数学教育における統合化の研究
―プログルを活用した星形正多角形の授業デザイン―

田邉　元基[1)]，中村　彩乃[1)]，中野　俊幸[2)]
1)高知大学大学院総合自然科学研究科教職実践高度化専攻院生
2)高知大学大学院総合自然科学研究科教職実践高度化専攻

A Study on Integration in Mathematics Education
–Design of Lesson on Drawing Star-shaped Polygon with PROGURU–

TANABE Motoki[1)]，NAKAMURA Ayano[1)]，NAKANO Toshiyuki[2)]
1)Kochi University Graduate School of Integrated Arts and Sciences,
Professional Schools for Teacher Education, Graduate student
2)Kochi University Graduate School of Integrated Arts and Sciences,
Professional Schools for Teacher Education

要　約

本研究は，一般化・抽象化・統合化・記号化・形式化などの数学を高度化する活動を生徒が主体的に行うための効果的な教材と授業デザインを開発し，実践してその教育的効果と課題について考察したものである。統合化については，古藤怜の「多様な考えの生かし方まとめ方」，中島健三の「算数・数学教育と数学的な考え方－その進展のための考察－」の理論をもとに統合化を４つに整理し，星形正多角形の描画を題材にして統合化する教材開発と授業デザイン及び，授業実践を行った。統合化の視点から授業デザインをしたことで，数学を洗練する４つの活動つまり一般化，拡張化，補完化，組織化を効果的に組み合わせた授業を展開することができ，統合化をめざした授業展開と学習指導の指針を得ることが出来た。また，ICT を思考の道具として活用したことで，探求活動を生徒に主体的にさせることができ，数学を洗練する深い学びを実現することができた。

キーワード：統合化，垂直的数学化，数学的活動，ICT 活用，星形正多角形

１．はじめに

学習指導要領解説では授業改善の方略として「問題発見・解決の過程」がイメージ図で示されている(図１)。左側のサイクルは具体的教材や授業構成を比較的構想しやすく，教科書の導入部分の教材では，基本的に左側の数学化の過程が取り入れられている。しかし，応用場面では，中等数学教育は形式的・抽象的な概念を扱うため，数学的概念を真正な日常的・現実的事象に直接関連させることは困難であり，実際にはその扱いがわざとらしいものとなっていることが多い。むしろ，中等数学教育では，右側のサイクルの数学化として示されている数学の事象を一般化・抽象化・統合化・記号化・形式化する過程を取り入れた授業こそ最も実現すべき課題であると考えた。

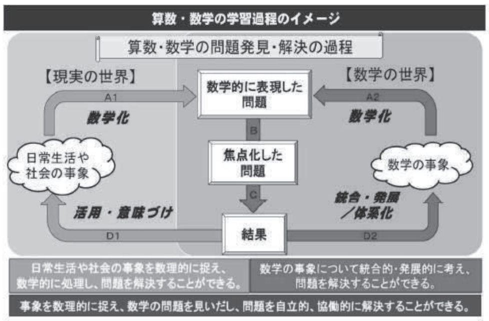


図 1　問題発見・解決の過程

また，全国学力・学習状況調査では，活用力や思考力の育成に課題があることが指摘されているが，その解決には日常生活や社会の事象を数学化し現実的事象に活用する学習だけでなく，数学の事象に対する活用や統合・発展／

体系化する深い学びを実現する必要がある。

そこで，本研究では，一般化・抽象化・統合化・記号化・形式化などの数学を洗練する活動（後述の「垂直的数学化」）を生徒が主体的に行うための効果的な教材と授業デザインを開発し，実践してその教育的効果と課題について考察した。

２．垂直的数学化と統合化について

(1)垂直的数学化について

オランダの数学教育学者 Freudenthal は，数学の本質は活動性にあると指摘し，数学的活動を「数学化」と呼び，数学教育の究極の目的は生徒に主体的に数学化をさせることであると主張している。そして数学化には，「現実的数学化」と「数学自体の数学化」があると言及している。Treffers はこの２つの数学化を明確に区別し，前者を「水平的数学化(horizontal mathematization)」，後者を「垂直的数学化(vertical mathematization)」と呼んでいる。「水平的数学化」とは，現実の事象を数学の問題として形式化する活動，「垂直的数学化」とは一般化，記号化，体系化，統合化するなどの数学をさらに洗練する(sophisticate)活動である。Treffers は，この２つを連続的に組み合わせた過程を「累進的数学化(progressive Mathematising)」と呼び，数学化はこの過程で進むとしている。

