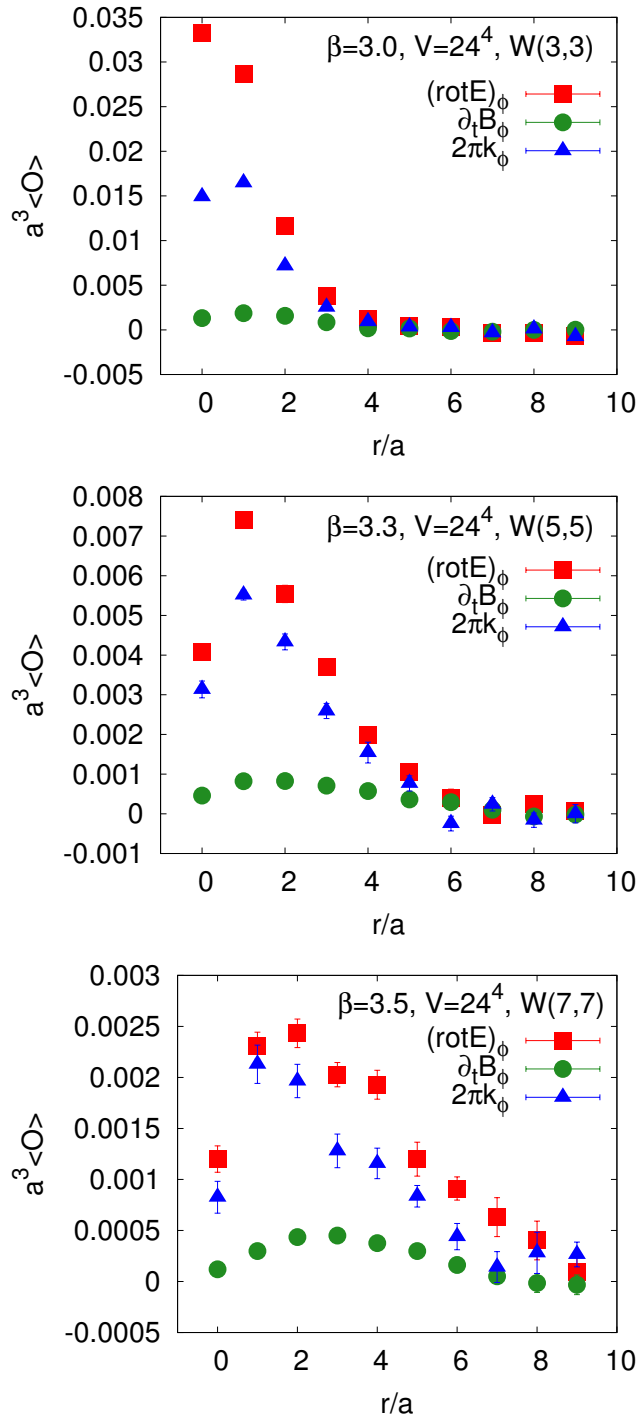


図 13 MCG 固定における格子サイズ 24^4 、結合定数 $\beta = 3.0$ (上)、 3.3 (中)、 3.5 (下) での双対アンペールの法則。

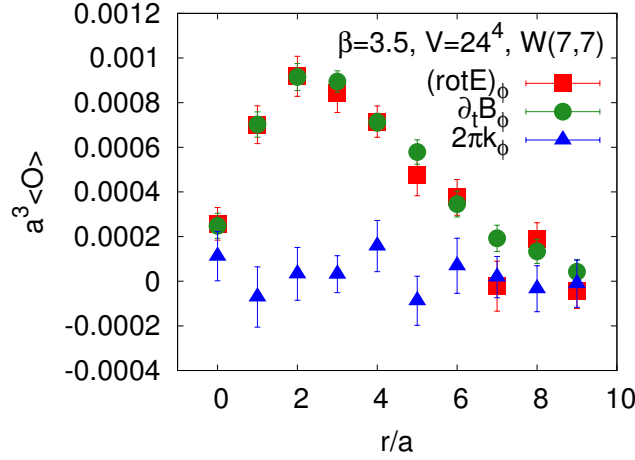


図 14 MAU1 固定における格子サイズ 24^4 、結合定数 $\beta = 3.5$ での off-diagonal での双対アンペールの法則。

真空のタイプ

QCD の真空を双対超伝導状態と考えると、真空のタイプを決定することは重要である。真空のタイプは Ginzburg-Landau パラメータで特徴づけられる。GL パラメータを

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{\lambda}{\xi} \\ \sqrt{2}\kappa &= \frac{\lambda}{\frac{\xi}{\sqrt{2}}}\end{aligned}\quad (3.30)$$

とする。ここで、 λ は侵入長、 ξ はコヒーレンス長である。真空のタイプは $\sqrt{2}\kappa < 1$ のとき Type1、 $\sqrt{2}\kappa > 1$ のとき Type2 と分類される。

侵入長 λ は Abelian カラー電場をフィッティングすることで得られる一方で、コヒーレンス長を決定する方法は自明ではない。先行研究では、non-Abelian のカラー電場に対してフィッティング関数を工夫することで侵入長とコヒーレンス長を決めることで真空のタイプを決定することを行っているが、ここでは、モノポールカレントからコヒーレンス長を決定することを考える。これは、先行研究 [13, 19] に基づく方法である。今、コヒーレンス長を決定するため、モノポールカレント二乗（モノポール密度の二乗）を Wilson loop との相関から計算することを考える。

$$\langle k^2 \rangle_{q\bar{q}} = \frac{\langle \text{Tr } W^a \text{Tr } \sum_{\mu} k_{\mu} k_{\mu} \rangle}{\langle \text{Tr } W^a \rangle} - \langle \text{Tr } \sum_{\mu} k_{\mu} k_{\mu} \rangle \quad (3.31)$$

