

## 論 文

# 全反射型導波路内部を伝搬する電磁場の量子論的解析

Quantum analysis of electromagnetic fields propagating in a step-index waveguide

橋口 英典 (高知大学教育学部)

北川 晃 (高知大学教育学部)

Hidenori HASHIGUCHI and Akira KITAGAWA

*Faculty of Education, Kochi University*

## ABSTRACT

We study the property of propagating electromagnetic fields of TE modes in a step-index slab waveguide from the perspective of quantum optics. Amplitudes of electromagnetic fields are described with creation and annihilation operators of photon in this scheme. We numerically study waveforms of electromagnetic fields when electromagnetic fields are in the coherent state, squeezed state and photon-number state. Cases of squeezed state and photon-number state are quite different from situation of classical waveguide optics, while the representation in the coherent state case is reduced to the description in classical waveguide optics. When the mean photon number is less than unity, in particular, the spatial distribution function is related to existence probability of photon in each position on a cross section. To analyze the evolution of waveform along the propagating direction, we use the beam propagation method that is originally developed in classical waveguide optics and also applicable in the present scheme. We also study a quantum description of transition of electromagnetic fields between two waveguides closely laid in parallel and we show that electromagnetic fields move between two waveguides according to the propagating distance. By turning off the interaction between two waveguides at a certain distance, we obtain a -3dB beam coupler/splitter that combines/splits the electromagnetic fields at the ratio of 50:50. When a photon is input to each waveguide, in particular, total two photons are localized in one waveguide. This localization is due to quantum interference between two optical fields of the single photon.

## 1 はじめに

現在では光を信号とした通信技術が広く実用化されている。光は古くから知られた物理的な対象であり、幾何光学を用いて記述されてきた。19世紀にマクスウェルが電磁波の存在を理論的に予言し、ヘルツがその存在を実験的に実証したが、これにより光は電磁場が振動しながら伝搬する現象であることが明らかになった（光は、狭義には可視光線を意味するが、本稿では紫外および赤外の波長も含む電磁波と同義として扱う）。それ以降、光は波動光学による記述が整理されてきた。

光通信技術で用いられる光導波路内部を進行する電磁場の様子を記述する導波光学も波動光学の範囲内でよく定式化されている[1, 2]。光導波路のうち、特に円対称の構造をもつものを光ファイバと呼ぶが、1970年にコーニング社が石英による損失率20dB/km(1km伝搬して強度が1/100)の光ファイバを実用化して以来、光通信技術の中心的な技術として開発が続けられてきた。現在ではその損失特性は、通信波長帯(石英系の光ファイバにおいて最も損失が小さくなる波長帯)である $\lambda_0 = 1.55\mu\text{m}$ の光に対して、理論限界である0.2dB/km(100km伝搬して強度が1/100)にまで達しており、一定の間隔ごとに信号の増幅を行うことで、信頼性の高い長距離通信を実現している。

また最近では、微弱な光を信号とする量子情報通信技術の研究・開発[3, 4]が精力的に行われている。微弱な光では、波動としての性質に加えて粒子(光子)としての性質が顕著に現れる。こうした性質は量子光学を用いることで記述される。量子論的な光では、その状態を観測することで、元の状態が変化してしまうという特徴がある。この性質を積極的に利用することで、痕跡を残すことなく盗聴することが不可能である量子暗号通信が構築されている[5, 6]。しかしながらその一方、この特徴はすなわち量子的な光の状態を完全に複製することできなことを意味している[7]。言い換えれば、量子信号の増幅は不可能であるため、量子情報通信においては、信号をできる限り損失なく送ることが重要である。

本稿では、全反射を導波原理とするスラブ導波路内部の電磁場のうち、TEモードについてその量子論的な表現を用いて、微弱な光信号の伝搬の様子について調べる。電磁場の解析手法には、古典導波光学におけるビーム伝搬法[8, 9]を適用する。最初に伝搬方向に一様な構造を持つスラブ導波路において、コヒーレント状態についての表現が古典導波光学における表現に帰着することを確認する。次に非古典的な状態としてスクイーズド状態や光子数状態などを取り上げ、電磁場の期待値についてコヒーレント状態とどのような相違点が現れるかについて

