研究ノート

デザルグの目

― 射影的分解の試み ―

Desargues' Eyes：

A trial of the Projective Decomposition

山口　俊博　（高知大学教育学部）

YAMAGUCHI Toshihiro

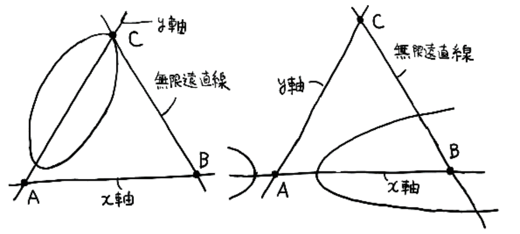
Faculty of Education, Kochi University

ABSTRACT

We try to make the ``projective decomposition", which is based on the projective plane defined by Desargues in 1639. After giving 5-rules induced from the certain properties of projective plane over the field $\mathbf{Z}_2$, we give some familiar examples.

1　はじめに

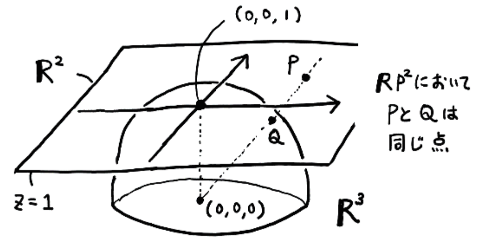
人が立っていて、足下には地面がある。何も障害物がなければ、目の前の平行な２直線は遥か彼方の地平線では交わって見える…。ルネッサンス期の絵画では（ダ・ヴィンチなどが）遠近法によってこのことを表現した。これを数学的に昇華したものが本稿のキーワードの「射影幾何」である。1639 年、デザルグ (1) は、デカルトによる座標幾何学に「射影」の要素を取り入れた。ポイントは、何処まで行ってもたどり着けない地平線を目の前の x 軸 y 軸と全く対等なもう１つの座標軸（「無限遠直線」という）と考えたことにある。そうすることによって、彼の目には楕円、放物線、双曲線の３つは同じもの（円錐曲線）に見えた！つまり次の(左右つの)射影座標



において、左図ではＡ（に立っている人）から見たら放物線だが C から見たら楕円、右図では A から見たら双曲線だが B から見たら楕円となっている(直線 BC、AC、AB はそれぞれ A、B、C から見た地平線) [D]。これが、射影幾何の始まりであり、幾何学において大きな途が開かれたとされている。2021 年１月の高知県立小津高校の SSH 事業の数学体験ゼミの中、筆者は幾何学の枠において「デザルグの目」というタイトルで射影幾何の入門について話をした。そこでは具体的にデサルグの定理(2)やパスカルの定理など[N]について紹介した。本稿では、その続きとして、これらの定理に使われる「射影化」という概念を日常的な話題に強引に転用したい。つまりデザルグの「目」だけを拝借して、算数や数学の知識を一切用いないで、出来事の「射影的分解」を試みる。なので、一応次の§２で数学的な定義を述べるが、そこはとばして§３から読んでも差し支えない。我々は小学生のとき国語（作文など）の授業で出来事を「起承転結」に分解・構成することを教わった。それを出来事のストーリー化による論理的理解の手法とするならば、「射影的分解」は暫定的にせよ視覚的理解の手法なので、図工（スケッチ）の授業の側面もあろう（上手い下手関係なしに、部分達のその周りへの整合性のとれた張り合わせがないと完成のメドが立たない…）。§３で§２から導かれた５つのルール、§４で絵画の構図の４段階のアナロジーとしての分解の手順、§5,6,7,8 で筆者の身近な例を与え、§９では分解不能な事例について一言触れる。

