数学教育における発展的な見方・考え方の育成と基本的技能の習熟を統合する授業デザインについて
―What-If-Not ストラテジーと Z.P.D.理論の活用―

上岡 栄二[1)]，中野 俊幸[2)]
1）高知大学大学院総合自然科学研究科教職実践高度化専攻院生
2）高知大学大学院総合自然科学研究科教職実践高度化専攻

A Study on Design of Mathematics Teaching-Learning Practice for Integrating the Training of Basic Skills with Growing the Ability to Develop Mathematical Thinking
―The Systematic Application of What-If-Not Strategy and Z. P. D. Theory―

KAMIOKA Eiji[1)]， NAKANO Toshiyuki[2)]

1)Kochi University Graduate School of Integrated Arts and Sciences,
Professional Schools for Teacher Education, Graduate student
2)Kochi University Graduate School of Integrated Arts and Sciences,
Professional Schools for Teacher Education

要 約

本研究は，問題解決や問題設定のような数学的活動を中学校数学で効果的に行うために，授業の発展的展開と基本的技能の習熟を統合する授業デザインを考案したものである。中学校 3 年の多項式の応用問題を題材として，S.I.Brown＆M.I.Walter の「What-If-Not ストラテジー」の 5 水準を応用して授業の学習指導過程に数学的問題設定の文脈を設定するとともに，Vygotsky の「Z.P.D.理論」を応用し，基本的文字計算や式表現を模倣する場面を組織的に設定した。そしてデザインした授業を実践してその有効性と課題を考察したものである。授業実践から，発展的探究過程が，生徒の積極的模倣を促し，効果的な基本的技能の習得と習熟をもたらし，また，その模倣による基本的技能の習熟が，ほとんどの生徒に発展的探究過程に主体的に参加させることにもつながることが実証された。

キーワード：What-If-Not ストラテジー，発達の最近接領域，模倣

1. はじめに

新しい学習指導要領とその解説書では，数学的活動を通して深い学びを数学授業で実現することが求められており，それに応えるために，問題解決や問題設定の文脈を数学の学習過程に組み込むような授業デザインが，実践的に研究されるようになっている。筆者も，問題設定のための効果的な技法として S.I.Brown と M.I.Walter が考案している What-If-Not ストラテジーを応用し，数学授業に問題設定の文脈を組み入れて，数学的内容・方法をさらに発展的に探究させる授業実践を行ってきた。

発展的に探究させる授業によって，数学的思考の素晴らしさを多くの生徒に感得させることができ，数学の発展的見方・考え方の育成につながる授業が実践できたと分析できた。しかし同時に，基礎的技能が十分でないために，発展的思考について行けない生徒も少なくないことも明らかになった。特に，中学校数学においては，文字式などの基本的計算方法や文字式による基本的表現方法に相当程度習熟させていなければ,数学内容の応用的・発展的展開を生徒に主体的に思考させることは難しいのが実情である。そのため，問題解決や問題設定のような数学的活動を中学校数学で効果的に行うためには，授業の発展的展開と基本的技能の習熟を統合するような授業デザインが必要である。

そこで，本研究では，What-If-Not ストラテジーに Vygotsky の発達の最近接領域（Zone of Proximal Development;以下Z.P.D.と略）の理論を統合して授業デザインをすることを考察した。Z.P.D.に着目した理由は，一人ではできない生徒が他者（教師・友人）との社会的交流によって，特に，模倣を通してできるようになる発達段階が決定的に重要な学習場面として指摘されているからである。実際,文字式の計算方法や表現方法などは，模範的方法を生徒に積極的に模倣させることを通して習得や習熟を図ることが効果的である。Z.P.D.を活用して模倣の学習場面を授業の展開場面に組織的に設定することによって，ほとんどすべての生徒の発展的な数学的見方・考え方を効果的に育成できると考えたのである。

以下では，What-If-Not ストラテジーとZ.P.D.理論を概説し，それらを組織的に応用して，中学校３年の多項式の応用問題を題材とした発展的学習指導過程の授業デザインを提案する。そして，その授業実践から得られたその有効性の評価と問題点・課題を考察する。

2.What-If-Not ストラテジーと Z.P.D.理論について

(1)What-If-Not ストラテジーについて

S.I.Brown&M.I.Walter は，問題を設定することは，問題を解決する以上に教育的に重要であると主張し，問題設定を効果的に行うための技術，つまり問題設定のストラテジー（方略）を考案している。それは，次の５つの水準からなっている(Brown&Walter 1990)。

【第０水準】　出発点を選ぶ
【第Ⅰ水準】　属性の目録づくり
【第Ⅱ水準】　What-If-Not
【第Ⅲ水準】　問いをつくる　あるいは問題設定
【第Ⅳ水準】　問題分析