考察する。最後に、隣接して設置されたスラブ導波路の間で、それぞれを伝搬する電磁場が相互作用するモード結合の様子について、量子論的に解析を行う。

## 2 スラブ導波路の伝搬特性

コア幅が $d$ のスラブ導波路(図1)の内部を、波長 $\lambda_0 = 1.55\mu\text{m}$ のTE(電場の $z$ 軸成分がゼロ)モードの電磁場が伝搬する場合を考え、古典的な導波光学で解析する手法についてまとめる。コアおよびクラッドの屈折率をそれぞれ $n_1 = 1.51$ および $n_0 = 1.50$ ととり、 $y$ 軸方向には一様な構造をもつと仮定する。TEモードの電場は $y$ 軸方向成分のみ値をもち、

$$E_y = \exp(-i\omega t)f(x, z) \quad (1)$$

のように書ける。 $\omega$ は電磁場の角振動数を表す。この表記法を用いると、電磁場は複素数で表現されるが、その実数部分をとることで観測量と対応付けることができる。導波路の構造が $z$ 軸方向に一様である場合は、電磁場は定常状態として伝搬するので、さらに $z$ 依存性についても変数分離して解析することができる(→付録A)。一方で導波路構造が $z$ 軸方向に変化する場合は、電場はその空間成分 $f(x, z)$ が

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f(x, z) = -n^2(x, z)k_0^2 f(x, z) \quad (2)$$

を満たしながら伝搬する。ここで $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ は電磁場の波数、 $n(x, z)$ は屈折率の空間分布を表す。TEモードの磁場については、 $E_y$ を用いて

$$H_x = \frac{i}{\omega\mu_0} \frac{\partial E_y}{\partial z}, \quad (3)$$

$$H_z = -\frac{i}{\omega\mu_0} \frac{\partial E_y}{\partial x} \quad (4)$$

のように計算できる。 $\mu_0$ は真空の透磁率を表す。

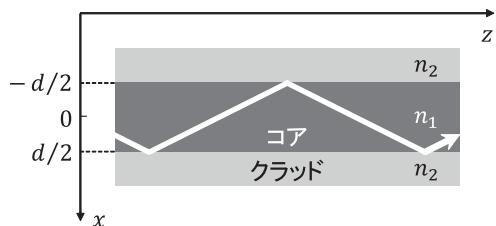


図1: 三層対象構造スラブ導波路。断面積方向に $x$ 軸、長手方向に $z$ 軸をとり、 $y$ 軸方向は一様構造であるとする。

(2) 式に適当な境界条件を課して解析を行うことで、電磁場の導波の様子を調べることができる。しかしながらこのような橢円型の偏微分方程式の境界値問題を数値的に解くためには、計算時間が膨大になるなど、さまざまな困難が伴うことが多い。ところで、全反射型のスラブ導波路において

- 導波路内部を逆の方向に進む電磁場は存在しない
- コアとクラッドの屈折率差は十分小さい
- 光の進行方向と中心軸のなす角度は小さい

が成り立つときは、 $E_y$  の進行方向の波数は、ある非常に狭い範囲内に入ると考えられる。すなわち、電磁場の  $z$  依存性は  $n_0 k_0 < \tilde{\beta} < n_1 k_0$  を波数成分とする周期的な振動が支配的となり、 $f(x, z) = \exp(i\tilde{\beta}z)\tilde{f}(x, z)$  とおいた場合、 $\tilde{f}(x, z)$  は  $z$  軸方向には緩やかに振動する関数となる。その結果、

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}(x, z)}{\partial z^2} \approx 0 \quad (5)$$

がよい精度で成り立つので、(2) 式を

$$2i\tilde{\beta} \frac{\partial \tilde{f}(x, z)}{\partial z} = \frac{\partial^2 \tilde{f}(x, z)}{\partial x^2} + [n^2(x, z)k_0^2 - \tilde{\beta}^2] \tilde{f}(x, z) \quad (6)$$

のような放物型の微分方程式で近似することで、効率よく解析を行うことができる。この手法をビーム伝搬法 [8] とよぶが、これは電磁場の伝搬方向についてコアの構造が変化している場合にも適用できることが特徴である。また以降  $\tilde{f}(x, z)$  を電磁場の特性関数と呼ぶことにする。