この相関から計算したものを、

$$g(r) = c'_1 \exp\left(-\frac{r}{\frac{\xi}{\sqrt{2}}}\right) + c'_0, \quad (3.32)$$

でフィッティングすることでコヒーレンス長を得ることができる。

本研究では、この計算は Iwasaki 作用で発生させた配位で計算を行った。結合定数は $\beta = 1.10, 1.28, 1.40$

の3点で格子サイズは 24^4 で統一した。また計算には、1000個の配位を用いた。結果として、モノポールカレントの二乗と E_z をプロットした図をのせる。またフィッティングによって得た真空のタイプは以下の表に記載した。この結果は Lattice サイズに関しては先行研究と対応させていないが、結合定数3点で真空のタイプが Type1 と Type2 のボーダーとなることがわかった。これは、ゲージ固定なしの結果を MCG で同様に再現することを意味しており、グローバルにカラーの対称性を守る MCG 固定は統計数を少なく真空のタイプを導くことができた。

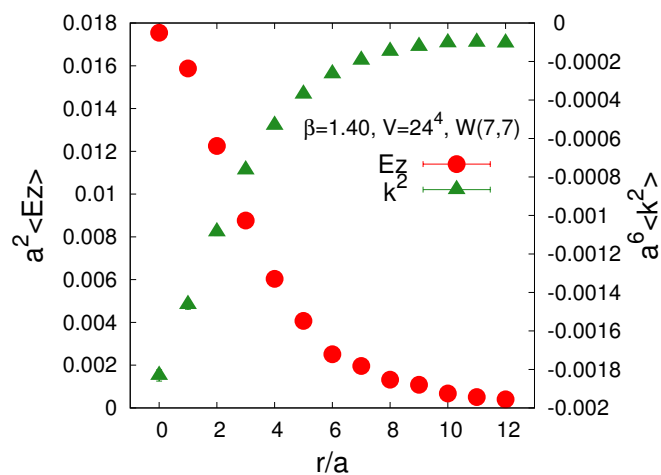


図 15 格子サイズ 24^4 、Iwasaki 作用 $\beta = 1.40$ での E_z と k^2

表 9 MCG 固定での GL パラメータ

β	$\lambda[\text{fm}]$	$\xi/\sqrt{2} [\text{fm}]$	$\sqrt{2}\kappa$
1.10	0.124(2)	0.121(2)	1.022(1)
1.28	0.105(4)	0.087(3)	1.208(3)
1.40	0.144(8)	0.128(5)	1.13(1)

4 SU(3) ゲージ理論における VNABI による双対マイスナー効果

VNABI により導かれるモノポールカレントが双対マイスナー効果を示すのかを調べるために、本研究では SU(2) ゲージ理論よりもより現実の系に近い SU(3) ゲージ理論を用いてカラー電場の測定を行った。

4.1 Wilson action

本研究では、SU(3) Wilson 作用を用いて計算を行う。SU(3) ゲージ理論では、 $\beta = \frac{6}{g^2}$ であり、Link 変数 $U_\mu(s)$ は

$$U_\mu(s) = \exp\left(iagA_\mu^a(s)\frac{\lambda^a}{2}\right) \quad (4.1)$$

である。ここで λ^a はゲルマン行列であり、Link 変数は 3×3 の複素行列である。双対マイスナー効果を調べるために、ここでは有限温度系を考える。有限温度系において、格子間隔と温度の関係は、

$$T = \frac{1}{N_t a(\beta)} \quad (4.2)$$

である。これより本研究では、格子として以下の表のものを考えている。

β	N_t
5.6	4
5.75	6
5.9	8
6.05	10

このパラメータでの温度は閉じ込め相であり、温度としては $0.8T_c$ である。 T_c は閉じ込め非閉じ込め相転移の臨界温度である。本研究では、 $\beta = 5.9$ での計算を行った。次に有限温度系でフラクチューブを計算する方法を述べる。

4.2 Flux-tube profile at finite temperature

SU(3) ゲージ理論において、有限温度系でカラー電場の空間分布を調べるためにオペレータと二つのポリヤコフループのコネクト相関を調べる。コネクト相関は、

$$\rho_{conn}(O(r)) = \frac{\langle \text{Tr}(PLO(r)L^\dagger) \text{Tr} P^\dagger \rangle}{\langle \text{Tr} P \text{Tr} P^\dagger \rangle} - \frac{1}{3} \frac{\langle \text{Tr} P \text{Tr} P^\dagger \text{Tr} O(r) \rangle}{\langle \text{Tr} P \text{Tr} P^\dagger \rangle}, \quad (4.3)$$

である [32, 33]。カラー電場を調べる場合はオペレータ $O(r)$ にブラケット $U_{\mu\nu}(r)$ を用いる。このとき、相関はナイーブな連続極限 $a \rightarrow 0$ で $F_{\mu\nu}$ に対応する。

連続極限を調べるために、ポリヤコフープ間の距離 d を一定に保つ必要がある。(4.2) の関係から、

$$3a(5.75) = 5a(6.05) \quad (4.4)$$

$$4a(5.6) = 6a(5.75) \quad (4.5)$$

$$6a(5.75) = 8a(5.9) \quad (4.6)$$

といった距離の取り方が複数考えられるが、ここでは、 $\beta = 5.9$ で $d = 3$ での計算を載せる。測定のために APE スメアリングおよび HYP スメアリングを採用した。

