

ボソン - フェルミオン混合多体系における ボーズ - アインシュタイン凝縮とボーズ崩壊に対する不安定性

白崎 恭子

平成 30 年 3 月

概要

一様なボソン-フェルミオン混合多体系において、ボソン-フェルミオン間およびボソン-ボソン間に相互作用がある場合にボーズ-アインシュタイン凝縮 (BEC) の転移温度が理想気体の場合と比べてどのように変化するか調べた。ただし、ボソンおよびフェルミオンはそれぞれ 1 種類、相互作用についてはボソン-フェルミオン間は引力、ボソン-ボソン間は斥力相互作用とし、フェルミオン-フェルミオン間の相互作用については考えない。また、フェルミオンループを介したボソン-ボソン間の有効相互作用が引力となることから、ボソン密度崩壊による系の不安定性についても調べた。本研究ではボソン-フェルミオン間相互作用の弱結合領域および極結合極限を考える。

1 序論

1924 年にボーズ-アインシュタイン凝縮 (BEC) が理論的に説明されて以来、磁気捕獲やレーザー冷却の技術の発展 [1] により、BEC が実験的に成功した。また、外部磁場によるフェッシュバハ共鳴を用いて原子間相互作用の大きさや符号を自由にセッティングできる他、ボーズ系、フェルミオン系、混合系といった系の統計性、トラップポテンシャルにより系の次元性 (1D, 2D, 3D) 等も実験的に自由に設定できるという特徴があり、実験と理論双方から興味を持たれている。

ここで系の統計性に関して、低温において、フェルミオンの場合にはパウリの排他律により 1 つの状態に 1 つの粒子しか入れないので、多体系では低いエネルギー準位から高い準位へと順に粒子が詰まっていき、フェルミ面を形成する (図 1.1)。一方ボソンの場合、1 つの状態に入れる粒子数に制限が無いので、低温では最低エネルギー準位に粒子が凝縮し、 $T = 0$ では全粒子が最低エネルギー準位を占める (BEC) (図 1.2)。

本研究では、フェルミ粒子多体系 (偏極した 1 成分とする) とボーズ粒子多体系の一様な混合系を扱い、ボソン-フェルミオン間に引力相互作用が有る場合の、相互作用変化にともなう状態変化の概要を述べる。ただし、ボソン-ボソン間の 2 体相互作用は弱い斥力、ボソン-フェルミオン間の 2 体相互作用は可変とし、フェルミオン-フェルミオン間相互作用は排他律より無視する。

ここで、今回考える系では、 $T \approx 0$ のとき、弱結合領域 (散乱長 $1/a_{BF} \rightarrow -\infty$) ではフェルミオンとの相互作用による散乱が小さいため、理想ボーズ気体と比べて転移温度に変化があるものの、依然として BEC 状態にあると期待できる [2-7]。しかし、引力相互作用を強くしていくと、ボソンとフェルミオンが 2 体の束縛状態を形成する。^{*1}この場合、束縛状態もフェルミオンであるので、この複合フェルミオンが新たにフェルミ面を形成すると予想できる。つまり、ボソンとフェルミオンの数が同じもしくはフェルミオンの数の方が多い場合、強結合極限 ($1/a_{BF} \rightarrow +\infty$) では BEC は起こらないと予想できる (図 1.3)。ここで、 a_{BF} はボソン-フェルミオン間の散乱長である。それぞれの場合において、ボソン-フェルミオン間の引力相互作用の強さによる

^{*1} フェルミオンと N 体ボソン ($N > 2$) の束縛系も可能であるが、十分希薄な気体であるとして、2 体相関以上は考慮しない。

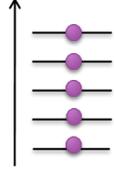


図 1.1: 理想フェルミ気体のふるまい.

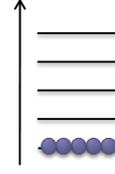


図 1.2: 理想ボーズ気体のふるまい.