図 2 に均一コア幅  $d = 4.3\mu\text{m}$  の導波路について、 $\tilde{f}(x, z)$  の発展の様子を示す。(a) は伝搬方向に一様な構造、(b) は途中で Y 字型に分岐する構造である。 $\tilde{f}(x, z)$  のスケールはここでは任意としているが、実際は導波路内部の電磁場エネルギーが

$$U_{\text{total}} = \int_V \left[ \frac{n^2(x, z)\varepsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2 + \frac{\mu_0}{2} |\mathbf{H}|^2 \right] dV \quad (7)$$

であることにより規格化される(→付録 B)。また、計算領域の境界(それぞれのグラフの両端)においては、透過境界条件を適用している。 $d = 4.3\mu\text{m}$  は規格化周波数(57)にして  $v \simeq 1.51 < \pi/2$  であり、これは付録 A の図 8 よりシングルモードで動作する領域に相当する構造である。図 2 のそれぞれの結果より、単一のモードだけが伝搬していることがわかる。ここで  $\tilde{\beta}$  は固有値方程式(56)より求めた値を採用しているため、 $\tilde{f}(x, z)$  の  $z$  依存性はほぼなくなっている。

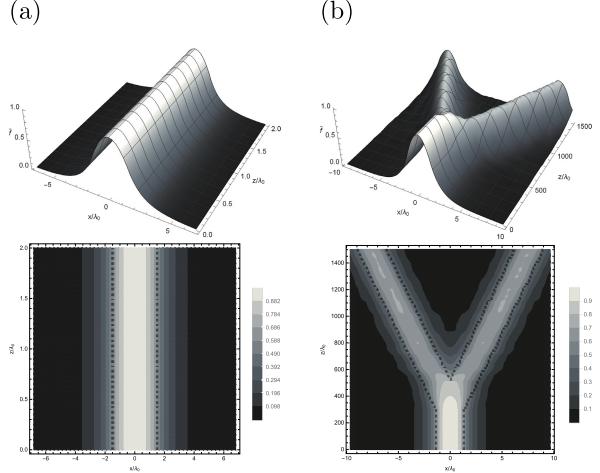


図 2: ビーム伝搬法による電磁場特性関数  $\tilde{f}(x, z)$  の空間分布の様子。(a)  $z$  軸方向に一様な構造の導波路、(b) Y 字型に分岐する構造の導波路。下の図はそれぞれ特性関数の振幅を色の濃淡により表現し、 $x$ - $z$  平面に射影したものである。点線はコア・クラッドの境界面を表す。

### 3 スラブ導波路を伝搬する電磁場の量子論的表現

この節では、スラブ導波路を伝搬する TE モード電磁場について、量子光学の観点からの表現について述べる。量子論においては、物理量はエルミート演算子に対応づけられている。ベクトルポテンシャルを

$$\hat{\mathbf{A}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega\varepsilon_0 V}} [\hat{a}^\dagger(t)f^*(x, z) + \hat{a}(t)f(x, z)] \mathbf{e}_y \quad (8)$$

で与えると、電磁場の演算子はクーロンゲージの下で

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}} &= -\frac{\partial \hat{\mathbf{A}}}{\partial t} \\ &= -\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega\varepsilon_0 V}} \left[ \frac{\partial \hat{a}^\dagger(t)}{\partial t} f^*(x, z) + \frac{\partial \hat{a}(t)}{\partial t} f(x, z) \right] \mathbf{e}_y, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{H}} &= \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \hat{\mathbf{A}} \\ &= \frac{1}{\mu_0} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega\varepsilon_0 V}} \left\{ - \left[ \hat{a}^\dagger(t) \frac{\partial f^*}{\partial z} + \hat{a}(t) \frac{\partial f}{\partial z} \right] \mathbf{e}_x \right. \\ &\quad \left. + \left[ \hat{a}^\dagger(t) \frac{\partial f^*}{\partial x} + \hat{a}(t) \frac{\partial f}{\partial x} \right] \mathbf{e}_z \right\} \quad (10) \end{aligned}$$

のように書ける [10]。ここで  $\hat{\cdot}$  記号は演算子を表し、 $\hbar$ 、 $\varepsilon_0$ 、 $V$  はそれぞれ、プランク定数、真空の誘電率、単位体積を表す。また  $\hat{a}(t)$ 、 $\hat{a}^\dagger(t)$  は、電磁場振幅の時間変化を表し、交換関係

$$[\hat{a}(t), \hat{a}^\dagger(t)] \equiv \hat{a}(t)\hat{a}^\dagger(t) - \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t) = \hat{1} \quad (11)$$