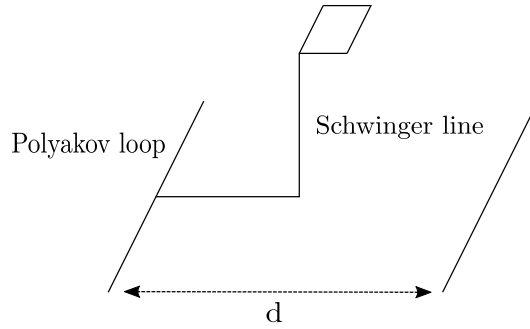


図 16 Polyakov loop とのコネクト相関を表した図。

4.3 格子上での Abelian 射影

SU(2) ゲージ理論と同様に U(1) ゲージ場を SU(3) ゲージ理論における Link 変数から取り出す。これは、以下の量を最大とするように定義される。

$$R = \sum_{s,\mu} \text{Re Tr} \{ e^{i\lambda^1 \theta_\mu^1(s)} U_\mu^\dagger(s) \} \quad (4.7)$$

ここで λ^1 はゲルマン行列のひとつである。以下では、ここから求めることができる U(1) ゲージ場 $\theta_\mu^1(s)$ を導出する。

まず SU(3) Link 変数を次のように書く。

$$U_\mu(s) = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

このエルミート共役は、

$$U_\mu^\dagger(s) = \begin{pmatrix} U_{11}^* & U_{21}^* & U_{31}^* \\ U_{12}^* & U_{22}^* & U_{32}^* \\ U_{13}^* & U_{23}^* & U_{33}^* \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

である。ここで行列要素は全て複素数である。例として、 U_{11} は二つの実数を使って

$$U_{11} = \text{Re}(U_{11}) + i\text{Im}(U_{11}) \quad (4.10)$$

$$U_{11}^* = \text{Re}(U_{11}) - i\text{Im}(U_{11}) \quad (4.11)$$

と表される。

次に、 $e^{i\lambda^1\theta_\mu^1(s)}$ を行列表記にすると、

$$e^{i\lambda^1\theta_\mu^1(s)} = I\cos\theta^1 + i\lambda^1\sin\theta^1 \quad (4.12)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta^1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta^1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & i\sin\theta^1 & 0 \\ i\sin\theta^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta^1 & i\sin\theta^1 & 0 \\ i\sin\theta^1 & \cos\theta^1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

となる。ここで、 I は単位行列である。(簡単のため途中 μ, s は省略した。) 行列表記が求まったことから (4.7) を計算することが可能である。 $e^{i\lambda^1\theta_\mu^1(s)}U_\mu^\dagger(s)$ を求めると、

$$e^{i\lambda^1\theta_\mu^1(s)}U_\mu^\dagger(s) = \begin{pmatrix} \cos\theta^1 & i\sin\theta^1 & 0 \\ i\sin\theta^1 & \cos\theta^1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11}^* & U_{21}^* & U_{31}^* \\ U_{12}^* & U_{22}^* & U_{32}^* \\ U_{13}^* & U_{23}^* & U_{33}^* \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

$$= \begin{pmatrix} U_{11}^*\cos\theta^1 + iU_{12}^*\sin\theta^1 & - & - \\ - & U_{22}^*\cos\theta^1 + iU_{21}^*\sin\theta^1 & - \\ - & - & U_{33}^* \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

となる。(すぐにトレースをとるため非対角成分は省略した。) この行列のトレースをとると、

$$\begin{aligned} & \text{Tr}\{e^{i\lambda^1\theta_\mu^1(s)}U_\mu^\dagger(s)\} \\ &= U_{11}^*\cos\theta^1 + iU_{12}^*\sin\theta^1 + U_{22}^*\cos\theta^1 + iU_{21}^*\sin\theta^1 + \text{Re}(U_{33}) \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$= \cos\theta^1\{\text{Re}(U_{11}) + \text{Re}(U_{22})\} + \sin\theta^1\{\text{Im}(U_{12}) + \text{Im}(U_{21})\} + \text{Re}(U_{33}) + i(-) \quad (4.18)$$

となる。この実数部分をとると、

$$\begin{aligned} & \text{Re Tr}\{e^{i\lambda^1\theta_\mu^1(s)}U_\mu^\dagger(s)\} \\ &= \cos\theta^1\{\text{Re}(U_{11}) + \text{Re}(U_{22})\} + \sin\theta^1\{\text{Im}(U_{12}) + \text{Im}(U_{21})\} + \text{Re}(U_{33}) \end{aligned} \quad (4.19)$$

となる。これを最大化するものが $U(1)$ ゲージ場のため極値の条件から決めれば良い。

上記のことから、

$$\tan\theta^1 = \frac{\{\text{Im}(U_{12}) + \text{Im}(U_{21})\}}{\{\text{Re}(U_{11}) + \text{Re}(U_{22})\}} \quad (4.20)$$

と求まるため、 $SU(3)$ ゲージ理論から Abelian 射影によって抜き出される Abelian ゲージ場 $\theta_\mu^1(s)$ は

$$\theta_\mu^1(s) = \tan^{-1} \frac{\{\text{Im}(U_{12}) + \text{Im}(U_{21})\}}{\{\text{Re}(U_{11}) + \text{Re}(U_{22})\}} \quad (4.21)$$

である。

4.3.1 $SU(3)$ での双対マイスナー効果

Abelian 射影で得た Abelian ゲージ場 $\theta_\mu^1(s)$ から双対マイスナー効果を調べる。 $SU(2)$ ゲージ理論のときは MCG 固定といったグローバルなカラーの対称性を守るゲージ固定を行ったが、 $SU(2)$ ゲージ理論での先行研究 [19] を参考にゲージ固定なしで調べる。このとき、Abelian カラー電場およびモノポールカレントの空間

分布をポリヤコフループの相関から調べるが、ここでは non-Abelian のポリヤコフループと Abelian のオペレータのコネクト相関を調べる。つまり、Schwinger line はそのまま残した状態で計算を行った。評価の際には、ランダムゲージ変換 [19] を用いた。