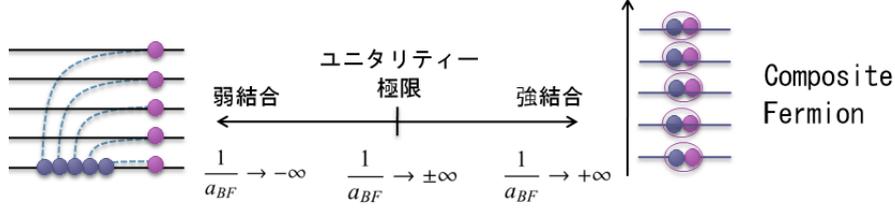


図 1.3: ボソン-フェルミオン間の引力相互作用の強さによる状態の変化.

BEC 転移温度の変化について調べた。また、今回扱う系ではフェルミオンを介したボソン-ボソン間有効相互作用は引力となり、ボソン密度崩壊により系が不安定になる。一様無限系ではトラップ系と異なりゼロ点振動が存在しないため、ボソン-ボソン間相互作用の符号に依らずフェルミオン分極（多体および量子効果）を媒体とした有効引力が生じる。この引力がももとの斥力と拮抗する場合、ボーズ系が自己密度崩壊に対して不安定になる [8–20]。崩壊後の状態は固体（結晶）になると予想されるので、本研究における希薄ガスに対する有効理論では記述できない。そこで、前述のように、系を安定化させるためにボソン-ボソン間に斥力相互作用を導入することとした。

このような系において、ボソン-フェルミオン間相互作用が弱い時に系が不安定になる温度および BEC が生じる温度の関係について調べ、ボソン-フェルミオン間の散乱長と温度の空間における相図としてまとめた [21]。また、強結合領域については、強結合極限における解析的な考察により BEC 転移温度を導いた。

2 モデル

本研究では、ハミルトニアン

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int b_{\vec{p}}^\dagger \frac{\hbar^2 \vec{p}^2}{2m_B} b_{\vec{p}} d^3 p + \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int a_{\vec{k}}^\dagger \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m_F} a_{\vec{k}} d^3 k \\
 & + \frac{1}{2} \frac{V^4}{(2\pi)^{12}} \int b_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}+\vec{k}}^\dagger \frac{g_{BF}}{(2\pi)^3} a_{\vec{k}} b_{\vec{p}} d^3 p d^3 p' d^3 k' + \frac{1}{2} \frac{V^4}{(2\pi)^{12}} \int b_{\vec{p}}^\dagger b_{\vec{p}'+\vec{p}''-\vec{p}}^\dagger \frac{g_{BB}}{(2\pi)^3} b_{\vec{p}'} b_{\vec{p}''} d^3 p d^3 p' d^3 p''
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

で表される系を考える。ただし、1 項目からそれぞれボソンの運動項、フェルミオンの運動項、ボソン-フェルミオン相互作用項、ボソン-ボソン相互作用項である。相互作用は温度が十分低く低エネルギー散乱が主であるとして、S 波散乱に対する擬ポテンシャルにおける平面波近似を用いる。ボソン-フェルミオン間およびボソン-ボソン間の結合定数はそれぞれ $g_{BF} = \frac{2\pi a_{BF}}{m_{BF}}$ 、 $g_{BB} = \frac{4\pi a_{BB}}{m_B}$ と表される。ただし、 $a_{BF} (< 0)$ はボソン-フェルミオン間相互作用の散乱長、 $a_{BB} (> 0)$ はボソン-ボソン間相互作用の散乱長、 m_{BF} は換算質量である。

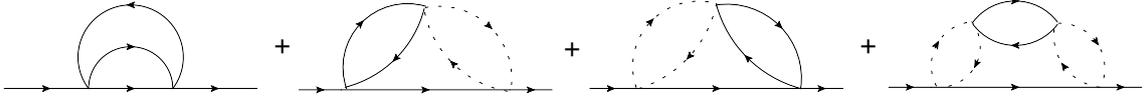


図 3.1: 主にボソンの自己エネルギーに寄与するダイアグラムのためのファインマン図.