を満たす。ベクトル・ポテンシャルおよび電磁場の係数は規格化定数であり、ハイゼンベルク描像におけるハミルトニアンを計算すると

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}} &= \int_V \left[ \frac{n^2(x, z)\varepsilon_0}{2} |\hat{\mathbf{E}}|^2 + \frac{\mu_0}{2} |\hat{\mathbf{H}}|^2 \right] dV \\ &= \hbar\omega \left[ \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t) + \frac{1}{2} \right]\end{aligned}\quad (12)$$

が得られる。 $n(x, z)$  は屈折率であるが、量子論的な観点からも矛盾なく書き下すことができる [11]。ハミルトニアンはエネルギー固有値に対する演算子であり、(12) 式はエネルギー量子が光子の数だけ存在することを表していることがわかる ( $\hbar\omega/2$  はゼロ点エネルギー)。またこのハミルトニアンを用いれば、ハイゼンベルクの運動方程式より

$$\frac{d\hat{a}(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{a}(t), \hat{\mathcal{H}}] = -i\omega\hat{a}(t) \quad (13)$$

が成り立つから、 $\hat{a}(t) = \hat{a}(0) \exp(-i\omega t)$  であることがわかる（以降、 $\hat{a}(0) \equiv \hat{a}$  と表記する）。 $\hat{a}^\dagger$ ,  $\hat{a}$  はそれぞれ光子の生成、消滅演算子に対応する。

電磁場の状態が  $|\psi\rangle$  あるとすれば、観測量としての電磁場は期待値  $\mathbf{E} = \langle\psi|\hat{\mathbf{E}}|\psi\rangle$ ,  $\mathbf{H} = \langle\psi|\hat{\mathbf{H}}|\psi\rangle$  として与えられる。特に電磁場がコヒーレント状態  $|\alpha\rangle$  (→付録 C) である場合を考えると、(59) 式と  $f(x, z) = \exp(i\beta z)\tilde{f}(x, z)$  であることを用いて

$$E_y^{(\text{CH})} = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}} [\tilde{U}_{tz}^* \alpha^* \tilde{f}^*(x, z) - \tilde{U}_{tz} \alpha \tilde{f}(x, z)], \quad (14)$$

$$H_x^{(\text{CH})} = -\frac{1}{\mu_0} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega\varepsilon_0 V}} \left( \alpha^* \frac{\partial \tilde{U}_{tz}^* \tilde{f}^*}{\partial z} + \alpha \frac{\partial \tilde{U}_{tz} \tilde{f}}{\partial z} \right), \quad (15)$$

$$H_z^{(\text{CH})} = \frac{1}{\mu_0} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega\varepsilon_0 V}} \left( \tilde{U}_{tz}^* \alpha^* \frac{\partial \tilde{f}^*}{\partial x} + \tilde{U}_{tz} \alpha \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} \right) \quad (16)$$

が得られる。これらは(1), (3) および(4) の各式に適当な位相をかけてその実数部分をとったものに比例するから、古典的な電磁場に対応する。ここでコヒーレント状態が消滅演算子の固有状態であること、すなわち(66) 式を用いた ( $\alpha$  は複素数)。また  $|\alpha|$  が十分大きいときには、

$$U_{\text{total}} \approx \int_V \langle \alpha | \hat{\mathcal{H}} | \alpha \rangle dV \quad (17)$$

が成り立つ。

$\alpha = 1$  のコヒーレント状態の場合について、TE モードの電磁場が  $z$  軸方向に一様な構造（コア幅  $d = 4.3\mu\text{m}$ ）の導波路を伝搬する様子を図 3 に示す。それぞれのスケールは、規格化のための因子

$$\mathcal{N} = \frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V} \quad (18)$$