結果として、図 17 のように non-Abelian カラー電場と Abelian カラー電場の両方でカラー電場が絞られていることがわかった。さらに、カラー電場を SU(2) のときと同様に、

$$f(r) = c_1 \exp\left(-\frac{r}{\lambda}\right) + c_0 \quad (4.22)$$

でフィッティングを行い、侵入長を評価し結果を表 11 にまとめた。non-Abelian と Abelian の侵入長は誤差の範囲を考えると近い値をとっており、今回新しく定義した Abelian のゲージ場が non-Abelian の電場を再現していることがわかった。これは、VNABI が SU(2) ゲージ理論と同様に SU(3) でも双対マイスナー効果を説明することを示唆している。

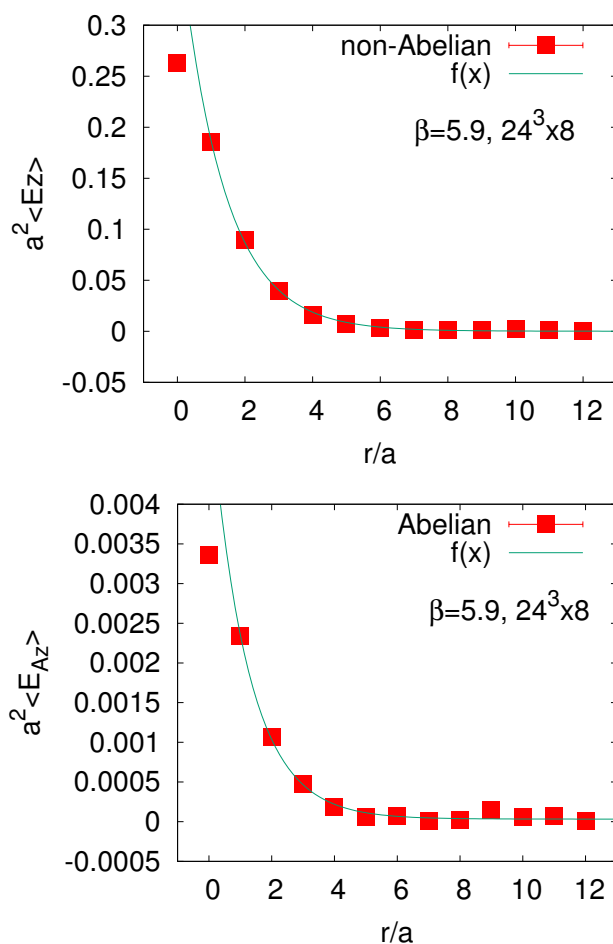


図 17 $\beta = 5.9, 24^3 \times 8$ での non-Abelian カラー電場 E_z (上) および Abelian カラー電場 E_z^A (下)。

表 11 $\beta = 5.9, 24^3 \times 8$ での non-Abelian カラー電場 E_z および Abelian カラー電場 E_z^A の侵入長 λ 。FR はフィットレンジを表す。

	λ	c_1	c_0	FR	$\chi^2/N_{d.o.f}$
non-Abelian	1.30(3)	0.401(8)	0.0001(8)	1-10	0.71578
Abelian	1.18(7)	0.0053(3)	0.00003(2)	1-9	0.814323

モノポールカレント

コネク特相関でモノポールカレントを計算することを考えたとき、モノポールカレントは original Lattice 上では、キューブであるためプラケット 6 面を Schwinger line でつなげ Dirac string を評価する必要がある。この相関の計算は現在進行中である。モノポールカレントをこの相関で計算し、 k^2 を計算することで SU(3) ゲージ理論での真空のタイプを VNABI のモノポールから計算できる可能性がある。

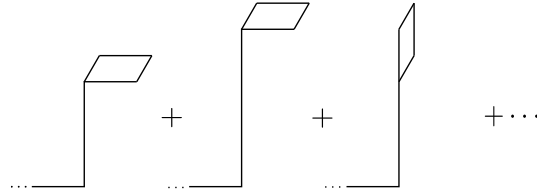


図 18 コネク特相関でモノポールカレントを計算するために、6 面をコネク特する必要がある。

5 まとめと考察

本論文では、クォーク閉じ込め機構の候補である双対マイスナー効果の研究に関する進展をまとめた。連続理論において、QCD でモノポールの自由度を定義するためにはこれまで部分的なゲージ固定が行われてきたが、本研究では QCD で通常成り立つ非可換ビアンキ恒等式の破れから導かれる Abelian モノポールを格子上で評価した。本研究ではクエンチ近似のもと SU(2) ゲージ理論および SU(3) ゲージ理論でストリングテンションおよびカラー電場およびモノポールの空間分布を求め、その研究結果および進捗をまとめた。

SU(2) ゲージ理論においては、グローバルなカラーの対称性を保つゲージ固定を導入することで今回評価する Abelian ゲージ場およびモノポールを統計数が少なく評価することができた。さらにこれまで先行研究では行うことのできなかつた、Abelian のソースと Abelian のオペレータの相関を計算することができ、Abelian の文脈でカラーフラックスチューブは Abelian カラー電場が同じカラーのモノポールカレントにより絞られるという描像を得た。またこれらのモノポールカレントからモノポールパートの Wilson loop を計算しストリングテンションを評価し、ブロックスピン変換を用いることでこれまで用いられてきた MA 固定と同様に non-Abelian のストリングテンションを再現するモノポールドミノナンスの存在がわかった。さらに、複数の結合定数において同様の結果を示すことがわかり、これはこのモノポールの連続極限の存在を支持し、連続理論において非可換ビアンキ恒等式の破れが起こりうることを示唆している。

