双対超伝導描像に基づくクォーク閉じ込め機構の研究

関口　昂臣 [1]

[1] 高知大学大学院　総合人間自然科学研究科　応用自然科学専攻

b11d6a04@s.kochi-u.ac.jp

概要

クォークの閉じ込め現象を説明する描像の一つである双対超伝導描像では、magnetic monopole の自由度が閉じ込めに関して重要な自由度ではあるが、有限温度 SU(2) ゲージ理論の非閉じ込め相において、spatial string tension への Abelian 場および monopole（磁気単極子）からの寄与を、ゲージ固定条件を課さずに格子体積を $24^3 \times N_t (N_t = 24, 8, 6, 4, 2)$ と変化させ、Non-Abelian からの spatial string tension と Abelian からの spatial string tension について測定したところ、いずれの N_t でも Abelian spatial string tension は Non-Abelian spatial string tension と誤差の範囲内で一致した（Abelian dominance）。

また force を測定することにより、spatial string tension に対する monopole からの寄与も、Non-Abelian spatial string tension と一致する傾向が見られた。得られた spatial string tension の温度依存性を見ることにより、Non-Abelian、Abelian ともに $T \geq 2T_c$ で dimensional reduction の考え方が有効であることが確認された。またスケーリングパラメーターも Abelian からの spatial string tension は誤差の範囲内で Non-Abelian からの spatial string tension と一致している。

はじめに

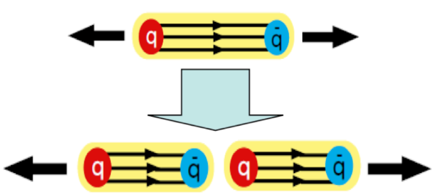

Fig. 1: クォーク閉じ込め現象のイメージ。

現代の物理学において、最も基本的な物質の構成粒子とされているクォークや、同じく素粒子であるグルーオンに働く強い相互作用は量子色力学 (QCD) によって記述される。強い相互作用の第一原理とされる QCD にも、解決すべき重要な問題が存在する。その問題の 1 つがクォークの閉じ込め機構 (Fig. 1) を説明することである。クォークの閉じ込め現象とは、クォークを単体で取り出そうとしても、クォークの複合粒子であるハドロンでしか観測されず、クォークを単体で観測することができない現象である。

このクォークの閉じ込め現象に対し、解決の手がかりとして、直感的な理解を与える双対超伝導状態における双対 Meissner 効果が期待されている [1][2]。双対 Meissner 効果は、通常の超伝導状態における Meissner 効果からの類推で、monopole が QCD 真空に凝縮することでクォーク間のカラー電束が紐状に絞られ、クォークを引き離し単独の粒子として観測しようとすると紐の長さに比例したエネルギーを与えなければならず無限のエネルギーが必要になりクォークが閉じ込められるという説明を与える。

QCD において magnetic monopole の自由度を直接的に同定することはできない。しかし、これに対しては't Hooft が考案した Abelian 射影と呼ばれる方法によって、SU(3) ゲージ理論を、部分的にゲージ固定することにより U(1)×U(1) の理論とすることで、magnetic monopole の自由度を導くことができる [3]。

また QCD の持つ大きな特徴として、漸近的自由性という性質をもつ。この性質により、高エネルギー領域では弱結合性を示すが、低エネルギー領域では、強結合性を示すため、高エネルギー領域で有効だった摂動計算を用いた解析が困難になっている。クォークの閉じ込め現象も低エネルギー領域で現れる非摂動的な現象の一つであり、その解析にも非摂動的な方法が要求される。その非摂動的な取り扱いとして有効な方法が、Monte Carlo 法を用いた格子 QCD による数値計算である。格子 QCD とは発散を除去するように空間を格