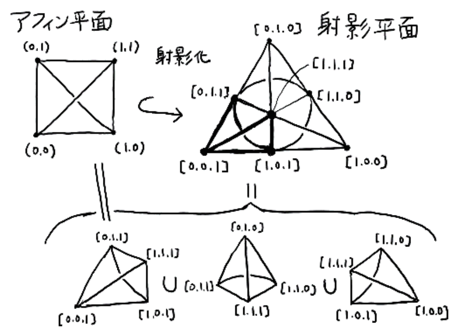
2　$\mathbf{Z}_2$上の射影平面

$\mathbf{K}$ を体とする。「体（たい）」とは、四則演算が定義された集合 (3) のことで、実数の集合 $\mathbf{R}$ はその一例である。$\mathbf{K}$ 上の射影平面は $\mathbf{K}P^2 := \mathbf{K}^3 - (0,0,0) / \sim$ と(同値関係で割ることで)定義される[SI]。ここで２つの元が同値 $(x_1,x_2,x_3) \sim (y_1,y_2,y_3)$ となるのは、ある零でない $a \in \mathbf{K}$ があって全ての i に対して $y_i = ax_i$ となるときである。要するに $\mathbf{K}P^2$ は原点(0,0,0)を通る直線を点とみなした空間ということである。xy 平面(アフィン平面と言う)$\mathbf{K}^2$ は、(x,y)を[x,y,1]に移すことによって $\mathbf{K}P^2$ に埋め込まれているが、この埋め込む行為は「射影化」と言われている。$\mathbf{K}$ が実数の集合 $\mathbf{R}$ の場合は次のようになっている。



この図の北半球面の赤道部分が無限遠直線といわれているもので、埋め込まれた xy 平面においてはどこまで行ってもたどり着けない…。

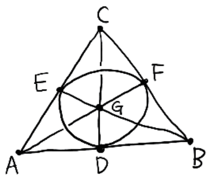
$\mathbf{K}$ が０と１からなる体（1+1=0）のとき、$\mathbf{K}$ を $\mathbf{Z}_2$ と書く。これは様々な体の中で最も小さいであろう。このとき $\mathbf{K}P^2$ は点が７個、直線が７本の最も小さい射影平面（ファノ平面といわれる）となる。以後、本稿ではこの最も単純な場合で考察する。さて、この射影平面は



と３枚のアフィン平面で（重なりあって）被覆されている。これらアフィン平面の四角形の対角線は交わっていない（平行）。真ん中の円の形は x+y+z=0 で表される直線である。なお今回取り扱うのは点と直線のみで、曲線は考えていない。$\mathbf{Z}_2$上の射影平面における以上の性質を抽出して次の節で我々のルールとして定めよう (4)。

3　射影的分解のルール

「射影的分解」は、出来事（点 G）を重心とする



なる三角形である。以後この表記を固定しよう。この７つの点A, B, C, D, E, F, Gと７つの線AB, BC, CA, AF, BE, CD, DEF(これのみ一見円の形に見える)に出来事の要素を当てはめていくことが射影的分解であり、以下の５つのルールを満たすものとする。ちなみに、これを離散数学におけるグラフ(graph)[OS]として見ると、７個の頂点と１５本の辺からなる。

【ルール1】　全ての点と線は出来事Gに関連すること（Gの内容を分析したり説明する際に必要なシンボル）である。具体的には、A、B、Cをそれぞれ「主体点」という。AB、AC、BCはそれぞれ「関係線」という。それらの線の中間にある点D、E、FをそれぞれAB、AC、BCの「因子点」という。AF、BE、CDをそれぞれA、B、Cの「作用線」という。因子点F、E、Dはそれぞれ作用線AF、BE、CD（またはA、B、C)の「無限遠点」でもある。さらに関係線BC、AC、ABはそれぞれA、B、Cに対する「無限遠直線」でもある。円を構成する３つの弧の辺DE、DF、EFはそれぞれA、B、Cの「気持線」という。単に円DEFを気持線とも言う。

【ルール2】主体点A、B、Cは（我々が）視点や立場を移しえる主体たちであり、辺AGはAによるGへの「作用」(AがGに至るまでの経緯やAによるGへの影響など）を示すものである。BGとCGもしかり。

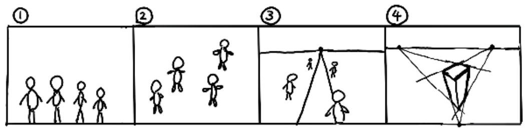
【ルール3】　関係線ABは主体点AとBの関係性を示すものである。AC、BCもしかり。因子点D、E、FはAB、AC、BCの中のGの要素であり、AにとってFはAGの延長上にありかつAが意図的に変更できない（Aの作用の届かないところにある）ということ（なので無限遠点という)。BとCについても同様。