SU(3) ゲージ理論においては、有限温度系でカラーフラックスチューブの評価を行った。SU(2) ゲージ理論のときと同様に Abelian のカラー電場が絞られていることがわかり、さらに侵入長は non-Abelian のカラー電場を再現していることがわかった。これらは SU(2) の先行研究 [19] と同様にゲージ固定なしでの結果である。しかしながら、本論文では結合定数は 1 点での結果であり、またモノポールカレントの測定から真空のタイプの決定を行うことができなかった。これらは現在計算が進行中であり、連続極限を確かめることが今後重要な課題として残っている。

これまでの双対超伝導描像における閉じ込め機構の研究であるが、有限温度系および有限密度系での研究はさかんに行われてきていない。SU(2) ゲージ理論においては、非閉じ込め相において spatial ストリングテンションに対するモノポールドミノナンスが確かめられており、QCD の中にあるモノポールの自由度が QCD の非摂動効果を説明することが示唆されている [20]。そのため、SU(3) ゲージ理論において同様のモノポールドミノナンスが起こるのか調べることは大変興味深い。さらに、高密度領域は符号問題もあり Abelian のモノポールの文脈では調べられておらず、双対超伝導描像の研究はまだ未開拓な領域を多く残していると感じられる。これらの高温高密度の領域で Abelian モノポールを調べることは QCD 相図の解明に大きく寄与する可能性があり、またモノポール凝縮による閉じ込め機構の固い証明を与えると期待される。

6 付録

6.1 SU(2) Link 変数の覚書

SU(2) ゲージ理論に関しての基本事項をまとめておく。まず SU(2) ゲージ理論での Link 変数は、

$$U_\mu(s) = U_\mu^0(s)\mathbf{I} + i\sigma^a U_\mu^a(s) \quad (a = 1, 2, 3) \quad (6.1)$$

と Pauli 行列で展開することができる。ここで、 \mathbf{I} は単位行列で $U_\mu^0(s)$ および $U_\mu^a(s)$ は実数である。Pauli 行列は、

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

$$\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

である。これより、SU(2) の Link 変数は

$$U_\mu(s) = \begin{pmatrix} U_\mu^0(s) + iU_\mu^3(s) & iU_\mu^1(s) + U_\mu^2(s) \\ iU_\mu^1(s) - U_\mu^2(s) & U_\mu^0(s) - iU_\mu^3(s) \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

と表すことができる。Wilson loop といった格子ゲージ理論での観測量はこの Link 変数の掛け算で表されるため以下に便利のためこの実数表示で掛け算を記載しておく。^{*1}まずエルミート共役は、

$$U_\mu^\dagger(s) = \begin{pmatrix} U_\mu^0(s) - iU_\mu^3(s) & -iU_\mu^1(s) - U_\mu^2(s) \\ -iU_\mu^1(s) + U_\mu^2(s) & U_\mu^0(s) + iU_\mu^3(s) \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

である。Link 変数の積は、

$$\begin{aligned} U_\mu(s)U_\nu(s + \hat{\mu}) &= \begin{pmatrix} U_\mu^0(s) + iU_\mu^3(s) & iU_\mu^1(s) + U_\mu^2(s) \\ iU_\mu^1(s) - U_\mu^2(s) & U_\mu^0(s) - iU_\mu^3(s) \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} U_\nu^0(s + \hat{\mu}) + iU_\nu^3(s + \hat{\mu}) & iU_\nu^1(s + \hat{\mu}) + U_\nu^2(s + \hat{\mu}) \\ iU_\nu^1(s + \hat{\mu}) - U_\nu^2(s + \hat{\mu}) & U_\nu^0(s + \hat{\mu}) - iU_\nu^3(s + \hat{\mu}) \end{pmatrix} \\ &= X \end{aligned} \quad (6.7)$$

X は SU(2) の行列のため Pauli 行列で展開できて、そのときの係数は

$$X_\mu^0(s) = U_\mu^0(s)U_\nu^0(s + \hat{\mu}) - U_\mu^1(s)U_\nu^1(s + \hat{\mu}) - U_\mu^2(s)U_\nu^2(s + \hat{\mu}) - U_\mu^3(s)U_\nu^3(s + \hat{\mu}) \quad (6.9)$$

$$X_\mu^1(s) = U_\mu^0(s)U_\nu^1(s + \hat{\mu}) + U_\mu^1(s)U_\nu^0(s + \hat{\mu}) - U_\mu^2(s)U_\nu^3(s + \hat{\mu}) + U_\mu^3(s)U_\nu^2(s + \hat{\mu}) \quad (6.10)$$

$$X_\mu^2(s) = U_\mu^0(s)U_\nu^2(s + \hat{\mu}) + U_\mu^1(s)U_\nu^3(s + \hat{\mu}) + U_\mu^2(s)U_\nu^0(s + \hat{\mu}) - U_\mu^3(s)U_\nu^1(s + \hat{\mu}) \quad (6.11)$$

$$X_\mu^3(s) = U_\mu^0(s)U_\nu^3(s + \hat{\mu}) - U_\mu^1(s)U_\nu^2(s + \hat{\mu}) + U_\mu^2(s)U_\nu^1(s + \hat{\mu}) + U_\mu^3(s)U_\nu^0(s + \hat{\mu}) \quad (6.12)$$