子化し、強い相互作用の第一原理であるQCDから数値的に計算する方法である。

これまでにこの格子QCDと双対超伝導描像を基にクォークの閉じ込めに関する多くの研究が行われており、特に部分的なゲージ固定にMaximally Abelian (MA) gaugeを用い、DeGrandやToussaintによって格子上で定義されたAbelian monopoleを使った計算では[4]、双対超伝導描像を支持するような結果が得られている[5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]。

カラーの閉じ込め現象は、カラー電荷間の距離を離したときにWilson loopが面積則に従って振る舞うこと、つまりカラー電荷間のポテンシャルが線形となる現象と捉えることができる。そのため、ポテンシャルの線形項の係数であるstring tensionは、閉じ込めを特徴付ける重要な量と考えられる。有限温度系においてstring tensionは温度上昇に伴い小さくなり、相転移温度を境に0となって、系は閉じ込め相から非閉じ込め相へと転移する。一方、非閉じ込め相とされる相転移温度以上の領域においても、spatial string tensionと呼ばれる量がゼロでない有限の値として残ることが確認されている[13]。このspatial string tensionは空間方向のみで張られたspace-like Wilson loopが面積則を満たすことで得られる。空間方向のみで張られたNon-Abelian space-like Wilson loopは次のように定義される。

$$W_{NA}(R,R') = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\prod_{s,\mu\in C} U_\mu(s) \tag{1}$$

Wilson loopの期待値とpseudo potential $V_{sp}(R)$の関係は式(2)のように表され、pseudo potential $V_{sp}(R)$が式(3)を満足すると仮定し、最小2乗法を用いたフィッティングによりspatial string tension σ_{sp}を求めた。

$$V_{sp}(R) = \lim_{R'\to\infty} \log\frac{\langle W(R,R')\rangle}{\langle W(R,R'+1)\rangle} \tag{2}$$

$$V_{sp}(R) = \sigma_{sp}R - C/R + V_0 \tag{3}$$

ここでσ_{sp}がspatial string tension、CはCoulomb係数、V_0は定数項である。

Abelianゲージ場のlink変数$u_\mu(s)$はSU(2)ゲージ場のNon-Abelianのlink変数から次のように分離できる。

$$U_\mu(s) = c_\mu(s)u_\mu(s) \tag{4}$$

$$c_\mu(s) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-|c_\mu(s)|^2} & -c_\mu^\dagger(s) \\ c_\mu(s) & \sqrt{1-|c_\mu(s)|^2} \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$u_\mu(s) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{i\theta_\mu(x)} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-i\theta_\mu(s)} \end{pmatrix} \tag{6}$$

ここで$\theta_\mu(s)$はAbelianゲージ場である。

通常のstring tension σであれば、空間方向N_{sp}と時間方向N_tのlink変数から、Wilson loopを定義し、Wilson loopから求めたポテンシャル$V(R)$の線形項として得られるが、spatial string tension $\sigma_{sp}(R)$は空間方向N_{sp}空間方向N_{sp}に広がったWilson loopからpsuedo potential $V_{sp}(R)$の線形項として得られる。Non-AbelianのWilosn loop W_{NA}とAbelianのWilosn loop W_Aはそれぞれのlink変数を用いて次のように定義される。

$$W_{NA} = \mathrm{Tr}\prod_{s,\mu\in C} U_\mu(s) \tag{7}$$

$$W_A = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\prod_{s,\mu\in C} \theta_\mu(s) \tag{8}$$

また、次のようにして、Abelinan link変数からspatial string tensionへの寄与、さらにはmonopoleとphotonからの寄与を考えることができる。まず、Abelian space-like Wilson loopはAbelian link変数を用いて次のように定義される。なおゲージ固定をしないためカラーの各方向は対等であり、どの方向を選んでも同じなので、以下ではカラーの添字を省略する。

$$W_A = \exp\left\{ i\sum_s J_\mu(s)\theta_\mu(s)\right\} \tag{9}$$

ここで$J_\mu(s)$はspace-like Wilson loopに沿って±1の値をとるexternal currentである。$J_\mu(s)$は保存するので、space-like Wilson loopを境界とする面上で±1を取る反対称テンソル$M_{\mu\nu}(s)$を用いて、$J_\nu(s) = \partial'_\mu M_{\mu\nu}(s)$と書くことができる。よって、

$$W_A = \exp\left\{ -\frac{i}{2}\sum_s \Theta_{\mu\nu}M_{\mu\nu}(s)\right\} \tag{10}$$