この「累進的数学化」を学習指導要領解説の「問題発見・解決の過程」のイメージ図に対応させると，「水平的数学化」は左側のサイクルに，「垂直的数学化」は右側のサイクルに対応させることができ，「累進的数学化」は，左右のサイクルを連続的に組み合わせることに相当する。ただし，「累進的数学化」には循環性はなく，２つの数学化の組み合わせによって段階的に向上する過程として表現されている。本研究でめざしている一般化，記号化，体系化，統合化するなど，数学をさらに洗練する活動は，Treffers の「垂直的数学化」である。

(2)統合化について

本研究では垂直的数学化の中で統合化する活動に焦点を当てた。統合化に焦点を当てたのは，中等数学教育では，文字の導入により記号を使った一般化は比較的行われているが，生徒が主体的に組織化する活動や，統合をめざして発展させるような授業はあまり行われていないからである。また，一般化，記号化，組織化は統合化と密接な関係にあり，統合化の分類に包含されると考えたからである。このことについて次に考察する。

中島健三は，統合化を拡張，集合，補完との関係から「拡張による統合」「集合による統合」「補完による統合」に分類している(中島 1981)。また，古藤怜は，統合化を普遍化，止揚化，拡張化との関係から「普遍化」「止揚化」「拡張化」に分類している(古藤 2018)。

この２者の統合化の分類を参照し，本研究では「統合化」を「一般化」「拡張化」「補完化」「組織化」によって分類した。中島，古藤の分類との対応は次の表のとおりである。

表１　統合化の分類

本研究での統合化	中島による統合化	古藤による統合化
一般化による統合	集合	普遍化
拡張化による統合	拡張	拡張化
補完化による統合	補完	
組織化による統合		止揚化

以下では上記４つの統合について，くさび型の図形の角度の関係を例に説明する。くさび型では凹の部分の角度が他の３つの角度の和になっているが，この関係を一般化・拡張化・補完化・組織化によって統合化する例である。

「一般化による統合」とは，別のものと捉えていた個々の事象を共通する性質から１つにまとめることである。

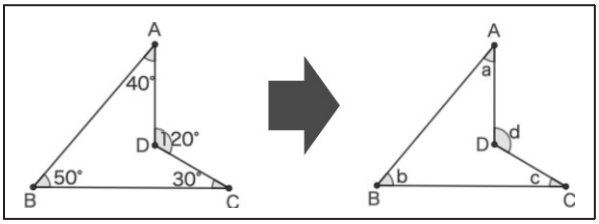


図２　一般化による統合

いくつかの図形で角度を調べ，具体的数値を表でまとめ，凹の部分の角度が他の 3 つの角度の和になっていることを帰納的に洞察する。この一般的な関係を文字式を使って $\angle a + \angle b + \angle c = \angle d$　とまとめる。

「拡張化による統合」とは対象を拡張し性質を発展させてできた複数の考えを１つの考えに含ませることである。

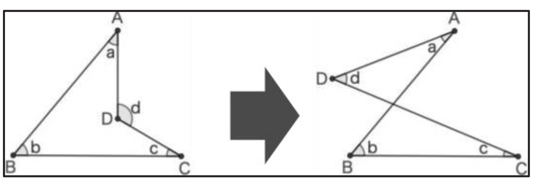


図３　拡張化による統合

点 D が $\angle ABC$ の内部にあったものを外部に拡張する。このとき 4 つの角度の関係は $-\angle a+\angle b+\angle c=\angle d$ となってしまうが，この場合も $\angle a$ をマイナスと捉える(つまり，数を拡張することにもなる)ことによって
$\angle a+\angle b+\angle c=\angle d$ の関係に統合することができる。