【第０水準】の出発点を選ぶとは，これから生徒に問題を発展させたり，問題を作らせたりするための原問題や原命題などを選択する水準である。実際の授業では，元になる問題を教師が提示し，それを生徒が解く段階になる。

【第Ⅰ水準】の属性の目録づくりとは，原問題の属性を挙げること，つまり，原問題を構成する様々な要素や性質を生徒に挙げさせる水準である。その際，分かりきった条件や当たり前の性質など，採り上げるに値しない属性も無視せずに列挙することが重要である。そのことについてBrownは「自明なものや無関係，無意味と思われるものなども挙げておくことが価値ある研究を導きうる」と主張している（Brown 1984）。問題の属性を列挙し改めて意識させることは，問題を問題として成立させている前提条件や問題状況を明らかにしていくことに繋がり，そこから新しい問題意識が生まれるからである。

【第Ⅱ水準】は,【第Ⅰ水準】で挙げた各属性に対して「そうでなければ，それはどうなるか（“What if not ～？”）」と問うことである。つまり，原問題の条件や性質を意識的に否定することによって，属性を変形していく水準である。

【第Ⅲ水準】は，否定によって生成された新しい条件や性質を有する問題状況から，原問題を発展させた新しい問題をつくる水準である。

【第Ⅳ水準】は,【第Ⅲ水準】でつくった新しい問題の中からいくつかを選び，それを解いたり分析したりする水準である。

このようなWhat-If-Not ストラテジーを活用して，中学校数学の具体的問題を原問題として問題づくりの学習指導過程をデザインする。

(2)発達の最近接領域（Z.P.D.理論）について

J.Lave & E.Wengerによれば，Vygotskyの発達の最近

接領域（Z.P.D.）の学習理論への解釈には，「外的支援（Scaffolding）という解釈」「文化的解釈」「集合主義的（collectivist）あるいは社会レベルの（societal）見方」の３つの解釈がある。

「外的支援という解釈」

これは，Z.P.D.を「学習者が単独で取り組むこときに示す問題解決能力と，より経験を積んだ人に助けられたり，彼らと共同で取り組むときに示す問題解決能力との距離として特徴づけられる」（Lave & Wenger 1997）とする解釈である。

Vygotsky自身は，子どもが一人でできる・できないによって決定される水準【現下の発達水準】に対し，一人ではできないが他人との協同の中ではできる水準に着目し，今日協同でできることは明日には一人でできるようになることから【明日の発達水準】と呼び，この水準をZ.P.D.としている（柴田 2006）。

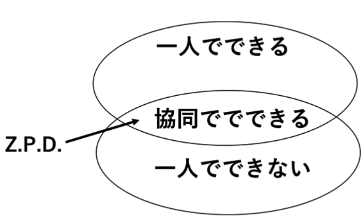


図１ 外的支援という解釈

この解釈による学習理論では，模倣が意義付けられ，子ども自身の積極的な内面的活動を促すための教師の先導的役割の必要性や子どもたちの集団的・協同的活動の必要性が主張されることになる。

「文化的解釈」

これは，Z.P.D.を「社会歴史的な文脈によってもたらされる文化的知識－教授によってアクセス可能になる－と，個々人の日常的経験との間の距離」（Lave & Wenger 1997）であるとする解釈である。

Vygotsky自身は，子どもが生きてきた中で自然に身に付けた概念を【生活的概念】と呼び，また学校教育で意図的に学習する概念を【科学的概念】と呼んでおり，【生活的概念】と【科学的概念】との交わりをZ.P.D.としているのである（柴田 2006）。

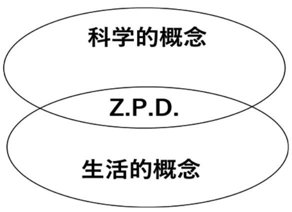


図２ 文化的解釈

この解釈による学習理論では，【科学的概念】を学習するときは子どもが【生活概念】を持っていることを前提にした学習プロセスを研究することになる。

「集合主義的あるいは社会レベルの見方」

これについて，Lave & Wengerは，「エンゲストレイムは最近接発達領域を「個々人の日常的活動と，日常的活動に潜在的に埋め込まれているダブルバインドの解決として集合的に生成され得る，歴史的に新しい形態の社会レベルの活動との距離」と定義している」と解説している（Lave & Wenger 1993）。この解釈による学習理論では，学習を社会的実践と捉え，その葛藤的特性を考慮し，社会的変容（societal transformation）のプロセスを考察の中心的対象とすることになる。