が得られる。さらに、Abelian space-like Wilson loopは次のように分離することができる。

$$W_A = W_M \cdot W_P \tag{11}$$

$$W_M = \exp\left\{ 2\pi i\sum_{s,s'} k_\beta(s)D(s-s')\frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\rho\sigma}\partial_\alpha M_{\rho\sigma}(s')\right\} \tag{12}$$

$$W_P = \exp\left\{ -i\sum_{s,s'} \partial'_\mu\bar{\Theta}_{\mu\nu}(s)D(s-s')j_\nu(s')\right\} \tag{13}$$

このAbelian Wilson loopからの分離がAbelian Wilson loopからの期待値からでも、$\langle W_a\rangle = \langle W_p\rangle\langle W_m\rangle$が成り立つかは自明ではないので、Abelian Wilson loop、monopoleからの寄与、photonからの寄与をそれぞれMonte Carlo simulationによって測定する。

数値計算

ゼロ温度および有限温度における非閉じ込め相である温度領域での温度依存性を調べるため、Wilson 作用を用いて $\beta = 2.74$、格子サイズは $24^3 \times N_t (N_t = \{24, 8, 6, 4, 2\})$ について SU(2) 格子ゲージ理論の Monte Carlo simulation を行った。また誤差軽減のためこれらの Non-Abelian の link 変数に対し、link integration[14, 15]、APE smearing[16]、ランダムゲージ変換 [17] を適用している。simulation に用いたパラメータの詳細は Table 1 に記載する。

Table 1: 各格子サイズでの simulation パラメータ、N_{smea} は、smearing の更新回数、α は smearing の適当なパラメータ、N_{conf} は統計数。N_{rgt} はランダムゲージ変換の回数。

lattice size	N_{smea}	α	N_{conf}	N_{rgt}
$24^3 \times 2$	10	0.3	150000	5000
$24^3 \times 4$	30	0.3	45000	5000
$24^3 \times 6$	40	0.3	65000	5000
$24^3 \times 8$	60	0.4	48000	5000
$24^3 \times 8$	50	0.4	6400	5000

数値計算によって得られた Non-Abelian pseudo potential および Abelian pseudo potential を Fig. 2 に示す。

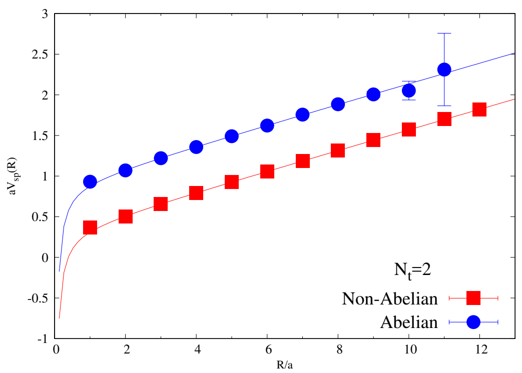

Fig. 2: $N_t = 2$ の場合の Non-Abelian pseudo potential と Abelian pseudo potential の R/a 依存性。line は best fitting curve を表している。

Fig. 3 は、$N_t = 2$ における Non-Abelian pseudo potential と Abelian pseudo potential とフィッティングによって決めたパラメータを使った関数をプロットをしたものでそれぞれの計算結果をうまく再現し、線形型のポテンシャルを形成していることが確認できる。また、ここで示したのは $N_t = 2$ の場合のみであるが、他の格子サイズ $(N_t = 24, 8, 6, 4)$ でも、同様のことを確認している。各 pseudo potential を最小 2 乗法によって式 (3) でフィットして得られた Non-Abelian spatial string tension のフィッティングパラメータを Table 2 に、Abelian spatial string tension のフィッティングパラメータを Table 3 に記載する。