【ルール4】作用線AFと気持線DEは交わらない。AFはAを主語とする能動的述語（Aの行動の時間軸等）であり、DEはAを主語とする受動的述語(Aのスタンスや感情等)。残りの２組も同様。

【ルール5】作用線CDの中の辺GDはAにとってのGの分解であると同時に、BにとってのGの分解でもあり、それらは整合性がとれている。辺GEと辺GEも同様。（これは§２で述べた「射影平面は３つのアフィン平面が座標の共有によって張り合わさって被覆されている」ということからの要請である。）

４　射影的分解の手順

幼稚園から高校までの絵画スケッチの構図における ①一列的、　② 鳥瞰図的、　③ １点遠近（透視図）法、④ ３点遠近（透視図）法 という進化順序に従って、以下のような射影的分解の手順が自然だろう：



①　［１次元表示］
主体Ａ（主語）による出来事Ｇ（述語）がある。

②　［アフィン的分解］（２次元表示）
主体Ａに対して（Ａを原点としたとき）Ｇを特徴付ける２つの方向性を設定し(Gがxy座標における点となるように)出来事ＤとＥに分解する(G=(D,E)と座標表示する)。例えば、関数y=f(x)的にＤはＧの「原因」、ＥはＧの「結果」とすることもあろう。

③　［準射影的分解］（射影化）
無限遠直線 ℓ を設定し、アフィン的作用線AGを延長した先に ℓ 上の点Ｆがある。ただしＦは無限遠点ゆえ、ＡはＦに（その出来事の設定内においては）到達することはない。

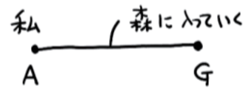
④　［射影的分解］
無限遠直線 ℓ を象徴する（関係線とする）２つの主体点ＢとＣを言語化してからそれぞれの作用線BEとCDを描く。ただしＢとＣの無限遠点ＥとＤはそれぞれ②の因子点になっている。

次の節で具体的にこの手順で射影的分解してみよう。以後、射影的分解の身近な例を取り上げるが、人それぞれに色々な分解がありえることを事前に言い訳しておく。

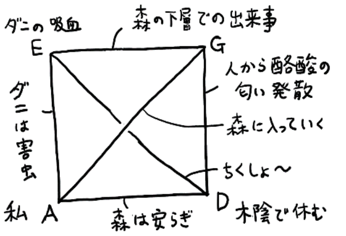
５　例１

「私は森に入り木陰で休憩した際にダニに咬まれた」という出来事（実話）をＧとし、上節の①～④の順に沿って射影的分解してみよう。

①　１次元表示
出来事Ｇに出会うまでの私Ａの時系列（１次元）スケッチであり、主語Ａ「私」、述語Ｇ「(私は）木陰でダニに咬まれる」で、辺AGは「森に入っていく」となる。



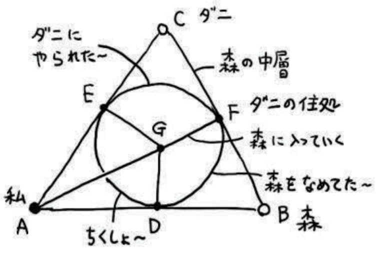
②　アフィン的分解
先ほどの①におけるＧを次のように２つの要素(この場合、原因と結果)をもとに２次元的に分解する。



通常人は自然界の森を道具としてしか見ていないが、時折このようなしっぺ返し（被害）を受けることによってその理由を知りたい（納得したい）と思うことになる。そのとき、アフィン的分解だけでは物足りない、まずは、ダニの住処は何処だろうか等と考え始めるだろう。

③　**準射影的分解**

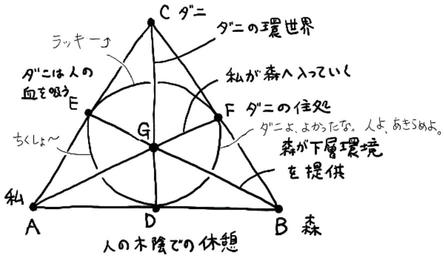
森の（垂直）構造は、生態、光合成等によって、上層、中層、下層の３構造に分けられることが知られている。ダニの住処は（中層の）枝先や木の葉である［U］。そこで無限遠点Fは「ダニの住処」、無限遠直線 ℓ（辺BC）は「（ダニの住処のある）森の中層」と設定する。AFは「人Aが森にどんどん入っていく（Fに近づく）」というイメージであり、Aを始点とする時間をパラメータとする半直線がGを通っている。Fは人の身長より高い所（森の中層）にあるから、どんなに森の奥に入ったとしても辿り着けないので、無限遠点として（物理空間的にも）ふさわしい。このとき準射影的分解は