3 BEC 転移温度の精密摂動計算

まず, BEC 転移温度を摂動的に求める方法について紹介する. 相互作用があるときのボソンの 1 粒子グリーン関数は一般に

$$G(\omega_n, k)^{-1} = \frac{k^2}{2m_B} + \Sigma(\omega_n, k) - \mu_B \quad (3.1)$$

であり, z は振動数, $\Sigma_B(\vec{k}, z)$ はボソンの自己エネルギーである. 今回扱うのは一様系であるため, 運動量ゼロで最低エネルギーであるとする, 化学ポテンシャルからの最低 1 粒子エネルギーが 0 になるとき, つまり $G_B(0, 0)^{-1} = 0$ のとき BEC が起こるので,

$$\Sigma_B(0, 0) - \mu_B = 0 \quad (3.2)$$

が条件となる [22]. これより, ボソンの自己エネルギーを求めることで相互作用がある場合の転移温度を求めることができる. 今回はボソンとフェルミオンの密度を固定した場合の転移温度を考えるので, 温度 T でのボソンの密度 n_B から始める.

$$n_B(T) = -T \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_n \int_k G(\omega_n, k) e^{i\epsilon\omega_n} \quad (3.3)$$

ただし, $\int_k \equiv \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$ とし, 以下この表記を使用する. 相互作用しているボソンと相互作用の無いボソンの臨界密度が等しく $n_B(T_C) = n_B^0(T_0)$ とすると, リーディングオーダーでは

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T_C}{T_0} &\simeq \frac{2T_0}{3n_B} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_k [G(0, k) - G^0(0, k)] e^{i\epsilon\omega_n} \\ &= \frac{4m_B T_0}{3n_B} \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi^2} \frac{2m_B (\Sigma(0, k) - \Sigma(0, 0))}{k^2 + 2m_B (\Sigma(0, k) - \Sigma(0, 0))} \end{aligned} \quad (3.4)$$

と書くことができる. ただし, $\Delta T_C = T_C - T_0$ は転移温度のシフトである. これより, ボソン-フェルミオン混合系の臨界点近傍において, ボソン自己エネルギー $\Sigma(0, k) - \Sigma(0, 0)$ の計算をする必要がある.

自己エネルギーに含まれる項として, 摂動の最低次 (一次) のオーダーから考える. この項はいわゆる Hartree 項 (自己無撞着でない) になり, 外線の運動量依存が無い定数なので, ボソンの化学ポテンシャルを $\mu_B - \Sigma_{HF} \rightarrow \mu_B$ のように再定義することで吸収することができる. 臨界点は $\mu_B - \Sigma_{HF} = 0$ で決められているので, 平均場近似では臨界温度の値に影響を与えない.

次にボソンバブル 1 つのダイアグラム (図 3.1 の 1 項目) を考える. 摂動論では, 理想気体の T_C 近傍, つまり $\mu_B = 0$ 近傍で計算すればよいので, 内線運動量の小さい領域が影響を与える. このダイアグラムは内線運動量ゼロの近傍でボソンバブル部が発散するため, 外線運動量ゼロ近傍で自己エネルギーは対数的に発散する. 一方フェルミ偏極によるボソン-フェルミオン結合からの低次の寄与 (図 3.1 の 1 項目をフェルミオンループにしたもの) を考えると, 内線運動量が小さい時フェルミオンバブル部による寄与は小さく, 自己エネ

ルギーに与える寄与もボソンバブルのものと比べ重要ではない。したがって、ボソンの自己エネルギーに主に寄与する項のみを挙げたダイアグラムは図 3.1 のようになり、以下の式で表される。

$$\begin{aligned}\Sigma^{eff}(0, k) &\simeq -2T \int_q B(q) \left\{ g_{BB}^2 - 2g_{BB}g_{BF}^2\Pi(q) + [g_{BF}^2\Pi(q)]^2 \right\} \frac{1}{\varepsilon_{q+k}} \\ &= -2T \int_q B(q) [g_{BB} - g_{BF}^2\Pi(q)]^2 \frac{1}{\varepsilon_{q+k}}\end{aligned}\quad (3.5)$$

鍵括弧の部分がボソン-ボソンの有効結合

$$g_{eff} \equiv g_{BB} - g_{BF}^2\Pi(q) \quad (3.6)$$

に該当し、 $\Pi(q)$ はフェルミ分極関数である。

$$\Pi(q) = \int_p \frac{f(\xi_{p+q}) - f(\xi_p)}{\xi_{p+q} - \xi_p} \quad (3.7)$$