「補完化による統合」とは，ある考えを補完することを考えて，全体をまとめることである。

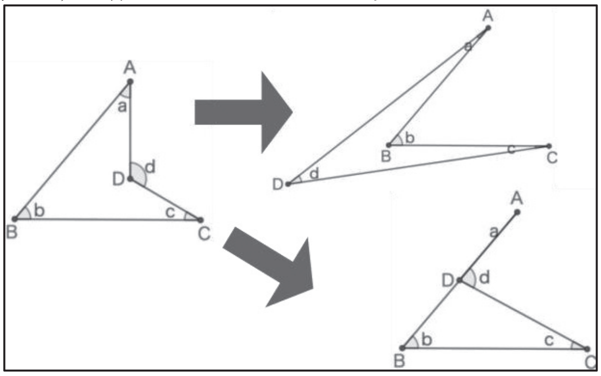


図 4　補完による統合

拡張化による統合では，点 D を $\angle ABC$ の外部に拡張したが，直線 AB の上側の領域のみであった。外部で残りの他の領域や線分上にある場合も 4 つの角度の関係がどうなるかを考える。
点 D が $\angle ABC$ の外部にある場合は，点 D の位置により $\angle a$ または $\angle c$ をマイナスと捉えることで
$\angle a+\angle b+\angle c=\angle d$ の関係に統合することができる。
点 D が線分上にある場合は，点 D の位置により $\angle a$ または $\angle c$ を 0 と捉えることで $\angle a+\angle b+\angle c=\angle d$ の関係に統合することができる。

「組織化による統合」とは，複数の考えを体系にまとめることである。対立し相反する考えも上位の概念から組織的に位置づけること(止揚化)も含まれる。

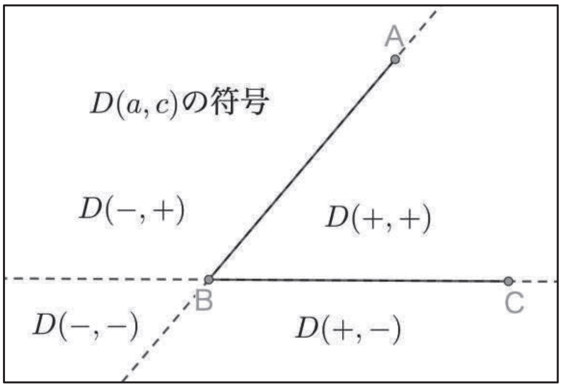


図 5　組織化による統合

「組織化による統合」では，一般化による統合，拡張化による統合，補完化による統合から，点 D はどの領域でも対応する角度を 0 もしくはマイナスと捉えることで $\angle a+\angle b+\angle c=\angle d$の関係に統合することができる。さらに，図 5 のように $\angle a$，$\angle c$ の角度の符号によって点 D の存在領域が決まる（対応する）と組織化する。

3．統合化をめざした授業デザイン

(1)本研究で扱った題材とプログラミング教育ソフトについて

①題材について
正多角形の外角の角度を拡張して，星形正多角形を扱うものである。教科書での星形多角形の扱いは，中学 2 年生の凸型多角形の内角や外角の応用，中学 3 年生の円周角の定理の応用として扱われている。本研究の題材は，前者の多角形の外角の応用にあたるが，次のようなプログルというプログラミング教育ソフトを活用して，教科書とは異なる扱いを設定することで，探究の過程を設定し統合化をめざす授業を考案するものである。

②プログラミング教育ソフト「プログル」について
プログルとは，ブラウザ上で操作できるソフトで，小学生向けに算数を学習しながらプログラミング教育を実践することを目的として作られ，児童が簡単にプログラムを作るためのドリル型の学習教材である。「課題をクリアしながらステージを進めていくだけで，自然とプログラミング的思考が身につくように設計されている。」(プログルのホームページ https://proguru.jp から引用)
本授業で用いたプログルの多角形コースは，プログラミングでキャラクターが進む距離や曲がる角度などを入力し，キャラクターを動かして図形を描いていく(キャラクターの軌跡が残る)ものであり，ドリル形式で 8 つのステージをクリアしながら図形を描くプログラムを作成させるものである。しかし，本研究はドリル形式でのプログラミング的思考の育成を目的とした使い方ではなく，第 8 ステージのみを扱い，既成のプログラムに数値を入力し図形を描く機能を思考の道具として用いた。

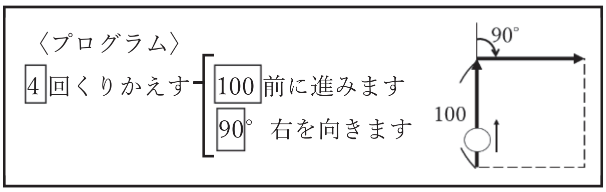


図 6　プログルの概要

(2)統合化による授業デザイン

プログルを用いて，外角を入力し図形を作ることから外角と角の数に何か関係がないかを探究することで，星形正多角形と外角の関係を理解することができる。本授業では探究の流れが，正多角形の外角と角の数との関係の探究から，星形正多角形の外角と角の数の関係の探究に移り，正多角形のときに用いた式　正 $\frac{360}{(外角)}$ 角形　をそのまま使用できるところが本教材の数学的に面白いところである。上記の題材を基にして，各統合化を次のように構成した。