となる。コード上では、これを繰り返し計算することでオペレータを構成する。

^{*1} 記号が間違っていないことを祈る。

6.2 Jackknife 法

物理量 \hat{O} を N 回測定したときを考える。この測定値から期待値を求めたい。この時に、誤差はその実験および数値実験を保証する重要な量になる。Jackknife 法は誤差評価の 1 つの方法であり、任意の物理量の評価の際に有効である。Jackknife 法はデータを複数の bin に分けて、誤差の計算を行う。ここでは、bin サイズ 1 での Jackknife 法の誤差評価が統計誤差になっていることを示す。 N 個のデータがあったとき、Jackknife での誤差および分散を

$$\delta_{jack} \equiv \sqrt{(N-1)\sigma_{jack}} \quad (6.13)$$

$$\sigma_{jack}^2 \equiv \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (O_j^2 - \langle O \rangle_{jack}^2) \quad (6.14)$$

と表される。

ここで、 O_j は bin サイズ 1 での期待値、 $\langle O \rangle_{jack}$ は全体の期待値で、

$$O_j \equiv \frac{1}{N-1} \sum_{k \neq j} O_k \quad (6.15)$$

$$\begin{aligned} \langle O \rangle_{jack} &\equiv \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N O_j \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(\frac{1}{N-1} \sum_{k \neq j} O_k \right) \end{aligned} \quad (6.16)$$

である。

これが統計誤差および分散になることは以下に確かめられる。まず前もって次の量を計算しておく。

$$\begin{aligned} O_j^2 &= \left(\frac{1}{N-1} \sum_{k \neq j} O_k \right)^2 \\ &= \frac{1}{(N-1)^2} \left(\sum_{i=1}^N O_i - O_j \right)^2 \\ &= \frac{1}{(N-1)^2} \left(\left(\sum_{i=1}^N O_i \right)^2 - 2O_j \sum_{i=1}^N O_i + O_j^2 \right) \end{aligned} \quad (6.17)$$

両辺の和をとると、

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N O_j^2 &= \sum_{j=1}^N \frac{1}{(N-1)^2} \left(\left(\sum_{i=1}^N O_i \right)^2 - 2O_j \sum_{i=1}^N O_i + O_j^2 \right) \\ &= \frac{1}{(N-1)^2} \left(N \left(\sum_{i=1}^N O_i \right)^2 - 2 \sum_{j=1}^N O_j \sum_{i=1}^N O_i + \sum_{j=1}^N O_j^2 \right) \\ &= \frac{1}{(N-1)^2} \left((N-2) \left(\sum_{i=1}^N O_i \right)^2 + \sum_{i=1}^N O_i^2 \right) \end{aligned} \quad (6.18)$$

同様に、

$$\begin{aligned}
\langle O \rangle_{jack}^2 &= \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N O_j \right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{1}{N-1} \sum_{k \neq j} O_k \right)^2 \\
&= \frac{1}{N^2(N-1)} \left(\sum_{j=1}^N \sum_{k \neq j} O_k \right)^2 \\
&= \frac{1}{N^2(N-1)^2} \left(\sum_{j=1}^N (\sum_{i=1}^N O_i - O_j) \right)^2 \\
&= \frac{1}{N^2(N-1)^2} \left(N \sum_{i=1}^N O_i - \sum_{j=1}^N O_j \right)^2 \\
&= \frac{1}{N^2(N-1)^2} \left((N-1) \sum_{i=1}^N O_i \right)^2 \\
&= \frac{1}{N^2} \left(\sum_{i=1}^N O_i \right)^2
\end{aligned} \tag{6.19}$$

となる。

これらより、Jackknife 法の分散は

$$\begin{aligned}
\sigma_{jack}^2 &= \frac{1}{N} \left(\sum_{j=1}^N O_j^2 - \sum_{j=1}^N \langle O \rangle_{jack} \right) \\
&= \frac{1}{N} \left(\frac{1}{(N-1)^2} \left((N-2) \left(\sum_{i=1}^N O_i \right)^2 + \sum_{i=1}^N O_i^2 \right) - \frac{1}{N^2} \left(\sum_{i=1}^N O_i \right)^2 \right) \\
&= \frac{1}{N^2(N-1)^2} \left(N(N-2) \left(\sum_{i=1}^N O_i \right)^2 + N \sum_{i=1}^N O_i^2 - (N-1)^2 \left(\sum_{i=1}^N O_i \right)^2 \right) \\
&= \frac{1}{N^2(N-1)^2} \left(N^2 \left(\sum_{i=1}^N O_i \right)^2 - 2N \left(\sum_{i=1}^N O_i \right)^2 + N \sum_{i=1}^N O_i^2 - N^2 \left(\sum_{i=1}^N O_i \right) + 2N \left(\sum_{i=1}^N O_i \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^N O_i \right)^2 \right) \\
&= \frac{1}{N^2(N-1)^2} \left(N \sum_{i=1}^N O_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N O_i \right)^2 \right) \\
&= \frac{1}{(N-1)^2} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N O_i^2 - \frac{1}{N^2} \left(\sum_{i=1}^N O_i \right)^2 \right) \\
&= \frac{1}{(N-1)^2} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (O_i^2 - \langle O \rangle^2) \right)
\end{aligned} \tag{6.20}$$

となる。また統計誤差および分散は

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{N-1}} \sigma \tag{6.21}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (O_i^2 - \langle O \rangle^2) \quad (6.22)$$

であることから、

$$\begin{aligned} \delta_{jack} &= \sqrt{(N-1)} \sigma_{jack} \\ &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (O_i^2 - \langle O \rangle^2)}{N(N-1)}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{N-1}} \sigma \\ \therefore \delta_{jack} &= \delta \end{aligned} \quad (6.23)$$

となり、 N 個のデータに対して Jackknife 法で統計誤差を見積もることができる。マルコフチェーンモンテカルロ法で生成された配位から計算された物理量の評価の際には、bin サイズを大きくし誤差が一定になったときの誤差を採用する。