本研究では，上記の３つの解釈のうち，「外的支援という解釈」に着目した。その解釈による学習理論では，教師の先導的役割の必要性と模倣の教育的意義が主張されているからである。子どもの主体的活動を重視する今日の教育界では，教師が先導することや生徒が模範的解法をまねることは，学習方法として肯定的に評価されず，ときには，子どもの主体性や自主性を妨げる指導方法として否定的に評価されているように思われる。しかし，柴田義松が「教育は，模倣が可能なところでのみ可能です。」（柴田 2006 p.27）と主張しているように，学校教育の数学授業の実際を省察すると，むしろ，生徒の主体的で積極的な活動を促すためには，教師の先導的役割と生徒の積極的な模倣が必要不可欠と考える。

本研究では，生徒の主体的取り組みが前提となるWhat-If-Notストラテジーによる問題づくりの授業展開に，生徒の模倣を組織的に設定することを考察する。

3.What-If-Notストラテジーと Z.P.D.の理論を組織的に活用した授業デザイン

(1) 本研究で扱った題材

本研究の授業デザインで扱った題材は，中学校３年生の「多項式」の単元の教科書に記載されている次のような問題である。本授業ではZ.P.D.理論の外的支援の考えとWhat-If-Notストラテジーを基にして授業デザインを行った。

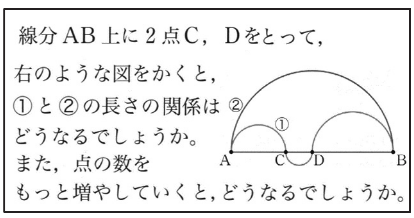


図３ 新編新しい数学３ 東京書籍

(2) What-If-Notストラテジーを活用した授業デザイン

①本題材を基にしたWhat-If-Notストラテジー水準の構成

上記の題材を基にして，What-If-Not ストラテジーの水準を次のように構成した。

【第０水準】

原問題は次のような問題を提示することにした。

AB の中点を C とするとき，弧 AB と弧 AC＋弧 CB はどちらが長いか。

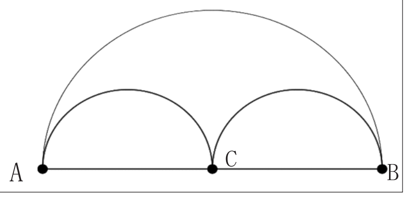


図４　提示した原問題

【第Ⅰ水準】

次のような属性を挙げさせる。

a.「点 C は中点である」

b.「線分 AB 上に点を１個とっている」

c.「半円の弧の長さを考えている」

【第Ⅱ水準】

第Ⅰ水準で挙げた属性を次のように否定することによって属性の変形を考えさせる。

(￢ a).「中点でなければどうなるか」

(￢ b).「AB 上に１点でなければどうなるか」

(￢ c).「半円でなければどうなるか」

【第Ⅲ水準】

(〜a)$_1$.「AC＝4,CB=6 ならば半円の弧の長さの和は？」

(〜a)$_2$.「AC＝3,CB=7 ならば半円の弧の長さの和は？」

(〜a)$_3$.「AC＝a,CB=b ならば半円の弧の長さの和は？」

(〜b)$_1$.「２点とると半円の弧の長さの和は？」

(〜b)$_2$.「３点とると半円の弧の長さの和は？」

(〜b)$_3$.「n 分割すると半円の弧の長さの和は？」

(〜c)$_1$.「正三角形ならば周の長さは？」

(〜c)$_2$.「正方形ならば周の長さは？」

【第Ⅳ水準】

(〜a)$_1$，(〜a)$_2$ について 弧 AC＋弧 CB は 弧 AB と等しくなることから，点 C の位置を線分 AB 上のどこにとっても変わらないかが問題となり (〜a)$_3$ の結果，点 C の位置が変化しても 弧 AB＝弧 AC＋弧 CB となることを証明する。

(〜b)$_1$，(〜b)$_2$ について半円の弧の長さの和は弧 AB と等しくなることから，線分 AB をｎ分割した場合の問題(〜b)$_3$が意識され，n 分割しても半円の弧の長さの和は AB を直径とする半円の弧の長さと同じ（変わらない）になるという予想を，式変形（分配法則及びその逆）の一般化から説明する。

(〜c)$_1$，(〜c)$_2$ から，半円の形を変更し，正三角形・正方形の場合も周の長さの合計は変わらず同様の性質があることを知る。

②What-If-Not ストラテジー水準を取り入れた学習指導過程の構成

導入（第０水準）

導入段階は第０水準で，原問題を提示し，どちらが長いかを生徒に予想させる。

展開１（第Ⅰ水準）

円周の求め方を確認しながら半円の弧の長さを計算させ，弧 AB＝弧 AC＋弧 CB になることを確かめさせる。その後，第Ⅰ水準に移り原問題の属性を３つ（a.，b.，c.）挙げさせる。