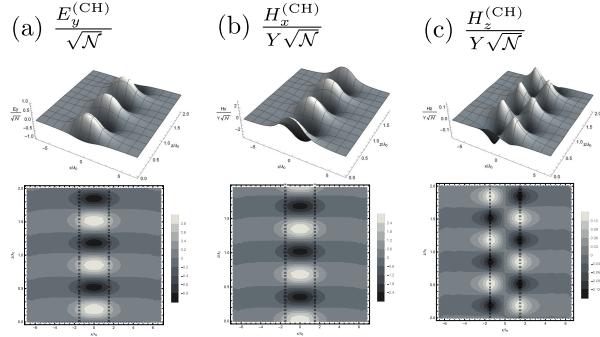


図 3: コヒーレント状態 ( $\alpha = 1$ ) の電磁場が導波路を伝搬する様子。下の  $x$ - $z$  平面への射影図における点線はコア・クラッドの境界面を表す。

や特性アドミッタンス  $Y = \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}$  を用いて、電場と磁場がほぼ同じスケールになるように規格化してある。また前節で述べたのと同じ理由で、偶対称空間分布の最低次モードのみが伝搬している様子が見られる。

この結果より、コヒーレント状態の最低次モードでは、 $E_y$  および  $H_x$  が導波路の中心に対して偶対称な分布をしており、位相が  $\pi/2$  だけずれた状態で伝搬していることがわかる。また  $H_z$  は奇対称な分布をしているが、その振幅は  $H_x$  よりもだいぶ小さい。このことは、ここでの導波モードに対応する電磁場がほぼ  $z$  軸と平行に伝搬していることとも矛盾しない結果である。

## 4 スラブ導波路内部を伝搬する非古典的な状態の表現

電磁場の状態として非古典的な状態を考えると、電磁場の期待値は古典的な状態から大きく変化する。本節ではスクイーズド状態と光子数状態 (→付録 C) の場合について、電磁場の期待値がどのように表現されるかについて考察する。

電磁場がスクイーズド状態  $|r, \alpha\rangle = \hat{S}(r)|\alpha\rangle$  のとき、TE モードの電磁場は

$$E_y^{(\text{SQ})} = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}} \left[ \tilde{U}_{tz}^* (\alpha^* \cosh r - \alpha \sinh r) \tilde{f}^*(x, z) - \tilde{U}_{tz} (\alpha \cosh r - \alpha^* \alpha^*) \tilde{f}(x, z) \right], \quad (19)$$

$$H_x^{(\text{SQ})} = -\frac{1}{\mu_0} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega\varepsilon_0 V}} \left[ (\alpha^* \cosh r - \alpha \sinh r) \frac{\partial \tilde{U}_{tz}^* \tilde{f}^*}{\partial z} + (\alpha \cosh r - \alpha^* \sinh r) \frac{\partial \tilde{U}_{tz} \tilde{f}}{\partial z} \right], \quad (20)$$

$$H_z^{(\text{SQ})} = \frac{1}{\mu_0} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega\varepsilon_0 V}} \left[ \tilde{U}_{tz}^* (\alpha^* \cosh r - \alpha \sinh r) \frac{\partial \tilde{f}^*}{\partial x} + \tilde{U}_{tz} (\alpha \cosh r - \alpha^* \sinh r) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} \right]$$

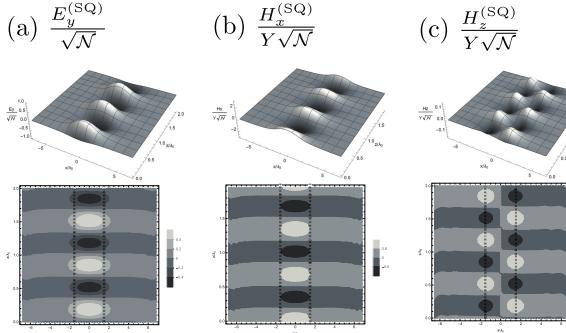


図 4: スクイーズド状態 ( $\alpha = 1, r = 0.5$ ) の電磁場が導波路を伝搬する様子。下の  $x$ - $z$  平面への射影図における点線はコア・クラッドの境界面を表す。

$$+ \tilde{U}_{tz}(\alpha \cosh r - \alpha^* \sinh r) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} \quad (21)$$

で与えられる。ただしここで

$$\langle r, \alpha | \hat{a} | r, \alpha \rangle = \alpha \cosh r - \alpha^* \sinh r, \quad (22)$$

$$\langle r, \alpha | \hat{a}^\dagger | r, \alpha \rangle = \alpha^* \cosh r - \alpha \sinh r \quad (23)$$