自己エネルギー $\Sigma^{eff}(0, k)$ の小さい運動量 k に対する寄与はループ積分の低運動量領域による。運動量が臨界スケール k_c より小さい領域では、ボソンの 1 粒子エネルギーが修正されることを考慮し、パワーカウンティングを用いた書き換えを行うと、式 (3.4) の自己エネルギー部分の主要項は、

$$\Sigma(0, k)^{eff} - \Sigma(0, 0)^{eff} \simeq [g_{BB} - g_{BF}^2\Pi(0)]^2 \frac{16m_B T^2}{15\pi^3} \left(\frac{k}{k_c}\right)^{3/2} \quad (3.8)$$

$$k_c = \left[\frac{4\pi a_{BB}}{m_B} - \left(\frac{2\pi a_{BF}}{m_{BF}} \right)^2 \Pi(0) \right] \sqrt{\frac{2}{15\pi} \frac{4m_B^2 T}{\pi}} \quad (3.9)$$

となり、転移温度 T_C は次式から求めることができる。

$$\frac{\Delta T_C}{T_0} \simeq \frac{2m_B T_0}{9n_B \pi^2} k_c \quad (3.10)$$

この式について、低温で、低エネルギーのボソンは長波長による大きい量子揺らぎをもち、オーバーラップし始める。しかし、ボソン同士の斥力相互作用により互いに反発し、結果として低エネルギー領域で状態密度が減少する。これにより高温での低エネルギー状態の粒子の調和が容易になり、 T_C がシフトすると説明できる。

4 密度-密度相関と不安定性

次に、フェルミオン多体系と相互作用することによって生じるボソンセクターの密度崩壊不安定性について議論する。この不安定性はボソン-フェルミオン間相互作用が強くなるにつれて最初に長波長密度揺らぎに対して生じる。この臨界条件を得るため、ボソン密度とフェルミオン密度に関する熱的ポテンシャル Ω の 2 次の係数について調べる。

$$\mathbf{M} \equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial n_B^2} & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial n_B \partial n_F} \\ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial n_F \partial n_B} & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial n_F^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mu_B}{\partial n_B} & \frac{\partial \mu_B}{\partial n_F} \\ \frac{\partial \mu_F}{\partial n_B} & \frac{\partial \mu_F}{\partial n_F} \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

行列 \mathbf{M} の各成分は外線の運動量がゼロの密度-密度相関関数に反比例する。

$$\frac{\partial n_i}{\partial \mu_i} = \langle n_i n_j \rangle \quad \text{for } i, j = \text{B or F} \quad (4.2)$$

さらに、圧縮率は次のような関係をもつ。

$$\kappa^{-1} = -V \left. \frac{\partial P}{\partial V} \right|_T = \sum_{i,j} n_i n_j \frac{\partial \mu_i}{\partial n_j} \quad (4.3)$$

$\mathbf{M}_{BB} = 0$ もしくは $\text{DetM} = 0$ のとき圧縮率が発散し、系は不安定となる。密度-密度相関関数を計算するため、以下ではランダム位相近似 (RPA) を導入する。

密度-密度関数について、 $\langle n_B n_B \rangle$ (図 4.2), $\langle n_B n_F \rangle$ (図 4.3), $\langle n_F n_F \rangle$ (図 4.5) に対する Schwinger-Dyson 方程式を考える。ただし、ボソン 2 粒子の既約な相互作用部 (図 4.1) およびフェルミオン 2 粒子の既約な相互作用部 (図 4.4) に対し、次の式を用いる。

$$\begin{aligned} \Gamma_{BB}(\omega_l, k) &= g_{BB} - g_{BF}^2 \Pi(\omega_l, k) \\ \Gamma_{FF}(\omega_l, k) &= -g_{BF}^2 \frac{B(\omega_l, k)}{1 + g_{BB} B(\omega_l, k)} \end{aligned} \quad (4.4)$$