展開２（ a. についての第Ⅱ・Ⅲ・Ⅳ水準）

展開１で挙げた３つの属性のうち a. を選び，第Ⅱ水準として (￢ a).「中点でなければどうなるか」と問い，第Ⅲ水準として，まず (〜a)$_1$.「AC＝4，CB=6 ならば半円の弧の長さの和は？」(〜a)$_2$.「AC＝3，CB=7 ならば半円の弧の長さの和は？」と問題設定し，第Ⅳ水準としてどちらも 弧 AC＋弧 CB は 弧 AB と等しくなること見つけさせる。そして，点 C の位置を線分 AB 上のどこにとっても変わらないかを問題にし，(〜a)$_3$の結果 C の位置が変化しても 弧 AB＝弧 AC＋弧 CB となることを文字式で説明させる。

展開３（ b. についての第Ⅱ・Ⅲ・Ⅳ水準）

第Ⅰ水準の b.「線分 AB 上に点を１個とっている」を改めて取り上げ，第Ⅱ水準として (￢ b).「AB 上に１点でなければどうなるか」と問い，第Ⅲ水準として，まず(〜b)$_1$.「２点とると半円の弧の長さの和は？」(〜b)$_2$.「３点とると半円の弧の長さの和は？」と問題設定し，第Ⅳ水準としてどちらも半円の弧の長さの和は 弧 AB と等しくなることから，線分 AB をｎ分割した場合の問題(〜b)$_3$が意識され，n 分割しても半円の弧の長さの和は AB を直径とする半円の弧の長さと同じ（変わらない）になるという予想を式変形（分配法則及びその逆）の一般化から説明できることを理解させる。

まとめと発展（ c.についての第Ⅱ・Ⅲ・Ⅳ水準）

半円の弧の長さの和について，直径AB上のどこに何点とって半円を作ってもその和は変わらず，弧ABに等しくなることをまとめ，第Ⅰ水準のc.「半円の弧の長さを考えている」を最後に取り上げ，第Ⅱ水準として(¬ c).「半円でなければどうなるか」と問い，第Ⅲ水準として$(\sim c)_1$.「正三角形ならば周の長さは？」$(\sim c)_2$.「正方形ならば周の長さは？」と問題設定し，図のみを提示して，この解決は本授業では扱わない。興味をもった生徒への自主的課題として提示する。

(3)Z.P.D.理論を活用した授業デザイン

文字式による数学的説明方法について模倣を中心とするZ.P.D.を次のような３つの段階で設定した。

①文字式による数学的説明方法の理解

まず展開１の原問題を解く段階では，半円の弧をπを使って表したり２つの半円の弧の和を文字式で表したりする方法は，教師が先導し，適宜生徒に要点を問いながら板書して模範を示す。多くの生徒はこれを書き写すことによって理解し，文字式による数学的説明方法を習得することになる。

②具体的数値の記述方法の模倣

次に展開２で点Cの位置が変化しても 弧AB＝弧AC＋弧CB となることを説明する段階で，$(\sim a)_1$.，$(\sim a)_2$.の具体的数値の場合は，多くの生徒は原問題に対して教師が示した記述方法を模倣しながら次第に一人で記述できるようにさせる。

$(\sim a)_3$.のAC＝a，CB=bと文字で置く場合は，具体的数値の場合の一般化と捉えて記述できた生徒を指名し，前に板書させる。そして，まだできていない生徒にはその板書を理解させるように促す。

③文字で置いた場合の記述方法の模倣

そして展開３で$(\sim b)_1$.　$(\sim b)_2$.の３分割・４分割の場合は，展開２での２分割での$(\sim a)_3$.のAC＝a，CB=bの文字で置いた場合を模倣して一人で自主的に記述できるようにする。