であることを用いた。

$r = 0.5, \alpha = 1$  のスクイーズド状態の場合について、TE モードの電磁場が  $z$  軸方向に一様な構造の導波路を伝搬する様子を図 4 に示す（ここでもコヒーレント状態の場合と同様の規格化を用いている）。コヒーレント状態の場合である図 3 と比較して、すべての電磁場成分において振幅が小さくなっていることがわかる。スクイージングパラメータを負の値、例えば  $r = -0.5 < 0$  のようにとれば、逆に振幅が大きくなる。コヒーレント状態に追加のエネルギーを投入することでスクイーズド状態が生成されているが、このことから電磁場振幅が大きく成り得ることは説明できる。スクイーズド状態は (68) 式のように複数のコヒーレント状態の重ね合わせとして表現できるが、 $r > 0$  の場合はこれらが破壊的に干渉しあって、結果として電磁場成分が小さくなっているものと考えられる。

次に光子数状態の場合は、(72), (73) の両式と直交性 (74) により、

$$E_y^{(n)} = H_x^{(n)} = H_z^{(n)} = 0 \quad (24)$$

となる。これは電磁場の振幅が常にゼロであることを意味する（図 5）が、電磁場が存在していないわけではないことに注意が必要である。光子数状態もスクイーズド状態と同じようにコヒーレント状態の重ね合わせで表現できるので、これらが破壊的に干渉し合うことで、結果として振幅がゼロの定常状態を形成していると考えるのが妥当である。

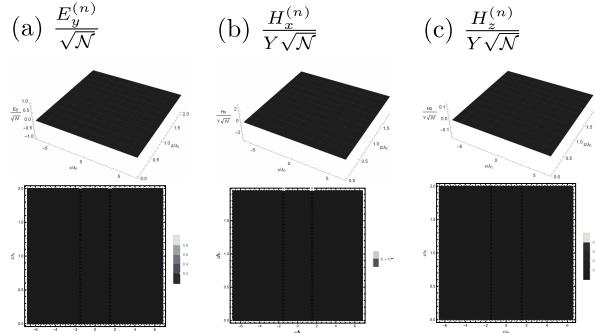


図 5: 光子数状態 ( $n$  は任意) の電磁場が導波路を伝搬する様子。下の  $x$ - $z$  平面への射影図における点線はコア・クラッドの境界面を表す。

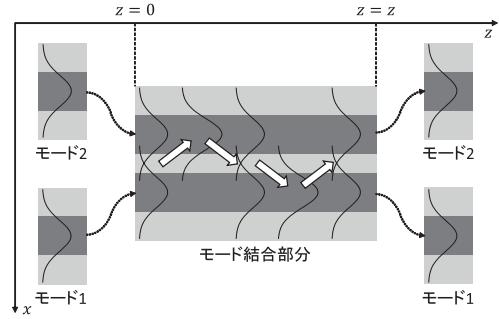


図 6: 方向性結合器の概念図。

## 5 スラブ導波路におけるモード結合の量子論的表現

全反射による導波路においては、電磁場はコアのみならずクラッドにも波長程度の距離にわたってエバネッセント成分が染み出しながら伝搬する。この現象は、量子論的には不確定性関係から説明をすることができる [11]。二つの導波路を近くに配置した場合、一方のエバネッセント成分が他方の電磁場に影響を与える（モード結合）。この節ではモード結合の量子論的な表現について考察する。

図 6 にモード結合の様子を示す。最初は二つの導波路がお互いに干渉しておらず、

$$\hat{E}_j^{(0)} = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}} [U_{tz}^* \hat{a}_j^\dagger f_j^*(x) - U_{tz} \hat{a}_j f_j(x)] e_y \quad (25)$$

のように等しい伝搬定数  $\beta$  をもつて定常状態の導波モードがそれぞれ存在しているとする ( $j = 1, 2$ )。ここで  $U_{tz} = \exp[i(\beta z - \omega t)]$  は伝搬定数  $\beta$  に対応する時空変動因子を表すものとする。それぞれの導波路においては、断面積方向に  $f_j(x)$  の空間分布で光子が分布していると考えられるが、ここでは導波路 1 もしくは 2 のどちらに光子が存在するかという側面に注目することにする。これは導波路内部での光子の位置は問わないことを意味