ここで、 $\Pi(\omega_l, k)$ は有限エネルギーの運動量を持つフェルミオン分極関数であり、

$$B(0, 0) = \frac{m_B}{2\pi^2} \int_0^\infty dp n(\varepsilon_p) \quad (4.5)$$

は 1 粒子ボソンバブル関数 $B(\omega_n, q) = \int_p \frac{n(\varepsilon_{p+q}) - n(\varepsilon_p)}{i\omega_n - \varepsilon_{p+q} + \varepsilon_p}$ の低エネルギー運動量リミットである。RPA の解はそれぞれ

$$\langle n_B n_B \rangle = \frac{B(0, 0)}{1 + \Gamma_{BB}(0, 0)B(0, 0)} \quad (4.6)$$

$$\langle n_B n_F \rangle = g_{BF} \Pi(0, 0) \langle n_B n_B \rangle \quad (4.7)$$

$$\langle n_F n_F \rangle = \frac{\Pi(0, 0)(1 + g_{BB} B(0, 0))}{1 + [g_{BB} - g_{BF}^2 \Pi(0, 0)]B(0, 0)} \quad (4.8)$$

$$\Gamma_{BB}(\omega_l, k) = \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2}$$

図 4.1: ボソン 2 粒子の既約な相互作用部 $\Gamma_{BB}(\omega_l, k)$ のダイアグラム。点線部がフェルミ分極関数 $\Pi(\omega_l, k)$ に対応する。

$$\langle n_B n_B \rangle = \text{Diagram 3} = \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5}$$

図 4.2: ボソン-ボソンの密度-密度相関関数のダイアグラム。実線のボソンループが $B(0, 0)$ に対応する。

$$\langle n_B n_F \rangle = \text{Diagram 6}$$

図 4.3: ボソン-フェルミオンの密度-密度相関関数のダイアグラム。

$$\Gamma_{FF}(\omega_l, k) = \text{Diagram 7} + \text{Diagram 8} + \dots + \text{Diagram 9}$$

図 4.4: フェルミオン 2 粒子の既約な相互作用部 Γ_{FF} のダイアグラム。ボソンバブルの無限和を含む。

$$\langle n_F n_F \rangle = \text{Diagram 10} = \text{Diagram 11} + \text{Diagram 12}$$

図 4.5: フェルミオン-フェルミオンの密度-密度相関関数のダイアグラム。

から得られる． $\langle n_i n_j \rangle$ は長波長極限での相関関数に相当するので，外部エネルギー運動量をゼロにする．式 (4.6)-式 (4.8) について，密度-密度相関関数は共通の分母を持つので，長波長の密度揺らぎに対する機械的な不安定性は

$$1 + g_{eff}(0)B(0,0) = 0 \quad (4.9)$$

の時生じる．ここで， g_{eff} は式 (3.6) のボソン間の有効静的ポテンシャルである．これより，系が不安定になる温度は

$$1 - \left(-\frac{4\pi a_{BB}}{m_B} \int_k \left[\frac{\frac{1}{T} \exp\left(\frac{1}{T} \left(\frac{k^2}{2m_B} - \mu_B\right)\right)}{\left(\exp\left(\frac{1}{T} \left(\frac{k^2}{2m_B} - \mu_B\right)\right) - 1\right)^2} \right] + \left[\frac{2\pi a_{BF}}{m_{BF}} \right]^2 \int_q \left[\frac{\frac{1}{T} \exp\left(\frac{1}{T} \left(\frac{q^2}{2m_F} - \mu_F\right)\right)}{\left(\exp\left(\frac{1}{T} \left(\frac{q^2}{2m_F} - \mu_F\right)\right) + 1\right)^2} \right] \right) = 0 \quad (4.10)$$

より求めることができる．

5 ボソンセクターの安定不安定領域の境界

前節の議論から，ボソン密度崩壊に対する安定領域と不安定領域の境界は，温度とボソン-フェルミオン間結合定数空間において有効ボソン-ボソン間相互作用が消えるところである．ボソン-ボソン間の有効相互作用がゼロとなる点は，

$$0 = \frac{4\pi a_{BB}}{m_B} - \frac{8\pi^2 a_{BF}^2 (m_F + m_B)^2}{m_F^2 m_B^2} \int_q \frac{n_q^F - n_{q+k}^F}{\frac{(q+k)^2}{2m_F} - \frac{q^2}{2m_F}} \quad (5.1)$$