①　一般化による統合

プログルを用いて，正方形を描き方を説明した後，正三角形を描くために，繰り返しの数と回転する角度を聞く。内角と混同し 60° と誤って答えるところから回転角が外角であることを理解させる。その後，120°，60°，45°，40° を入力してそれぞれ正3･6･8･9 角形を描かせ，表に整理させる。外角とできる正多角形の角の数(辺の数)との関係に着目させ，それら 2 つの積が 360 になることから正 5 角形，正 7 角形の外角を求めさせる。
正多角形の外角と角の数の関係を一般化し，

$$正\ \frac{360}{(外角)}\ 角形$$

と公式化して統合する。

②　拡張化による統合

一般化による統合では，回転する角度が 120°，90°，72°，60°，45°，40° のように正多角形になるときの角度しか扱わなかったが，これ以外の角度，例えば 100° の場合どのような図形になるか考えさせる。実際に入力し，どのような図形が描けるか試行させる。100° の場合には凸型正多角形にはならないが，星形の正多角形が描けるということで統合化する。

③　補完化による統合

100° 以外の角度を考えさせる。135°，150°，144°，80°，160° を入力してそれぞれ星形正 18・8・12・5・9 角形を描かせ，表に整理させる。他の角度でも星形正多角形が描けるということで統合化する。

④　組織化による統合

凸型正多角形の場合は，

$$正\ \frac{360}{(外角)}\ 角形$$

の公式から外角が分かれば正何角形かが分かるが，同じように星形正多角形の場合もこの公式から星形正何角形かを知ることができるかを考えさせる。表に $\frac{360}{(角度)}$ の欄を作り，約分することで星形正多角形との関係を考察させる。まず，分子は角の数に対応していることに気づかせる。次に，80° と 160° のとき，どちらも分子は 9 となり星形正 9 角形だが，形が異なることに着目させ，分母の図形への解釈を考えさせる。円周上に等間隔に 9 個の点をとり，プログルのキャラクターの動きと対比させて，80° と 160° のとき，何個隣りの点を結んでいるかを観察させて，分母の数分だけとなりの頂点を結んでできる星形になっていることに気づかせる。

以上の探究から帰納的に，入力する角度がどんな角度であっても $\frac{360}{(角度)}$ を既約分数にしたとき，分子の数が角の数を表しており，分母の数分だけとなりの頂点を結んでできる星形になっていると統合化する。さらに，分母が 1 のとき(360 が回転角で割り切れるとき)は凸型正多角形で星形正多角形の特殊な場合として統合化できることを理解させる。

以上をまとめると図 7 の通りである。

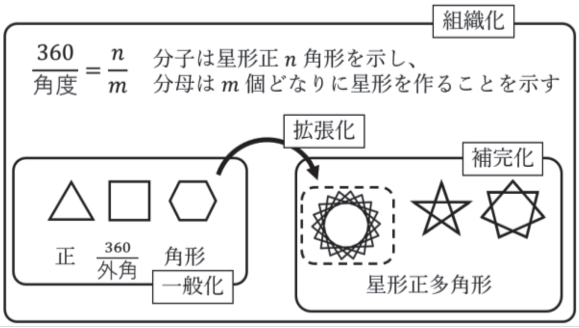


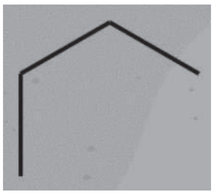
図 7　星形正多角形における統合化のデザイン

(3)学習指導過程

学習指導過程は表 2 の通りである。

表 2　学習指導過程

	統合	学習活動，指導過程	指導上の留意点
導入		●操作しながらプログルの仕組みを理解する。 ・プログルを起動させ，多角形コースを選択しステージ 8 を開かせる。	