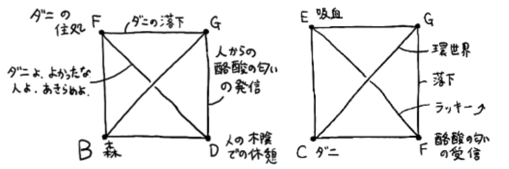
のように、５個の点（ℓ の両端のB「森」とC「ダニ」はまだ脇役なので点ではない）からなる。辺DFは森に対する気持ちであり辺EFはダニに対する気持ちで、共に辺DEの延長。このようにして、「射影化」されることにより、私がダニの住処に近づいたためにダニに咬まれてしまったんだと反省することになる。とはいえまだAの自己中心的な解釈にとどまり、相対化には至っていない。なので別の主役候補のBとCについてクローズアップしなければならない。それは、森においてダニが人に咬みつく仕組みを理解することにより可能だろう。

④　**射影的分解**

いよいよ「人、森、ダニ」という３つの主役が登場する。彼らをA、B、Cという３つの主体点とする射影的分解は次のようになろう。

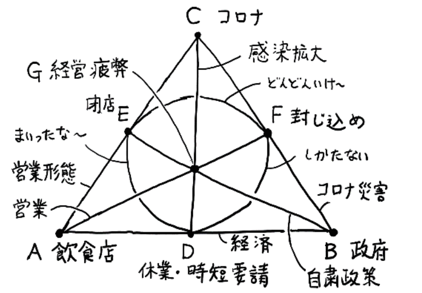


Cの作用線CDは、ダニ目線の血を吸う一連のシステムのことであり、ユクスキュル[U]によってダニの「環世界（Umwelt）」(5)と提唱されているものに相当する。環世界では、哺乳類からの酪酸の刺激を感知してから始動し、枝からの落下、着地、…と決まった順序で（その哺乳類から離脱するまで）「知覚」と「作用」を繰り返す。BEは森による下層における環境空間の提供[W]、関係線BCは森の中層におけるダニの生態系となろう。③で設定したDは、ダニCにとっては人の皮膚に着地をするものの、人が休憩している行為そのものには到達できないという意味において、Cの無限遠点とする。さらにEは、森の下層にけるドラマGの背景となる食物連鎖は直接関係ないという意味で、森Bの無限遠点として差し支えなかろう。ちなみにBとCを主体点とするアフィン分解は次のようになる。



6　例2

2021年8月某日、テレビでコメンテーターが「コロナ禍で飲食店が政府による度重なる休業要請の煽りを受けて次々閉店に追い込まれている」と発言していた(6)が、これはデザルグの目にはどう映るだろうか。３つの主体点を「A：飲食店、B：政府、C：コロナウイルス」として射影的分解してみよう。

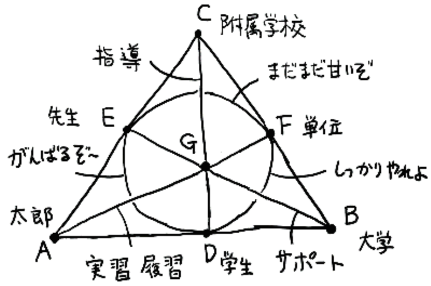


コロナの封じ込めFを掲げる政府Bの飲食店への自粛を求める方針Dは個々の店の経営まで配慮が行き届い

ていない。Bの作用線である政策は、一律に規制をしつつ経済援助をするというやり方である。したがって、場合によってはコロナと共存して（三密や飛沫を抑えるような）店の改造をしつつ営業を続ける個々の店の選択肢が排除されている。残念ながら因子点Eはwithコロナ社会における経営の中の望ましくないシナリオだろう。