Table 2: Non-Abelian pseudo potential のフィッティングパラメータ。

Nt	R'	$\sigma_{sp}^{NA}(R)$	fit range	$\chi^2/n.d.f$
24	5	0.0083(1)	4-8	0.0293
8	3	0.0148(1)	4-7	0.8350
6	3	0.0230(2)	4-7	0.9110
4	2	0.0427(1)	4-9	1.0787
2	3	0.1257(1)	2-9	0.9661

Table 3: Abelian pseudo potential のフィッティングパラメータ。

Nt	R'	$\sigma_{sp}^{A}(R)$	fit range	$\chi^2/n.d.f$
24	4	0.0082(15)	4-8	0.1058
8	2	0.0145(3)	4-8	0.6944
6	3	0.0238(13)	4-10	1.0591
4	2	0.0433(8)	4-10	1.0240
2	2	0.1260(2)	2-8	0.9966

Table 2、Table 3 より、Non-Abelian spatial string tension と Abelian spatial string tension は誤差の範囲内で一致し、Table 4 に記載するようにどの格子サイズ（温度）においても、σ_{sp}^{A} と σ_{sp}^{NA} の比は $\sigma_{sp}^{A}/\sigma_{sp}^{NA} \approx 1$ を示している。この結果は、ゲージ固定を行わない場合にも、spatial string tension に対する Abelian dominance が成立していることを表している。

Table 4: σ_{sp}^{A} と σ_{sp}^{NA} の比。

lattice size	T/T_c	$\sigma_{sp}^{A}/\sigma_{sp}^{NA}$
$24^3 \times 24$	0	0.99(18)
$24^3 \times 8$	2	1.02(2)
$24^3 \times 6$	2.67	0.97(2)
$24^3 \times 4$	4	0.97(5)
$24^3 \times 2$	8	1.00(2)

spatial string tension に対する monopole からの寄与については、線形型のポテンシャルになっている様子は見てとれるが、R/a の大きなところでの誤差が大きく、フィッティングによって精度よく spatial string tension を得られてはいない。また photon pseudo potential

には有意な spatial string tension は含まれず、線形ポテンシャルになっていないことが確認している。

force による解析

フィッティングによる解析にはフィッティング関数に依存する部分が含まれる。そのため、フィッティングに含まれる依存性とは関与しない量で Abelian dominance や monopole dominance を確認することも重要である。そこで次の force と呼ばれる量を導入する。force は連続極限では、pseudo potential の一階微分で表されるので、pseudo potential の線形項の係数である spatial string tension が定数項として現れ、残りの項は $1/R^2$ を含むため、R の大きいところではその項の効果は小さくなる。格子上では、微分は差分として表されるので、格子上の force は次のように定義される。

$$F_{sp}(R) = \frac{1}{a}(V_{sp}(R) - V_{sp}(R-a)) \qquad (14)$$

ここで、V_{sp} は、pseudo potential で、V_{sp}^{NA}、V_{sp}^{A}、V_{sp}^{M} を用いて、それぞれの温度について Non-Abelian force、Abelian force、monopole force を測定した。次に force による解析結果を Fig. 3 に示す。