(4) What-If-Not ストラテジーとZ.P.D.の理論を統合した授業デザイン

２つの理論を統合した授業デザインは図３の通りである。また，学習指導過程は表１の通りである。

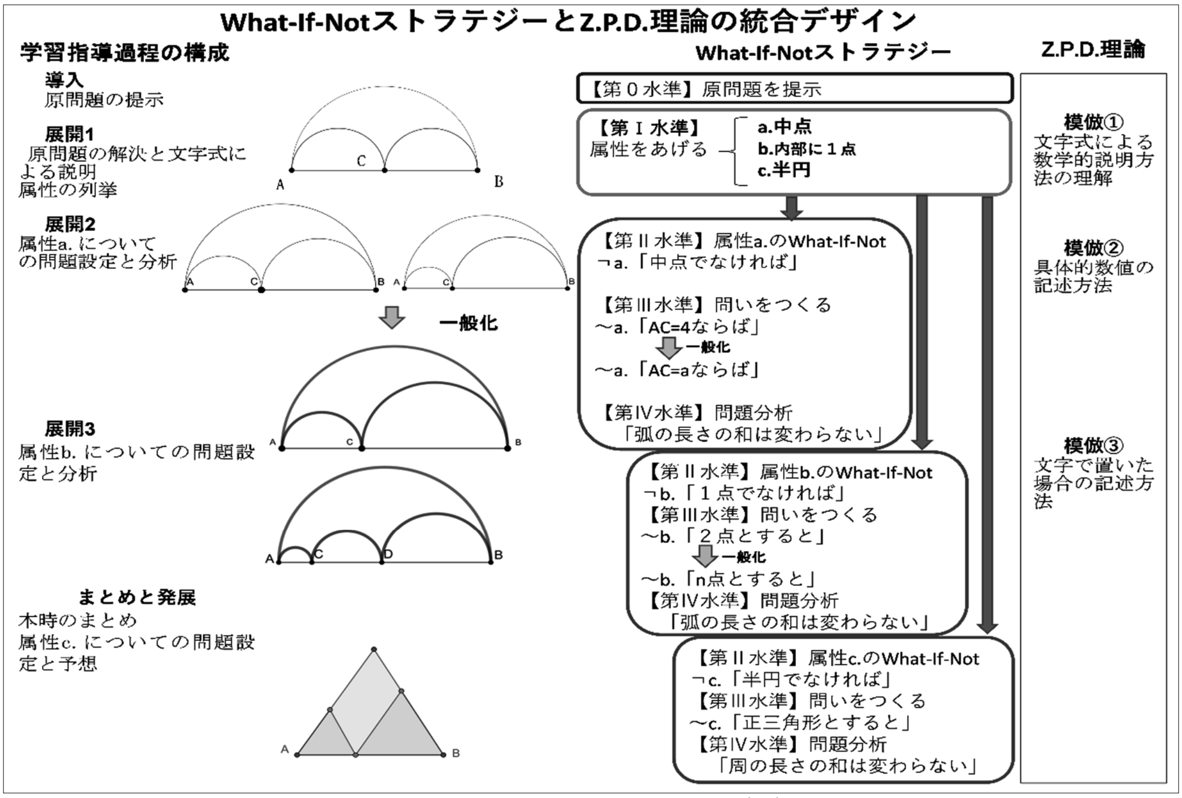
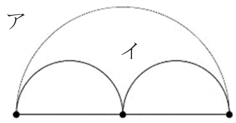
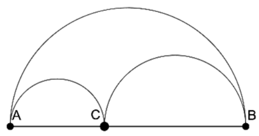
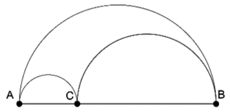
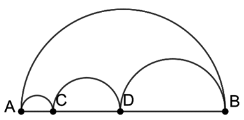
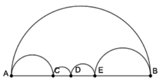
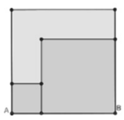