より求められる．1項目がボソン-ボソン間の斥力相互作用項，2項目がボソン-フェルミオン間の引力相互作用項である．

密度一定， $1/a_{BB}n_B^{1/3} = 10$ ， $n_F/n_B = 2$ の場合の弱結合領域での BEC 転移温度 (実線)，系の不安定になる温度 (点の曲線)，ボソン-ボソン間有効相互作用の境界 (点の直線) を相図としてまとめたものが図 5.1 である．このグラフはボソン-ボソン間斥力相互作用の大きさ $1/a_{BB}n_B^{1/3}$ が大きいもしくはボソンとフェルミオンの密度比 n_F/n_B が大きい場合の方が，ボソン-フェルミオン間引力相互作用が大きくなる方向にシフトし，ボソン-フェルミオン間引力相互を大きくしたときでもより安定性を保てることが分かった．

6 ボソン-フェルミオン多体系の強結合極限

ここでは，ボソン-フェルミオン結合定数を大きくしたときも有効な定式化を行い，強結合極限での振る舞いを定性的に議論する．ここで強結合領域とは，ボソン-フェルミオン 2 体問題における束縛状態の閾値 (ユニタリ極限) 近傍およびさらに結合定数を強くした極限のことである．ボソン-フェルミオン間相互作用及びボソン-ボソン間相互作用を考慮すると，求める散乱振幅は図 6.1 にあるダイアグラムとなる．しかし，今回は強結合の極限に興味があるため，簡単のためボソン-ボソン間結合 (図 6.1 下段の 2 項目のダイアグラム) は摂動的で小さいとして無視することとした．このとき，低温近似および強結合近似を用いるとボソン-フェルミオンの散乱振幅は以下ようになる：

$$\Gamma_{BF}(p, n) \cong -\frac{2\pi}{m_{BF}^2 a_{BF}} \left[i\omega_n - \frac{k^2}{2(m_F + m_B)} + \mu_{CF} \right]^{-1} \quad (6.1)$$

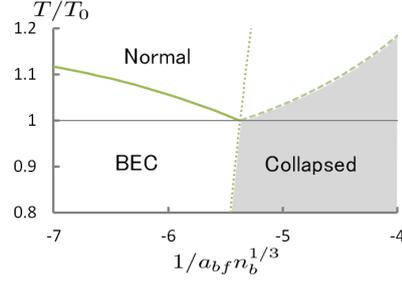


図 5.1: 密度一定, $1/a_{BB}n_B^{1/3} = 10$, $n_F/n_B = 2$ の場合のボソン-フェルミオン混合系の相図. 実線が BEC 転移温度, 点の曲線が系が密度崩壊する温度, 直線が有効ボソン-ボソン相互作用がゼロとなる境界である. 各相図の中央上部に有る「Normal」および左下の「BEC」の部分では系は安定しており, 右下の「Collapsed」の部分 (色がついている部分) では系は密度崩壊している.

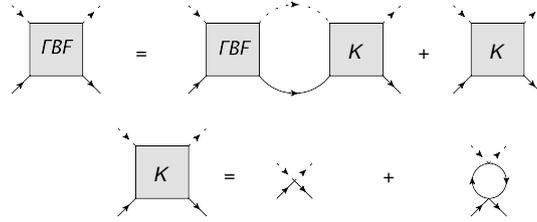


図 6.1: ボソン-フェルミオン間相互作用の散乱振幅. 実線がボソン, 点線がフェルミオンを示す. フェルミオンの足をつなげることでボソンの自己エネルギーのダイアグラムとなる.

鍵括弧はフェルミオンの伝搬関数の形になっていて, これは複合フェルミオンのそれである. また, 強結合のとき $\mu_F + \mu_B \rightarrow -B$ であり, ボソンとフェルミオンの化学ポテンシャルの和は 2 体系の束縛エネルギー $B = \frac{1}{2m_{BF}a_{BF}^3}$ に漸近する. 強結合極限においては, 以下のようにあらわされる:

$$\mu_{CF} \cong \mu_F + \mu_B + B \quad (6.2)$$

BEC 条件は弱結合領域とおなじであるが, ボソンの自己エネルギーは複合フェルミオンの伝搬関数を用いて書き下すことができる:

$$\begin{aligned} \Sigma_B(0, 0; \mu_B, \mu_F, T_C) &\cong -\frac{2\pi}{m_{BF}^2 a_{BF}} \sum_k G_F(p+k) G_{CF}(k) \Big|_{p=0} \\ &= \frac{2\pi}{m_{BF}^2 a_{BF}} \sum_k \frac{n_F(\bar{\xi}_k) - n_{CF}(\bar{\xi}_k)}{\bar{\xi}_k - \bar{\xi}_{CF,k}} \end{aligned} \quad (6.3)$$

ここで,

$$\bar{\xi}_{CF,k} = \frac{k^2}{2(m_F + m_B)} - \mu_{CF} \quad (6.4)$$

である.