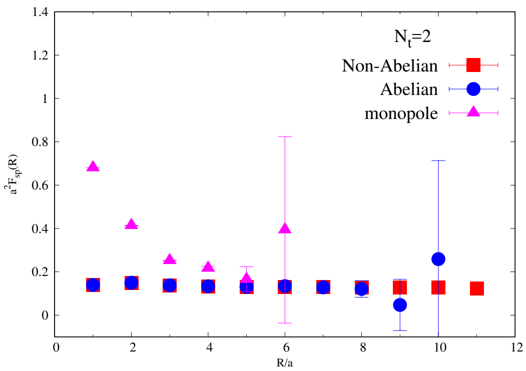

Fig. 3: $N_t = 2$ の場合における Non-Abelian、Abelian、monopole からの force。

Fig. 3 は $N_t = 2$ における Non-Abelian、Abelian、monopole からの force を plot したもので Abelian force は R の大きい領域でも、Non-Abelian force とよく一致し、Non-Abelian force に対する Abelian dominance が確認できる。さらに monopole force も R の大きい領域で誤差は大きくなるものの、その範囲内で一致していく様子は見ることができ、この様子いずれの格子サイズ ($N_t = 24, 8, 6, 4$) でも確認している。これは閉じ込め相および非閉じ込め相の両相において Non-Abelian force に対する monopole dominance が成立していることを十分に示している。

温度依存性について

次に、spatial string tension の温度依存性を見ていく。高温領域における spatial string tension の振る舞いは、dimensional reduction による 3 次元有効理論からの類推により、次のような温度依存性をもつと予想されている [18, 19, 20, 21]。

$$\sqrt{\sigma_{sp}} = cg^2(T)T \qquad (15)$$

ここで c は定数、$g(T)$ は 2-loop 摂動計算によって得られる温度 T に依存した 4 次元の running coupling constant である。

pseudo potential をフィットすることにより得られた Table 2、Table 3 の結果を用いて、spatial string tension の温度依存性を示したのが Fig. 4 である。Fig. 4 では縦軸に $T/\sigma_{sp}^{1/2}(T)$、横軸に T/T_c を表している。

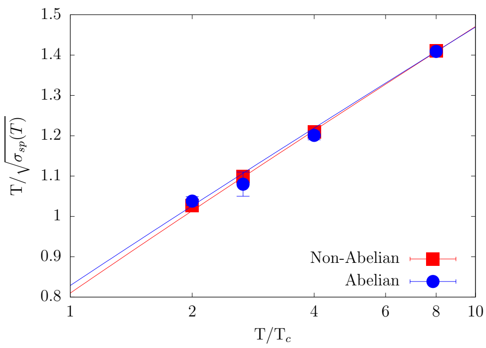

Fig. 4: Non-Abelian spatial string tension と Abelian spatial string tension の温度依存性。

spatial string tension の温度依存性が式 (15) を満たすと仮定して、フィットにより得られた結果を Table 5 に記載する。

Table 5: 式 (15) を用いたフィッティングの結果。

	c	Λ_T/T_c
Non-Abelian	0.362(7)	0.083(8)
Abelian	0.371(13)	0.073(13)

Table 5 より、Non-Abelian spatial string tension と Abelian spatial sting tension のフィッティングパラメータ c、Λ_T は誤差の範囲内で一致していることが読み取れる。つまり、Non-Abelian spatial string tension と同様に、Abelian spatial string tension も温度依存性を持ち、その温度依存性は $T \geq 2T_c$ で式 (15) で記述できることを表している。

格子間隔依存性について

これまでの数値計算で用いたのは $\beta = 2.74$ の一点のみである。得られた結果に格子間隔

について依存性がないことを検証する必要がある。その方法として reweighting 法 [22] を $\beta = 2.74$ のデータに対し適用した。各格子サイズ $24^3 \times 24, 8, 6, 4, 2$ のそれぞれについて、β を 0.01 刻みで 2.75-2.79 まで変化させ、Non-Abelian と Abelian の pseudo potential と spatial string tension を調べた。Fig. 5 は β、つまり格子間隔を変化させた時の spatial string tension の温度依存性を表している。各 β における格子間隔については格子上で決められた非摂動的な β 関数 [23] により評価した。Non-Abelian,Abelian,monopole からの force を Fig. 6 に示す。