5 分		・プログルについて理解するために，教師と一緒に 90° を入れて動かし，正方形を作図する。 ・入力する角度や繰り返しの回数，ロボットの動きを確認しながら操作する。	・プログルの操作方法を抑えたい。
展 開 20 分	一 般 化 に よ る 統 合	●プログルで入力した角度が外角となることを抑え，多角形の外角の和が 360° になることを確認する。 ○(発問)プログルを使って，正多角形を作ってみよう。 ○(発問)正三角形を作りたい場合，角度を何度にしたらよいだろうか。 【生徒の反応】 ・60° ・60° を入力させ，作図させる。  ・入力した角度は，多角形の外角になることを確認する。 ○(発問)他の正多角形もプログルで作ってみよう。 ・ワークシートを配布し，表の角度を入れて正多角形を書かせる。 ・何角形になるか予想して繰り返しの数を入力させる。	・多角形の外角の和が 360° になることを確認する。 ・ロボットが動く角度はどこを指しているのかを図の上で指し棒を動かして確認し，多角形の外角になることを抑える。

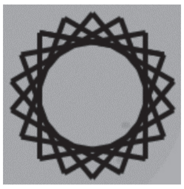
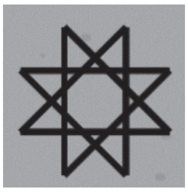
角度 $x°$	120°	90°		60°		45°	40°
正 n 角形							

		○(発問)空欄にはどんな数が入りますか。 ○(発問)何か規則があるだろうか。表から言えることはないか。 【生徒の反応】 ・角度が減っている ・角の数が増えている ・縦に掛けたら 360 になる ・表の一番下の項目に「$x \times n$」を記入させ，表を埋めすべて 360 となることを確かめる。 ○(発問)なぜすべて 360° になるのだろうか。 【生徒の反応】 ・ロボットが 1 周したから ・外角の和が 360° だから ○(発問)正 7 角形のときの角度は？ ・正 7 角形は，$360 \div 7$ で作図できることを確認する。 ・確かめとして「外角が 20° だったら？」を問う。 (生徒)360÷20=18 から正１８角形である。 ・外角と角の数の関係を次のようにまとめる。 $\boxed{\begin{array}{l} x \quad \times \quad n \quad = 360° \\ (外角)\times(角の数)=360° \\ 正\ \frac{360}{外角}\ 角形 \end{array}}$	・360 になることに気づかない場合は，指示棒で縦の関係に着目させる。
	拡 張 化	○(発問)角度に 360 を割り切れない数をいれるとどんな図形になるだろうか。 ・角度が 100° の時どんな図形になるのか問い，プログルで試行させる。 【生徒の反応】	・どんな図形になるか予想できないため，繰り返す回数を 20 回にするよう指示する。

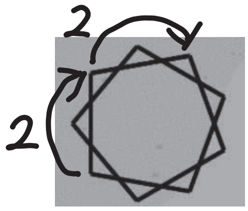
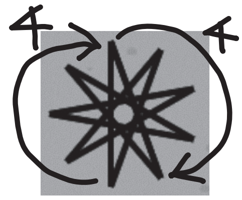
<table>
<tr>
<td></td>
<td>による統合</td>
<td>・星形になる
・図形ができた
・このような図形を「星形正多角形」と呼ぶことを確認する。</td>
<td>・100° のときは，星形正１８角形と呼ぶ。</td>
</tr>
<tr>
<td>発展

22分</td>
<td>補完化による統合

組織化による統合</td>
<td>
●星形正多角形を作り，法則を探究する。
・本時の課題「星形正多角形の性質を探ろう」を設定する。
○(発問)様々な角度を入力して星形多角形を作ってみよう。
・プログルを操作させ，入力した角度とできた星形正多角形をワークシートに書き込ませる。
<table>
<tr><td>角度 x°</td><td>100°</td><td>135°</td><td>150°</td><td>144°</td><td>80°</td><td>160°</td><td></td></tr>
<tr><td>星形正 m 角形</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
○(発問)角度から，どんな星形正 m 角形になるのか求めることが出来るだろか。
・「360÷20=18 から正１８角形」のように計算で求められないか。
<table>
<tr><td>角度 x°</td><td>100°</td><td>135°</td><td>150°</td><td>144°</td><td>80°</td><td>160°</td><td></td></tr>
<tr><td>星形正 m 角形</td><td>18</td><td>8</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\frac{360}{(角度)}$</td><td>$\frac{360}{100}$
$\frac{18}{5}$</td><td>$\frac{360}{135}$</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
・分数で表し，約分するように伝える。
○(発問)どこから星形正何角形になるかわかるか。