6.3 APE smearing

本研究において統計誤差の縮小のため APE smearing を用いた。ここで、SU(2) ゲージ理論の例を示す。これは、空間方向の Link 変数に対して、以下の操作をとる。

$$V_k(s) = Proj_{SU(2)} X' \quad (6.24)$$

$$X' = U_k(s) + \alpha \left[\sum_{j \neq k} U_j(s) U_k(s + \hat{j}) U_j^\dagger(s + \hat{k}) + U_j^\dagger(s - \hat{j}) U_k(s - \hat{j}) U_j(s - \hat{j} + \hat{k}) \right] \quad (6.25)$$

APE smearing はこの更新を N 回行う。この更新の回数 N と係数 α を調整することで実行され、基底状態を調べるときに統計誤差の縮小が可能であり非常に有効である。この SU(2) への射影は、 X を SU(2) 行列とすると、

$$X = kX' \in SU(2) \quad (6.26)$$

である。 k は定数である。SU(2) の性質から、

$$\det X = \det kX' \quad (6.27)$$

$$\therefore 1 = k^2 \det X' \quad (6.28)$$

$$\therefore k = \frac{1}{\sqrt{\det X'}} \quad (6.29)$$

とわかるため、SU(2) への射影は、

$$V_k(s) = \frac{X'}{\sqrt{\det X'}} \quad (6.30)$$

と行えば良い。

7 謝辞

博士課程での研究を本論文でまとめることができたのは数多くの方々の支えがあったからです。博士課程での研究生活ですが、博士課程の学生にしては明るいほうだと評されますが、研究生活は楽しいと大変が半分ずつです。研究生活を支えていただいた3人の方に感謝の意を表します。

飯田圭先生には、学部時代から多くの影響を受けました。講義やセミナーでの姿を見て、このようになるにはどうしたら良いのかと考えた日々です。私が博士課程で色々なことに挑戦することができたのは、飯田先生の支えがあったからです。その支えのおかげで研究室での生活を楽しく安心して過ごすことができ、その安心が日々の不安を取り除きました。石黒克也先生には、本研究を直接指導していただきました。深夜まで、わからないことに対して親身になって指導していただけたことがとても嬉しく、福岡での学会の件など私の数多くの失敗や甘い見積もりを支えていただきました。もし石黒先生の指導がなければ、自分は研究を進めることが不可能であったと感じています。鈴木恒雄先生には、数多くのチャンスをいただきました。物怖じしないという理由だけです。金沢大学の図書室で議論させていただいたことは楽しくて忘れることはできません。鈴木先生の言葉がなければ強くなることはできません。毎日物理の研究に没頭されている姿から研究生活の厳しさと楽しさを肌で感じました。これからも精進致します。

博士課程のときも津江先生、仲野先生、斎藤先生と挨拶や雑談をさせていただきました。先生方の部屋の電気がついていると、研究室でひとりでも研究が進みます。李さん、田島さんは勝手ながら先輩と思って、研究に対する姿勢を参考にさせていただいています。開田さんには出張先で面倒を見ていただきとにかく楽しかったです。同期の森本君とはこれで9年の付き合いです。愛媛のはいから亭でふたりで食事したことは中々忘れられませんね。一つ下の後輩の西村君、畑君とも廊下で話をするとほっとします。「あのときこうだったね」みたいな思い出を共有できたりするからでしょうか。博士課程から研究室で一緒に過ごした後輩では、野田さんには田んぼで鳴いているカエルの数え方を教わりました。4つ下の後輩である井手吉君、越智君、林君、万田君とはよく一緒に遊んでいただき感謝です。大学の外では、加藤君には国際学会の前に英語の指導をしていただきました。愛知にいる親戚やソフトテニス部の友人、幼馴染、長野やフランスにいる友人からの日々の連絡も支えです。