BEC 条件式およびボソンとフェルミオン数密度を固定して, BEC 転移温度と化学ポテンシャルを数値計算すると図 6.2 のようになる. ここでは, $n_F = n_B$, $m_F = m_B$ とした. 図 6.2 からわかるように, 強結合極限で

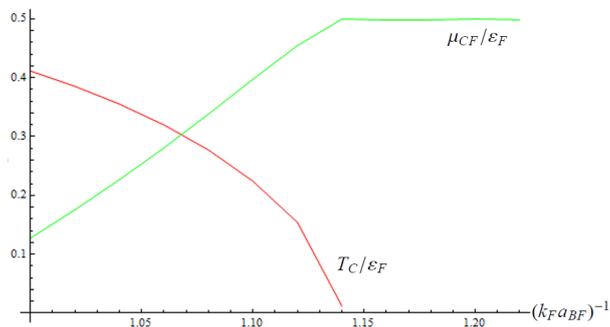


図 6.2: 強結合領域での相図. 右下がりのグラフが BEC 転移温度 T_C/ϵ_F を, 右上がりのグラフが複合フェルミオンの化学ポテンシャル μ_{CF}/ϵ_F の変化を示す.

は $n_F = n_B$ により, すべてのボソンとフェルミオンがペアの束縛状態を組み, それがもれなく複合フェルミオンになっている, という描像が成り立つ. これは, 先に述べたようにボソン-フェルミオンの 2 体相関のみを取り入れた結果である. この結果, 結合を強くするとこのようにすべてのボソンとフェルミオンがペアを組んだ時に, ボソンがすべてフェルミオンに吸い上げられてしまうので, BEC の転移温度がゼロになる. これは, 温度によらないので量子臨界点である. 今の設定では, $(k_F a_{BF})^{-1} = 1.14$ となる. $m_F = m_B$ より, また, ここでも複合フェルミオン間相互作用 (4 体相関) が無視されているので, 複合フェルミオンの化学ポテンシャルはフェルミエエネルギーの半分に漸近する.

7 まとめ

ボーズ粒子と偏極したフェルミオン 1 種類の一様な混合系において, ボソン-フェルミオン間の可変な引力相互作用がある場合の系の BEC 転移温度, 密度崩壊が生じる温度をボソン-フェルミオン間相互作用の散乱長の関数として調べた. このとき, 密度崩壊から系を安定化させるためにボソン-ボソン間の弱い斥力相互作用を考慮し, フェルミオン-フェルミオン間の相互作用は考えないこととした.

弱結合領域においては, 摂動論を用いた計算により BEC 転移温度の変化を調べ, ボソン-フェルミオン間の引力相互作用が強くなるにつれて BEC 転移温度が下がる結果となった (式 (3.10)). また, フェルミオン密度揺らぎを介したボソン-ボソン間相互作用が引力となることによる系の不安定については, 系が不安定になる温度を RPA を用いた計算により求め, ボソン-フェルミオン間の引力相互作用が強くなるにつれて高い温度でも系が不安定になることが分かった (式 (4.10)). さらに, ボソン-ボソン間の有効相互作用についても考慮し, BEC 転移温度の変化および系が不安定となる温度に加え, 有効相互作用が引力となる領域と斥力となる領域との境界線 (式 (5.1)) についても相図 (図 5.1) として示した.

ユニタリー極限近傍を除く強結合領域においては, 強結合近似および低温近似を用い, 簡単のためボソン-ボソン間の斥力相互作用は摂動的に小さいとして考慮しないこととした. 強結合極限ではボソン-フェルミオン間の引力相互作用が強くなるにつれて BEC 転移温度が下がり, 臨界点で BEC が生じなくなるという結果が得られた. (図 6.2) これは, 式 (6.1) にも見られるようにボソン-フェルミオンがペアとなった束縛フェルミオンが形成されることによると考えられる.