・「ここからわかる！」というところに丸を付けさせる。
$\frac{360}{100}=\frac{18}{5}$，$\frac{360}{135}=\frac{8}{3}$
約分した分子が角の数になる。
 
・「360÷(角度)を約分した分子の数が角の数になっている」ことをワークシートにまとめる。
○(発問)では，分母は何を表しているだろうか。
・ワークシートを配布する。
○(発問)角度が 80°，160° である星形正多角形はそれぞれ星形正何角形になるだろうか。
・分子が 9 になるので，どちらも星形正九角形になる
$\frac{360}{80}=\frac{9}{2}$，$\frac{360}{160}=\frac{9}{4}$
○(発問)どちらも星形正九角形になるが，同じ星形になるだろうか。
・プログルに 80°，160° を入力しワークシートに星形９角形を記入させる。
</td>
<td>
・発問が抽象的であるため，具体数を用いて生徒が考えやす

・分子に着目させたい。
</td>
</tr>
</table>

		 ○(発問)何が違うだろうか。分数のどこからわかるだろうか。 ・何が違うのか図から見つけ，約分した分数のどの部分からいえるのか，前とは色を変えて丸を付けさせる。 $\frac{360}{80}=\frac{9}{2}$，$\frac{360}{160}=\frac{9}{4}$ ・分母から，○個どなりに星形を作っていくことが分かることを確認する。 ・1 枚目のワークシートの下に「360÷(角度)を約分した分母の数分だけとなりの頂点を結んでできる星形になっている」をまとめる。	・分母にも意味があることを理解させたい。 ・時間があれば正多角形に戻って，分子が 1 になることから,1個隣りで頂点を結ぶため,正多角形が作図できることを確認する。
まとめ 3分		●一般的な法則が見えるようになったことを確認する。 ・本時のまとめを行う。(組織化) ・「$\frac{360}{角度}=\frac{a}{b}$ …分子は星形正a角形となること，分母はb個どなりに星形をつくる」とまとめに記述させる。 ・正多角形の「360÷(外角)＝(角の数)」という法則を，360 を角度で割り切れない角度に拡張したときも法則を使うことで角の数が分かったことが今回の授業の面白さであることを伝える。	

４．授業実践

(１)対象と実施時期

対象クラス：高知県公立中学校 3 年生 29 名

実施時期：令和 3 年 11 月初旬

(２)授業の実際の状況

実際の授業は，発展の組織化による統合の分子の数が角の数に対応しているところまでは上述の計画した学習指導過程どおりに進んだ。最後の分母の図形への解釈は時間不足となったため，ワークシートを配付せずに図を黒板に掲示し全体で確認した。分母が 1 のときは凸型正多角形の場合になると統合することはできなかった。

５．授業実践から得られた成果と課題

⑴ 垂直的数学化を実現する授業デザインにおける統合化の視点の有効性とその順序性

本研究は深い学びの実現のため，基本的には垂直的数学化の授業をめざしているが，統合化の視点から授業デザインを考案したことで，数学を洗練する 4 つの活動つまり一般化，拡張化，補完化，組織化を効果的に組み合わせた授業構成や指導を考えることができた。

さらに，この 4 つの統合化は，一般化→拡張化→補完化→組織化　という順序性があると考えた。この順序性は数学的問題の発展とその統合化の活動の流れに沿っているためだと考えられる。一般に，統合化を行う前には，数学的原問題を発展させて多様性をもつ事象を複数生じさせなければならないが，数学的原問題を発展させるための前段階としての局所的一般性の整理が「一般化による統合」であり，それを基に発展させるきっかけとなる事例を示すのが「拡張化による統合」，その後，様々な事象を生む発展が「補完化による統合」，最後に，発展させた活動を大局的に反省し抽象化を図るのが「組織化による統合」と対応させることができる。このように統合化の順序性は，数学的問題の発展的扱いの順に対応させることができる。