図３　２つの理論を統合した授業デザイン

表１学習指導過程

	学習活動・指導過程	指導上の留意事項
導 入 ５ 分	●原問題を提示し，どちらが長いかを生徒に予想させる **【問題】** 線分 AB を直径（10cm）とする半円をかく。 線分 AB 上の中点 C をとり，図のように ２つの半円をかく。 A から B へ行くのに アのコースと イのコースでは どちらが長いか  （発問）どちらのコースが長いか。	・導入には時間をかけず展開に移る。 ・問題文と図を黒板に掲示する。 ・時間はかけずに直観で考えさせる。 ・どちらのコースを選んだかを挙手させる。理由についてはここでは深く尋ねない。
展 開 １ ４ ０ 分	●半円の弧の長さを求め原問題の属性を挙げさせる。 ・それぞれの長さを求めて等しいことを確かめる （指示）「それぞれの長さを求めよう。」 【予想される困難点】 ・半円の弧の長さの求め方が分からない。 ・πを使ったときの表記法が分からない。 ・次のような記述方法を提示し模倣させる。 アのコース 弧 AB=10π×1/2 = 5π ・・・① イのコース 弧 AC=5π×1/2 弧 CB=5π×1/2 弧 AC＋弧 CB＝5/2π＋5/2π＝５π・・・② ①,②より，アもイも同じ長さである。 ・原問題の属性をあげさせる。 （発問）「この問題の特徴や性質をあげよう。」 （属性 a）点 C は中点である。 （属性 b）線分 AB 上に点を１個とっている 半円が２つある （属性 c）半円である	・長さを求めるには何が必要かを考えさせる。 ・円周の求め方を忘れている生徒には，（直径）×（円周率）を教えるが，半円であるので，どうするかは考えさせる。 ・πは文字ではなく数値であることを確認し，表記の仕方も復習する。 ・模倣①；文字式による数学的説明方法を模倣させる。 ・アのコースとイのコースの長さは同じになることを確認する。 ・What-If-Not の第Ⅰ水準である。 ・質問の意味が分からなければ，教師が例をあげて誘導する。
展 開 ２	●点 C が中点でなければどうなるか考えさせる。 ・点 C の位置が 4cm のときの長さを考えさせる。 （発問）「AC＝4cm のときの アとイの長さを 求めよ。」  （指示）「点 C が中点のときの書き方をまねして書きなさい。」 ・書けた生徒を指名し板書させる。 アのコース 弧 AB=10π×1/2＝5π …① イのコース 弧 AC=４π×1/2 弧 CB=６π×1/2 弧 AC+弧 CB＝２π＋３π＝５π …② ①,②より，アもイも同じ長さである。 ・点 C の位置が 3cm のとき長さを考えさせる。 （発問）「AC＝3cm のときの アとイの長さを 求めよ。」  （指示）「点 C が中点や 4cm のときをみて，同じように書きなさい。」	・ What-If-Not の（属性 a）についての第Ⅱ・Ⅲ・Ⅳ水準である。 ・模倣②；原問題の記述方法を模倣させる ・机間巡視し，原問題の書き方を模倣してできているかを確認する。大半の生徒には模倣して記述を完成させたい。 ・書けていない生徒には同じ部分と違う部分（数値の違い）に着目するように個人指導する。 ・奇数の値にしたことで，弧の長さが分数になるので，式変形の過程で因数分解する必要性がでてくる。 ・模倣②；点 C が中点や 4cm のときの記述方法を模倣させる。 ・２つの例を模倣するので，同じ部分と違う部分（数値の違い）に着目しやすくなる。

	・書けた生徒を指名し板書させる。 アのコース 弧 $AB=10\pi\times1/2=5\pi$ …① イのコース 弧 $AC=3\pi\times1/2=3/2\pi$ 弧 $CB=7\pi\times1/2=7/2\pi$ 弧AC+弧 $CB=3/2\pi+7/2\pi$ $=1/2\times(3+7)\times\pi=5\pi$…② ①,②より，アもイも同じ長さである。 ・変式形の過程で因数分解する必要性を考えさせる （指示）「$1/2\times(3+7)\times\pi=5\pi$ に注目し $5/2\pi+5/2\pi$ と $2\pi+3\pi$ も 同じように途中の式変形を書きなさい。」 $5/2\pi+5/2\pi=1/2\times(5+5)\times\pi=5\pi$ $2\pi+3\pi=1/2\times(4+6)\times\pi=5\pi$ （発問）「この式変形でどこが同じで，どこが違うか」 「長さ同じになることは，この式変形のどこから説明きるか」 ・文字を使った証明を考えさせる （発問）「線分AB上のどこに点Cがある場合でも，式で表そうとするときには何を使うか」 ・AC＝a，　CB＝b，　a+b＝10 としてそれぞれの長さを求めさせる。 弧AC+弧 $CB=1/2\,a\pi+1/2\,b\pi=1/2\,(a+b)\,\pi=5\pi$ （発問）「長さ同じに５πなることは，この式変形のどこから説明きるか」 （答え）(a+b) ＝10 だから	・原問題では書けなかった生徒をできるだけ指名し，達成感をもたせたい。 ・分数でつまずいている生徒には個人指導を行い，できるだけ全員に記述を完成させたい。 ・点の位置が変化しても半円の弧の長さの和が同じになることは，式の (3+7) ＝ (5+5) ＝ (4+6) ＝10 の部分から説明できることを理解させたい。 ・一般化をするときには，文字を使う必要があることを意識させたい。 ・πは定数なので厳格な数学的表記では π (a+b)，πa，πb と書くべきであるが， 上記の記述との関係で (a+b) π，aπ，bπ と書くことにした。 ・ $1/2\,a\pi+1/2\,b\pi=1/2\,(a+b)\,\pi$ の式変形を行うことで，長さの不変性が説明できることを理解させる。
展開3	●**線分AB上に１点（半円が２個）でなければ，どうなるかを考える。** ・原問題であげた属性を振り返り，(属性ｂ) の What-If-Not を考えさせる。 ・線分AB上に２点，３点とったときの関係を考える。 （発問）「点が１点でなければ。つまり２点，３点でも同じことがいえるか。」 問題 直径ABの半円と，線分ABに２点　C，Dをとり図のように半円をかくと 弧AB=弧AC＋弧CD＋弧DB が成り立つか。AC＝a，CD＝b，DB＝c とする。  ・できている生徒を指名し板書させる。 ABの長さ (a+b+c) より 弧 $AB=(a+b+c)\times\pi\times1/2$ $=1/2\,(a+b+c)\,\pi$ ・・・① 弧 $AC=a\times\pi\times1/2$，弧 $CD=b\times\pi\times1/2$ 弧 $DB=c\times\pi\times1/2$ 弧AC＋弧CD+弧 $DB=1/2a\pi+1/2b\pi+1/2c\pi$ $=1/2\,(a+b+c)\,\pi$ ・・・② ①,②より弧AB=弧AC＋弧CD+弧DB	・What-If-Not の（属性ｂ）についての第Ⅱ・Ⅲ・Ⅳ水準である。 ・問題と図が記載されているワークシートを配布する。 ・直径の長さの一般化をはかるために，この場合，a+b+c＝10 という数値は与えない。 ・模倣③;文字で置いた場合の記述方法を模倣させる。 ・手が止まっている生徒には，直径の長さを展開２と同じように文字で置き換えることを伝える。