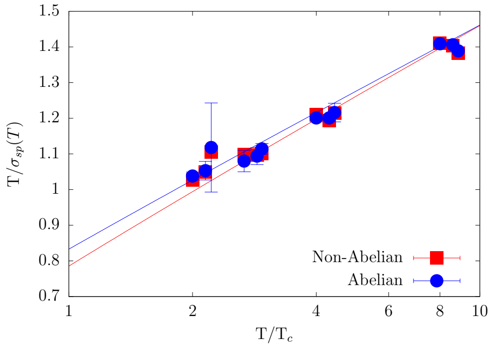

Fig. 5: reweighting 法を用いて計算した Non-Abelian spatial string tension と Abelian spatial string tension の温度依存性。

spatial string tension の温度依存性が式 (15) を満たすと仮定して、フィットにより得られた結果を Table 5 に記載する。

Table 6: 式 (15) を用いたフィッティングの結果。

	c	Λ_T/T_c
Non-Abelian	0.357(18)	0.094(20)
Abelian	0.367(25)	0.079(27)

得られた結果より、Non-Abelian と Abelian の spatial string tension から得られた c、Λ_T ともに誤差の範囲で一致しており、$T \geq 2T_c$ の範囲で同じ温度依存性を持つことがわかる。つまり、格子間隔に依存せずに、高温相の spatial string tension に関して Abelian dominance が成立している。

次に reweighting 法を用いた force の評価について。前節まで同様に、force に対する monopole のデータには誤差が大きく、またそれに reweightng による誤差も重なるため $\beta = 2.77$ よりも大きな β では force を評価することができなかった。そのため、得られた β の中で一番大きな $\beta = 2.76$ のデータを Fig. 6 に示す。

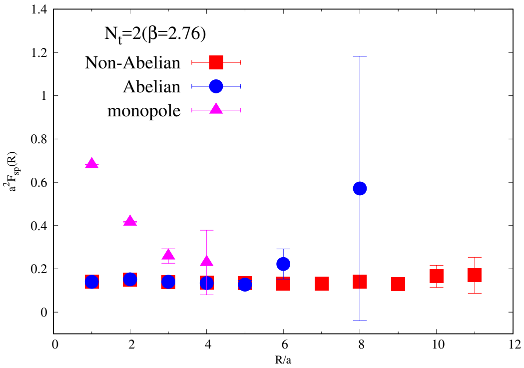

Fig. 6: $N_t = 2$ の場合の $\beta = 2.76$ における Non-Abelian,Abelian,monopole からの force。

得られたデータの誤差は大きいものの、いずれの場合も R の大きな領域では Non-Abelian, Abelian, monopole の force が一致する傾向が見られる。これは非閉じ込め相における spatial string tension について、格子間隔に依存することなく monopole dominance が成立していることを意味している。

まとめ

有限温度 SU(2) ゲージ理論における非摂動的な量の一つである spatial string tension に注目し、それに対する Abelian や monopole からの寄与をゲージ固定条件を課さずに調査した。測定は、Wilson 作用、$\beta = 2.74$、格子サイズ $24^3 \times N_t(N_t = 24, 8, 6, 4, 2)$ を用いた Monte Carlo simulation により実行した。ゲージ不変な量である Non-Abelian spatial string tension は、以前に Bali らによって調べられており、今回用いたパラメータで、spatial string tension の体積依存性や格子間隔依存性がないことは確認されている [18]。

spatial string tension に対する Abelian や monopole からの寄与についても格子間隔依存性を調べるため、reweighting 法を用いて $\beta = 2.75$-2.79 の範囲で spatial string tension および force を測定した。得られた結果は、全てのパラメータ領域において、Abelian spatial sting tension は Non-Abelian spatial string tension の値をよく再現し、格子間隔の依存性なく、Abelian dominance が成立していることを確認した。また、monopole の spatial string tension への寄与については、今回の計算では精度が十分ではなくフィッティングにより値を得ることができなかったが、force を測定することにより、R の大きいところで Non-Abelian force と monopole force が一致する様子を見ることが出来た。これは spatial string tension に対して、monopole からの寄与が重要な役割を果たしていることを表している。