他の教材での統合化の授業デザインにおいても，この順序性が妥当かつ有効かについては今後研究していきたい。

(2)統合化における不変性を発見し意識させるための表・記号の役割

不変性を発見し意識化することは統合化をめざすための中核をなしている。いかにして不変性を発見させ意識化させるかが統合化の授業デザインの要点である。

一般化による統合の段階では，外角とできる正多角形の角の数(辺の数)の積が 360 になることが不変性であ

り，この不変性を生徒に発見させ意識させることは一般化による統合をするうえで欠かせない過程である。不変性を発見させるために，事象を表に整理させた。表の役割は，事象を整理するだけではなく，不変性を発見するための有効な道具であると考えたからである。そして，発見した不変性を　正 $\frac{360}{(外角)}$ 角形　と公式化して表現した。不変性を明確に意識させるためには記号化させることが有効であると考えたからである。

また，組織化による統合の段階では，記号化した不変性である　正 $\frac{360}{(角度)}$ 角形　の約分の記号操作によって新たな見方つまり，分母分子をどう解釈するかが意識された。記号操作(約分)によって新たな見方が生まれ，記号の意味付け(分母分子をどう解釈するか)によって組織化がもたらされたといえる。

このように統合化において不変性を発見し意識させるための表・記号の本質的役割が明らかになった。

⑶思考の道具としての ICT 活用について

中学校数学で発展的な内容を扱おうとすると，数学が苦手な生徒は基礎的知識・技能を応用できないために取り組めないことが多い。しかし，本授業の場合，ICT を活用したことで数値を入力し実行するだけの簡単な操作でスクリーン上に図形が描かれるため，本研究の高度な数学的内容であっても苦手な生徒も取り組むことができた。さらに，凸型正多角形や星形正多角形は，紙面上にペンで正確に描かせることは困難であるが，ICT では実際に描く手間が省け，その分より多く図形を基に考えさせることができた。

「拡張化による統合」の場面で，ICT を使わずに，100°の場合にどんな図形が描かれるかを予想させることは非常に面白い問題となるが，ほとんどの生徒にはかなり難しい問題であり，星形正多角形となることを発見させることはできないであろう。しかし ICT を使ったことで，全員が星形正多角形であることを発見させることができた。また，「補完化による統合」の場面で，いくつかの角度を入力してもいずれも星形正多角形になることは ICT を使ってはじめて知ることができ，そのことが「組織化による統合」へと進むことを可能にした。

本授業の統合化には ICT は必要不可欠の思考の道具であり，このプログルは統合化の授業の本質的学習場(Substantial Learning Environment : SLE)(Wittmann 2002)を形成したといえよう。

６．おわりに

垂直的数学化をめざした統合化を「一般化による統合」「拡張化による統合」「補完化による統合」「組織化による統合」の４つに分類し，これを基に，キャラクターで動かして図形を描くブラウザ上のソフト「プログル」を用いた幾何の探究的授業をデザインし実践した。

実践から得られた成果と課題を，統合化の視点の有効性とその順序性，統合化における不変性の発見・意識化と表・記号の役割，思考の道具としての ICT 活用の３項目にまとめた。

さらに，授業後の生徒の感想には，「自分で動かしてみて調べて共通している部分を見つけ出すのは楽しかった」，「星形正 n 角形の公式が分かったときは面白かった」「どんなときも $\frac{360}{x}$ で求められることがわかった」「苦手だけど興味を持てる部分があったり楽しんでできた」等と記述しており，本授業の統合化の数学的活動の面白さをほとんどすべての生徒に感得させることができた。このような数学的活動に対する興味関心を高めたことも，本実践研究の重要な成果の１つである。

本研究を基に，さらに他の学年や単元において統合化をめざした授業をデザインし実践することが今後の課題である。

引用・参考文献

Freudenthal,H(1991) : ”Revisiting Mathematics Education”.Kluwer Academic Pub.

古藤怜(2018)：多様な考えの生かし方まとめ方. 東洋館出版.

文部科学省(2017)：中学校学習指導要領(平成 29 年告示)解説　数学編.日本文教出版

中島健三(1986)：算数・数学教育と数学的な考え方ーその進展のための考察ー.金子書房.

Treffers,A(1987) : THREE DIMENTIONS A model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction－The Wiskobas Project. D.Reidel Pub., pp.248.

Wittmann,E.C. ,et al(2002) : ”Jenseits von PISA : Bildungsreform als Unterrchitsreform”.國本景亀,山本信也(訳)「算数・数学　授業改善から教育改革へ」,東洋館出版

ブラウザ上のプログラミング教育ソフト

プログル｜学校の授業で使えるプログラミング教材(https://proguru.jp)