	・線分 AB に３点　C, D, E をとった場合も同様に文字を使って計算し，文字式で説明させる。 AC＝a, CD＝b , DE＝ c , EB＝d として 弧 AB =1/2 (a+b+c+d) π…① 弧 AC＋弧 CD+弧 DE+弧 EB = 1/2aπ+ 1/2bπ+1/2cπ+1/2dπ = 1/2 (a+b+c+d) π…② ①, ②より弧 AB=弧 AC＋弧 CD+弧 DE+弧 EB  ・線分 AB をｎ分割した場合を考えさせる。 （発問）「線分 AB をｎ分割したときも同じことがいえるか。なぜそのようにいえるのか。」 ・生徒の予想を聞き，教師が板書する。 （答え）（a+b+c+d+…）と増えるだけなので同じことがいえる。	・式変形を行うことで, それぞれの長さを直径とする半円の弧の長さの和は，AB を直径とする半円の弧の長さと一致することが発見できる。 ・文字を使っての証明は行わないが，線分 AB 上に何点とっても，弧 AB に等しくなることを式変形の一般化から説明できることを理解させる。
まとめと発展	●本時のまとめをし，発展課題を与える。 ・線分 AB を直径とする半円について，線分 AB 上のどこに何点とって半円を作っても弧の和は変わらず，弧 AB に等しくなることを図を指しながらまとめる。 ・原問題であげた属性を振り返り，（属性ｃ）の What-If-Not を考えさせる。 （発問）「半円を正三角形や正方形に変えても，同じようなことがいえるか。」   	・時間短縮のため, 教師が口頭でまとめるだけにする。 ・ What-If-Not の（属性ｃ）についての第Ⅱ・Ⅲ・Ⅳ水準である。 ・図を提示しどのような問題になるかを問うが，解決は求めない。 ・問題と図が記載されているワークシートを配布し，興味をもった生徒への自主的課題とする。

4. 授業実践と学習指導の実際

⑴ 対象と実施時期

対象クラス：高知県公立中学校３年生 23 名
実施時期　：令和２年６月初旬

⑵ 授業の実際の状況

実際の授業は，上述の学習指導過程と大きく外れることはなかった。ただし，最後のまとめと発展の段階で三角形の場合については教師から図を示し，発展的な探究を促すことができたが，(〜c)$_2$. の正方形の場合については提示できなかった。

5. What-If-Not ストラテジーと Z.P.D. 理論の統合デザインの成果と課題

⑴ 発展的探究過程に模倣の場面を設定したことによる技能習得の教育効果

中学校数学においては，基礎的知識や基本的技能を習得させるときは次のような教育方法で行うのが一般的である。まず，教師が模範的な解法を板書して提示し，その後，教科書にある類似の練習問題を解くように指示し，生徒に教師の模範的な解法を模倣させて習熟を図る方法である。しかし，特に数学の苦手な生徒は，類似問題では積極的に模倣しようとする意欲をもたせられないことが多い。