さらに、spatial string tension の温度依存性を調べることにより、Non-Abelian および Abelian ともに $T \geq 2T_c$ の領域で dimensional reduction による 3 次元有効理論から予想される振る舞いと一致していること確認された。いずれの結果も、これまでは MA gauge 固定条件を課した場合にのみ確かめられており、ゲージ固定条件を課さずに Abelian や monopole の寄与を測定したのは今回が初めてのことである。今回得られた結果は、ゲージ固定条件によらず magnetic monopole が非閉じ込め相においても非摂動効果を担っている可能性を示唆している。そのため、非閉じ込め相とされるクォーク・グルーオンプラズマで現れる他の非摂動的な量についても、monopole の寄与を調べることで新たに開拓される可能性を持つ。ここに記載されている内容は、文献 [24] で示している。

References

[1] G. 't Hooft, in *Proceedings of the EPS International*, edited by A. Zichichi, p. 1225, (1976).

[2] S. Mandelstam, *Phys. Rept.* **23**, 245 (1976).

[3] G. 'tHooft, *Nucl. Phys.* **B190**, 455 (1981).

[4] T. A. DeGrand and D. Toussaint, *Phys. Rev.* **D22**, 2478 (1980).

[5] T. Suzuki, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **30**, 176 (1993).

[6] V. Singh, D. A. Browne, and R. W. Haymaker, *Phys. Lett.* **B306**, 115 (1993).

[7] S. Ejiri, S. Kitahara, T. Suzuki, and K. Yasuta, *Phys. Lett.* **B400**, 163 (1997).

[8] M. N. Chernodub and M. I. Polikarpov, *In *Cambridge 1997, Confinement, duality, and nonperturbative aspects of QCD**, 387 (1997), hep-th/9710205.

[9] G. S. Bali, C. Schlichter, and K. Schilling, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **131**, 645 (1998).

[10] T. Suzuki, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **131**, 633 (1998).

[11] Y. Koma, M. Koma, E.-M. Ilgenfritz, T. Suzuki, and M. I. Polikarpov, *Phys. Rev.* **D68**, 094018 (2003).

[12] Y. Koma, M. Koma, E.-M. Ilgenfritz, and T. Suzuki, *Phys. Rev.* **D68**, 114504 (2003).

[13] S. Ejiri, *Phys. Lett.* **B376**, 163 (1996).

[14] G. Parisi, R. Petronzio, and F. Rapuano, *Phys. Lett.* **128B**, 418 (1983).

[15] G. S. Bali, K. Schilling, and Ch. Schlichter, *Phys. Rev.* **D51**, 5165 (1995).

[16] APE Collaboration: M. Albanese et al., *Phys. Lett.* **B192**, 163 (1987).

[17] T. Suzuki, K. Ishiguro, Y. Koma, and T. Sekido, *Phys.Rev.* **D77**, 034502 (2008).

[18] G. S. Bali, J. Fingberg, U. M. Heller, F. Karsch, and K. Schilling, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3059 (1993).

[19] G. S. Bali, J. Fingberg, U. M. Heller, F. Karsch, and K. Schilling, *Int. J. Mod. Phys.* **C4**. 1179 (1993).

[20] F. Karsch, E. Laermann, and M. Lütgemeier, *Phys. Lett.* **B346**, 94 (1995).

[21] G. Boyd, J. Engels, F. Karsch, E. Laermann, C. Legeland, M. Luetgemeier, and B. Petersson, *Nucl. Phys.* **B469**, 419 (1996).

[22] A. M. Ferrenberg and R. H. Swendsen, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 2635 (1988).

[23] J. Engels, F. Karsch and K. Redlich, *Nucl. Phys.* **B435**, 295 (1995).

[24] T. Sekiguchi, K. Ishiguro, *Int. J. Mod. Phys.* A **31**, 1650149(2016)