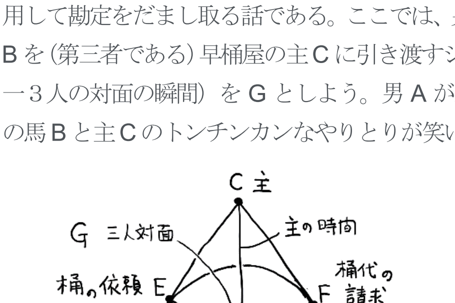
7　例3

太郎君(学生)が、附属学校において教育実習Gに臨むにあたって注意すべきことは、実習生は附属の先生方からは指導・評価される立場でありながら、生徒達からは新米の先生として親しみと尊敬の目で見られているということであろう。実習の単位取得は、それらを両立した結果として待っている。したがって彼は次のような射影的分解をイメージしておくといいかもしれない。



8　例4

落語の「付き馬」(7)をデザルグの目で鑑賞してみよう。無銭飲食や勘定が足りない遊客に（不払いの飲食費を受け取るために）付いていく店の人を「馬」という。この落語は、吉原で遊びまくったある男が馬から第三者を利用して勘定をだまし取る話である。ここでは、男Aが馬Bを（第三者である）早桶屋の主Cに引き渡すシーン（唯一3人の対面の瞬間）をGとしよう。男Aが逃げた後の馬Bと主Cのトンチンカンなやりとりが笑いを誘う。



9　おわりに

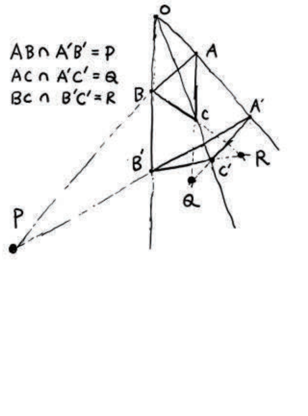
「3」という数は興味深い。「3人寄れば文殊の知恵」という。その一方で、A、B、Cの3人の子供が遊んでいる様子を見てみよう。日頃AとBの2人のときは仲がいいのに、もう一人Cが加わり3人になると、BとCが一緒になって残りの1人Aをイジメるという不思議な光景に出くわすことがある。このような状況を理解するときに、もともと「AとB」より「BとC」の方が結びつきが強いというなら分かりやすいが、一概にそうとは言い切れず、3人が作り出す空気によって　BとCが新しい繋がりを持つ場合がある。この状況はBとCの関係線をAにとっての無限遠直線とみなす射影的分解によって自然に捉えることができるのかもしれない。

では「3人寄れば」いつでもデザルグの御目に適(かな)うのだろうか？デザルグの目の特徴の一つは主体の相対化であった。しかしそれだけでは射影的分解できるとはいえない。象徴的な例として、芥川龍之介の小説「藪の中」(1922)(8)は、盗人に襲われた夫婦の事件の話でありG「藪の中での夫の死」についての「夫」「妻」「盗人」の3者それぞれの相対的真実は食い違う(9)。つまり、3者を主体とする出来事をそれぞれの作用線とした場合、3つのアフィン的分解の整合性がとれない。したがって§3の【ルール5】を満たさないから射影的分解ができない(10)。（遠近法に基づく）デザルグの目を用いて、森の中で私が体験した風景は見ることができたものの、残念ながら藪の中の芥川龍之介が描いた風景は見ることができそうもない…

註

（1）デザルグ Desargues 1591~1661　建築家 数学者

(2) デザルグの定理とは「2つの三角形△ABCと△A'B'C'について、AA'とBB'とCC'が一点Oで交わる時、直線ABと直線A'B'、直線ACと直線A'C'、直線BCと直線B'C'の交点を、それぞれP,Q,Rとすると、P,Q,Rは、同一直線上にある」という、ちょっと難しそうなものであるが、立体的に見ることにより一瞬で納得できる[N]。



(3)「体」とは加法＋と乗法×において閉じている集合のこと。整数の集合Ｚは乗法における逆元がないので体でないが有理数や実数の集合は体である。また、Ｚを素数ｐで割った余りの集合は体になる。このとき、０でない元ｘの加法における逆元はｐ−ｘであり、乗法における逆元は(フェルマーの小定理より)ｘをｐ−２乗した元をｐで割った余りとなる。