本授業では，What-If-Not ストラテジーによって新しくつくった発展的問題に取り組ませたことで，生徒は意欲的に模倣を行った。原問題の解法さえ写して解答を作ろうともしなかった生徒も展開２の「中点でなければ」を考えるときには積極的に写すようになり，展開２の点Ｃの位置を一般化した場合は，具体的数値の場合を模倣しながら自ら記述を完成できるようになった。さらに，線分 AB 上の点を３点にした展開３の段階で，指名して記述を板書させた生徒は普段は数学がかなり苦手な生徒であった。このように，What-If-Not ストラテジーを活用した発展的授業展開過程に模倣の場面を設定したことにより，技能習得を効果的に行うことができた。

⑵ 模倣を発展的探究活動の過程に組織的に設定する意義

一般に数学では，基礎的知識や基本的技能に十分習熟できていなければ，応用問題や発展問題に取り組むことは難しく，数学が苦手な生徒を発展的な探究活動に参加させることは難しいと考えられている。実際に，探究的な授業を行うと，数学の苦手な生徒は，無気力になり授業にほとんど参加していないことが多い。

しかし本時は，数学が苦手な生徒も原問題の解法を模倣することで参加できる場面を設定できた。What-If-Not ストラテジーの水準Ⅰで属性を挙げる場面ではむしろ数学が苦手な生徒ほど「こぶが２つ」「２分している」「曲線だ」のような数学的に価値あるおもしろい属性を積極的に挙げてくれた。生徒が挙げた属性を「そうでなければ〜」(What-If-Not) と否定して新しい問題に取り組んだことで，苦手な生徒も積極的に模倣し，それによって技能を高めることができ，結果的には最後まで探究活動に参加させることができた。このように模倣を探究活動の過程に組織的に設定したことで，数学が苦手な生徒も含め，ほとんどの生徒が積極的に探究活動を行うことができた。このように探究的問題設定の学習指導過程において模倣が生徒の主体的活動を支えることが示され，模倣の教育的意義が実践的に示された。

⑶ 属性を選択することの必要性とその課題

本時の授業の展開１（What-If-Not 水準Ⅰ）で原問題の属性としては，３つの属性を取り上げた。しかし，実際は「長さでなければ（面積ならば）」「円ならば」「点Ｃが線分 AB 上になければ」なども考えられ，実際に想定していない属性が挙げられる可能性もある。しかし，第Ⅲ水準で学習目標や学習過程の構成からみて，指導上価値ある問題を設定しなければいけないので，挙げられた属性をすべて取り上げるわけにはいかない。特に模倣を設定しようとすると，解法が模倣する価値があり，模倣できるような問題を設定しなければいけない。したがって，どのような属性を取り上げるかを授業デザインするとき，事前に教材研究をするときの中心的な課題になる。また，あらかじめ属性の選択を決めておくことは，第Ⅰ水準で生徒に自由に属性を挙げさせることを制限してしまうことにも繋がりかねない。これが，What-If-Not ストラテジーを活用するときの課題であるといえる。

6. おわりに

授業後の感想から，線分 AB 上の点を動かしても複数の半円の弧の長さの和は弧 AB と等しくなることに驚いたという感想が多くあり，「点の数を増やし形を変えても式で説明できることが分かった」という意見も多くみられた。これは本授業によって，数学のおもしろさや中学校数学の重要な教育目的である『式変形で説明する』ことの意義を理解させることができたことを示していると考えられる。

また，問題づくりに対して消極的な意見は見られず，さらに，授業時間外に$(\sim c)_1$・$(\sim c)_2$の問題を解いてきた生徒もおり，問題づくりに対する興味関心を高めることができた。問題づくりを通して，数学の問題は教師から一方的に与えられるものではなく，自身でいろいろと変えていいのだと捉えさせることができたことは大きな成果であったと考えている。

しかし，この１つの実践だけの問題づくりの体験に終わらせては十分な教育効果は期待できない。複数の単元や異なる学年で授業デザインを行い実践していくことを今後の課題としたい。

引用・参考文献

柴田義松(2006).『ヴィゴツキー入門』，子どもの未来社

中村和夫(1998).『ヴィゴーツキーの発達論』，東京大学出版会

藤井斉亮 他(2016),『新編 新しい数学３』，東京書籍

Brown, S. I., & Walter. M. I. (1990). 平林一榮(監訳).『いかにして問題をつくるか－問題設定の技術－』，東洋館出版社

Brown, S. I. (1984). ”The Logic of Problem Generation:From Morality and Solving to De-Posing and Rebellion”, *for the Learning of Mathematics*, Vol. 4, no. 1, pp. 9-20.

Engestrom, Y. (1999). 山住勝広 他（訳).『拡張による学習』，新曜社

Lave, J., & Wenger, E. (1993). 佐伯胖(訳).『状況に詰め込まれた学習』，産業図書