参考文献

- [1] See, for instance, L. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation* (Oxford University Press, Oxford, 2003).
- [2] G. Baym, J.-P. Blaizot, M. Holzmann, F. Laloë, and D. Vautherin, *Phys. Rev. Lett.* 83, 1703 (1999); *Eur. Phys. J. B* 24, 107 (2001); M. Holzmann, G. Baym, J.-P. Blaizot, and F. Laloë, *Phys. Rev. Lett.* 87, 120403(2001).
- [3] G. Baym, J.-P. Blaizot, and J. Zinn-Justin, *Europhys. Lett.* 49, 150 (2000).
- [4] M. Bijlsma and H. T. C. Stoof, *Phys. Rev. A* 54, 5085 (1996); N. Hasselmann, S. Ledowski, and P. Kopietz, *ibid.* 70, 063621(2004).
- [5] P. Arnold and G. Moore, *Phys. Rev. Lett.* 87, 120401 (2001); P. Arnold, G. Moore, and B. Tomášik, *Phys. Rev. A* 65, 013606 (2001); V. A. Kashurnikov, N.V. Prokof'ev, and B.V. Svistunov, *Phys. Rev. Lett.* 87, 120402 (2001); S. Pilati, S. Giorgini, and N. Prokof'ev, *ibid.* 100, 140405 (2008).
- [6] S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, *Phys. Rev. A* 54, R4633(R) (1996); M. Houbiers, H. T. C. Stoof, and E. A. Cornell, *ibid.* 56, 2041 (1997); P. Arnold and B. Tomášik, *ibid.* 64, 053609 (2001).
- [7] S. Grossmann and M. Holthaus, *Z. Naturforsch A* 50, 921 (1995); *Phys. Lett. A* 208, 188 (1995); W. Ketterle and N. J. van Druten, *Phys. Rev. A* 54, 656 (1996); K. Kirsten and D. J. Toms, *ibid.* 54, 4188 (1996).
- [8] H. T. C. Stoof, *Phys. Rev. A* 49, 3824 (1994).
- [9] C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett, and R. G. Hulet, *Phys. Rev. Lett.* 75, 1687 (1995); J. M. Gerton, D. Strekalov, I. Prodan, and R. G. Hulet, *Nature (London)* 408, 692 (2000).
- [10] E. A. Donley, N. R. Claussen, S. L. Cornish, J. L. Roberts, E. A. Cornell, and C. E. Wieman, *Nature (London)* 412, 295 (2001).
- [11] G. Baym and C. J. Pethick, *Phys. Rev. Lett.* 76, 6 (1996).
- [12] M. Houbiers and H. T. C. Stoof, *Phys. Rev. A* 54, 5055 (1996).
- [13] E. J. Mueller and G. Baym, *Phys. Rev. A* 62, 053605 (2000).
- [14] S. I. Koh, *Phys. Rev. B* 64, 134529 (2001); *ibid.* 65, 019901(E) (2001); *Phys. Rev. E* 72, 016104 (2005).
- [15] T. Tsurumi and M. Wadati, *J. Phys. Soc. Jpn.* 69, 97 (2000).
- [16] P. Capuzzi, A. Minguzzi, and M. P. Tosi, *Phys. Rev. A* 68, 033605 (2003).
- [17] R. Roth and H. Feldmeier, *Phys. Rev. A* 65, 021603(R) (2002).
- [18] See, for instance, A. L. Fetter and J. Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems* (Dover, New York, 1960).
- [19] A. P. Albus, S. Giorgini, F. Illuminati, and L. Viverit, *J. Phys. B* 35, L511 (2002).
- [20] H. Hu and X.-J. Liu, *Phys. Rev. A* 68, 023608 (2003).
- [21] K. Shirasaki, E. Nakano, and H. Yabu, *Phys. Rev. A* 90, 063629-1(2014).
- [22] D. J. Thouless, *Ann. Phys. (NY)* 10, 553 (1960); A. Z. Patashinskii and V. L. Pokrovskii, *Fluctuation theory of phase transitions* (Pergamon, Oxford, 1979).