最後に両親と祖父母に学生時代の生活の全てを支えていただきました。両親のテレビ出演を高知で見るとき、嬉しい気持ちでいっぱいでした。

参考文献

- [1] K. Devlin, *The Millennium Problems : The Seven Greatest Unsolved Mathematical Puzzles of Our Time* (Basic Books, New York, 2002).
- [2] G. 't Hooft, in Proceedings of the EPS International, edited by A. Zichichi, (1976), p.1225.
- [3] S. Mandelstam. Vortices and quark confinement in non-abelian gauge theories. Physics Letters B, Vol. 53, No. 5, pp. 476–478, 1975.
- [4] G. t. Hooft. Topology of the gauge condition and new confinement phases in non-abelian gauge theories. Nuclear Physics, Section B, Vol. 190, No. 3, pp. 455–478, 1981.
- [5] A. S. Kronfeld, M. L. Laursen, G. Schierholz, and U. J. Wiese, *Phys. Lett. B* **198**, 516 (1987).
- [6] A. S. Kronfeld, G. Schierholz, and U. J. Wiese, *Nucl. Phys.* **B293**, 461 (1987).
- [7] Hiroshi Shiba and Tsuneo Suzuki. Monopoles and string tension in SU(2) QCD. Physics Letters B, Vol. 333, No. 3-4, pp. 461–466, 1994.
- [8] Tsuneo Suzuki, Shun Ichi Kitahara, Tsuyoshi Okude, Fumiyooshi Shoji, Kazuya Moroda, and Osamu Miyamura. Monopoles and hadron spectrum in quenched QCD. Nuclear Physics B - Proceedings Supplements, Vol. 47, No. 1-3, pp. 374–377, 1996.
- [9] Tsuneo Suzuki, Yoshimi Matsubara, Shun Ichi Kitahara, Shinji Ejiri, Naoki Nakamura, Fumiyooshi Shoji, Masafumi Sei, Seikou Kato, and Natsuko Arasaki. Three topics of monopole dynamics in abelian projected QCD. Nuclear Physics B - Proceedings Supplements, Vol. 53, No. 1-3, pp. 531–534, 1997.
- [10] Maxim N. Chernodub, Shouji Fujimoto, Seikou Kato, Michika Murata, Mikhail I. Polikarpov, and Tsuneo Suzuki. Almost perfect quantum lattice action for low-energy SU(2) gluodynamics. Physical Review D, Vol. 62, No. 9, pp. 1–16, 2000.
- [11] Tsuneo Suzuki, Katsuya Ishiguro, Yoshihiro Mori, and Toru Sekido. The dual Meissner effect in SU(2) Landau gauge. AIP Conference Proceedings, Vol. 756, No. April, pp. 172–181, 2005.
- [12] Tsuneo Suzuki, Katsuya Ishiguro, Yoshihiro Mori, and Toru Sekido. Dual Meissner effect and magnetic displacement currents. Physical Review Letters, Vol. 94, No. 13, pp. 4–7, 2005.
- [13] M. N. Chernodub, Katsuya Ishiguro, Yoshihiro Mori, Yoshifumi Nakamura, M. I. Polikarpov, Toru Sekido, Tsuneo Suzuki, and V. I. Zakharov. Vacuum type of su(2) gluodynamics in maximally abelian and landau gauges. Phys. Rev. D, Vol. 72, p. 074505, Oct 2005.
- [14] Toru Sekido, Katsuya Ishiguro, Yoshiaki Koma, Yoshihiro Mori, and Tsuneo Suzuki. Abelian dominance and the dual Meissner effect in local unitary gauges in SU(2) gluodynamics. Physical Review D, Vol. 76, No. 3, pp. 1–5, 2007.
- [15] Shinji Ejiri, Monopole と Lattice QCD の有限温度非閉じ込め相転移. kanazawa Dr Thesis, 1996.
- [16] Shoichi Itou, クォーク閉じ込め機構におけるゲージ固定とモノポールの力学. kanazawa Dr Thesis, 2003.
- [17] Toru Sekido, SU(2) 格子 QCD におけるクォーク閉じ込め現象と双対超伝導描像. kanazawa Dr Thesis, 2007.
- [18] Tsuneo Suzuki, Katsuya Ishiguro, Yoshiaki Koma, and Toru Sekido. Gauge-independent Abelian

- mechanism of color confinement in gluodynamics. Physical Review D, Vol. 77, No. 3, pp. 1–5, 2008.
- [19] Tsuneo Suzuki, Masayasu Hasegawa, Katsuya Ishiguro, Yoshiaki Koma, and Toru Sekido. Gauge invariance of color confinement due to the dual meissner effect caused by abelian monopoles. Physical Review D, Vol. 80, No. 5, pp. 1–11, 2009.
- [20] Takashige Sekiguchi and Katsuya Ishiguro. Abelian spatial string tension in finite temperature SU(2) gauge theory. International Journal of Modern Physics A, Vol. 31, No. 26, pp. 1–15, 2016.
- [21] T. Suzuki, arXiv:1402.1294.
- [22] Tsuneo Suzuki, Katsuya Ishiguro, and Vitaly Bornyakov. New scheme for color confinement and violation of the non-Abelian Bianchi identities. Physical Review D, Vol. 97, No. 3, p. 34501, 2018.
- [23] Tsuneo Suzuki. Blockspin renormalization-group study of color confinement due to violation of the non-abelian bianchi identity. Phys. Rev. D, Vol. 97, p. 034509, Feb 2018.
- [24] Atsuki Hiraguchi, Katsuya Ishiguro, and Tsuneo Suzuki. New abelian-like monopoles and the dual meissner effect. Phys. Rev. D, Vol. 102, p. 114504, Dec 2020.
- [25] T. A. DeGrand and Doug Toussaint. Topological excitations and Monte Carlo simulation of Abelian gauge theory. Physical Review D, Vol. 22, No. 10, pp. 2478–2489, nov 1980.
- [26] L. Del Debbio, M. Faber, J. Greensite, and Olejník. Center dominance and Z_2 vortices in SU(2) lattice gauge theory. Physical Review D, Vol. 55, No. 4, pp. 2298–2306, 1997.
- [27] L. Del Debbio, M. Faber, J. Giedt, J. Greensite, and Olejník. Detection of center vortices in the lattice Yang-Mills vacuum. Physical Review D, Vol. 58, No. 9, pp. 1–15, 1998.
- [28] Manfred Faber, Jeff Greensite, and Stefan Olejník. Direct laplacian center gauge. Journal of High Energy Physics, Vol. 2001, No. 11, pp. 053–053, nov 2001.
- [29] Gunnar S. Bali, Vitaly Bornyakov, Michael Müller-Preussker, and Klaus Schilling. Dual superconductor scenario of confinement: A systematic study of Gribov copy effects. Physical Review D, Vol. 54, No. 4, pp. 2863–2875, 1996.
- [30] T.L. Ivanenko, A.V. Pochinsky, and M.I. Polikarpov. Extended abelian monopoles and confinement in the SU(2) lattice gauge theory. Physics Letters B, Vol. 252, No. 4, pp. 631 – 635, 1990.
- [31] Paolo Cea and Leonardo Cosmai. Dual superconductivity in the SU(2) pure gauge vacuum: A lattice study. Phys. Rev. D, Vol. 52, pp. 5152–5164, Nov 1995.
- [32] Paolo Cea, Leonardo Cosmai, Francesca Cuteri, and Alessandro Papa. Flux tubes at finite temperature. Journal of High Energy Physics, Vol. 2016, No. 6, 2016.
- [33] Paolo Cea, Leonardo Cosmai, Francesca Cuteri, and Alessandro Papa. QCD flux tubes across the deconfinement phase transition. EPJ Web Conf., Vol. 175, p. 12006, 2018.