(4) 射影幾何には、今回用いなかった大切な性質として、「双対性」（異なる２直線は必ず１点で交わり、異なる２点を通る直線は１つのみ存在する）や「射影変換」等といった重要な概念があり[SI][N]、橋爪大三郎[H]は構造主義における射影幾何学の重要性を指摘している。また、小学校の算数においても教師が射影幾何の視点を持っておくことは意義がある[OH]。射影的分解は次元を上げて一般のｎ次元 **K**-射影空間 $\mathbf{KP}^n$ で考えることも可能だろう。このとき主体点は n+1 個ある。例えば n=3 の場合は（正三角形ではなく）正四面体をイメージすればよい。**K** が実数体 **R** のときのｎ次元実射影空間 $\mathbf{RP}^n$ は、[Y2]で述べている研究対象の重要な１つ。

(5) 正確には「マダニ」という。目も耳もない八本脚でクモの仲間。マダニは幼虫、若虫、成虫の各齢期に各１回ずつ、計３回飽血（十分に吸血）し、そのたび宿主動物から離脱する。一生のうち未吸血期は、吸血期よりはるかに長いが、マダニにとっての環世界は停止している[U]。ユスクキュル[U]はマダニなどを主体点とするアフィン的分解を生物学者の視点から見事に描いている。

(6) １０月後半になり東京のコロナ陽性者数が急激に減ったのを受けて、10月25日のニュース番組「Ｎスタ」でアナウンサーの井上貴博は「人間側の行動に関係なく減り続けているので、ウイルス側に何が起こっているのかを解明、分析してほしい」とコメントしていた。

(7) YouTube でも古今亭志ん朝のものを観ることができる。この落語を「起承転結」で表すと、「転」がＧになり「結」がＦとなろうか。

（８）１９５０年、黒澤明監督により「羅生門」というタイトルで映画化され、日本映画が脚光を浴びた。

(9) テレビアニメの「名探偵コナン」（青山剛昌原作）では、「真実はいつも一つ！」という決め台詞のもとでストーリーが進行する。なので、いくら登場人物の供述が異なっていたとしても、犯人はウソをついている、もしくは目撃者は勘違いしているだけで、結局のところそれらは気持線の相違に留まるということで、毎回の事件の射影的分解がおそらく可能なのではなかろうか。

(10)アフィン空間を張り合わせてできる空間を一般に多様体（manifold）[R]というが、張り合わせを必ずしも要求しないものとして、２０世紀中頃に岡潔 や ルレーによって誕生した（多様体上の）層（sheaf）[J]というものがある。これは 1970 年代にグロタンディック（代数幾何学）およびローヴィア（論理学）によって トポス(topos）へと圏論的に一般化されていく[J]。

注) 「射影分解(projective resolution)」という似た言葉があるが、これはホモロジー代数における由緒正しい数学用語であり、本稿で試みている（曖昧さを否めない）「射影的分解(projective decomposition)」とは、共にデザルグの目発祥ではあるものの、一切関係ない。

謝辞 SSH（スーパー・サイエンス・ハイスクール）数学体験ゼミを開催された小津高校数学科の大崎雅重先生と熱意を持って受講した小津高校の有志の学生さん達、そしてスムーズに段取りしてくれた高知大学数学教育コースの服部裕一郎先生に、感謝申し上げます。

文献

[D] デザルグ「円錐と平面の交わりという事象に対して達成した研究草稿」1639 （カッツ「数学の歴史」共立出版 2005）

[H] 橋爪大三郎「はじめての構造主義」講談社現代文庫 1988

[J] ヨスト「現代数学の基本概念」丸善出版 2015

[N] 西山享「射影幾何学の考え方」共立出版 2013

[OH] 大谷洋貴、袴田綾斗「合同と拡大図・縮図－図形の構成的探究－」（溝口達也、岩崎秀樹「小学校教師のための算数と数学１５講」の第９講 p104~p117）ミルネヴァ書房 2018

[OS] 織田進、佐藤淳郎「グラフ理論の基礎・基本」牧野書店 2010

[R] リーマン「幾何学の基礎に関する仮説について」1854

[SI] 佐藤肇、一楽重雄「幾何の魔術」日本評論社 1999

[U] ユクスキュル、クリサート「生物から見た世界」岩波文庫 1970（原著 1933）

[W] ブォールレーベン「樹木たちの知られざる生活」早川書房 2017

[Y] 安田健彦「ゲームで大学数学」共立出版 2018

[Y2] 山口俊博「ホモトピー論における三密について」高知大学教育学部研究報告８１号 2021 177-180