しており、そのために断面積方向  $x$  について平均化（積分）する。ここでは簡単のため

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_j(x) dx = 1 \quad (26)$$

のように規格化しておく。

次に二つの導波路を近づけると、それぞれの電磁場が他方に干渉を始める。微視的な観点からは、元々それぞれの導波路に存在した光子が他方へ移動すると考えられる。これを実効的に表すために、光子の生成、消滅演算子が  $z$  に依存するというモデルを考える。このとき、断面積方向について平均化した電磁場はそれぞれ

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{E}}_j(z, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{E}}_j dx \\ &= -i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}} [U_{tz}^* \hat{a}_j^\dagger(z) - U_{tz} \hat{a}_j(z)] \mathbf{e}_y \end{aligned} \quad (27)$$

のように表せるが、それぞれの導波路における生成、消滅演算子の間には現象論的に

$$\frac{d}{dz} U_{tz} \begin{pmatrix} \hat{a}_1(z) \\ \hat{a}_2(z) \end{pmatrix} = iU_{tz} \begin{pmatrix} \beta & \xi \\ \xi & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1(z) \\ \hat{a}_2(z) \end{pmatrix} \quad (28)$$

が成り立つことがわかっている [2]。ここで  $\xi$  は二つのモードの結合に関する係数であり、 $\beta \gg \xi$  とする。この方程式を整理すると、

$$\frac{d}{dz} \hat{a}_1(z) = i\xi \hat{a}_2(z), \quad (29)$$

$$\frac{d}{dz} \hat{a}_2(z) = i\xi \hat{a}_1(z) \quad (30)$$

なる連立微分方程式が得られる。これより解は

$$\hat{a}_1(z) = \hat{a}_1 \cos \xi z + i\hat{a}_2 \sin \xi z, \quad (31)$$

$$\hat{a}_2(z) = i\hat{a}_1 \sin \xi z + \hat{a}_2 \cos \xi z \quad (32)$$

となる。ただし (31), (32) の両式の右辺における  $\hat{a}_1, \hat{a}_2$  は、モード結合が起こる前のそれぞれの導波路における電磁場に含まれる光子の消滅演算子を表すものとする。ここで任意の演算子  $\hat{A}, \hat{B}$  について成り立つ Baker-Hausdorff の公式 [10]

$$\begin{aligned} \exp(\hat{A}) \hat{B} \exp(-\hat{A}) &= \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] \\ &\quad + \frac{1}{3!} [\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]] + \dots \end{aligned} \quad (33)$$

を使うことで、(31), (32) の関係式はビームスプリッター演算子

$$\hat{U}(z) = \exp[i\xi z (\hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2)] \quad (34)$$

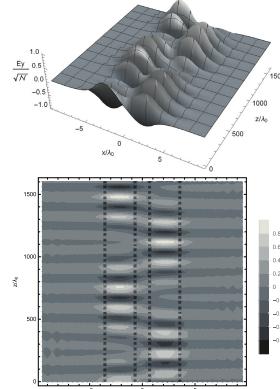


図 7: コヒーレント状態のモード結合の様子。

を用いて、

$$\hat{a}_1(z) = \hat{U}^\dagger(z) \hat{a}_1 \hat{U}(z), \quad (35)$$

$$\hat{a}_2(z) = \hat{U}^\dagger(z) \hat{a}_2 \hat{U}(z) \quad (36)$$

のように表現できる。 $\hat{U}$  はユニタリ演算子なので、

$$\hat{U}(z) \hat{U}^\dagger(z) = \hat{1} \quad (37)$$

が成り立つ。これより、二つのモードが結合している間の電磁場の演算子は、

$$\hat{\mathcal{E}}(z) = \hat{U}^\dagger(z) [\hat{\mathcal{E}}_1^{(0)} + \hat{\mathcal{E}}_2^{(0)}] \hat{U}(z) = \hat{U}^\dagger(z) \hat{\mathcal{E}}^{(0)} \hat{U}(z) \quad (38)$$

のように発展することがわかる。ここで

$$\hat{\mathcal{E}}_j^{(0)} = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}} [U_{tz}^* \hat{a}_j^\dagger - U_{tz} \hat{a}_j] \mathbf{e}_y \quad (39)$$

である。

電磁場の状態が  $|\psi\rangle_{12} = |\psi_1\rangle_1 |\psi_2\rangle_2$  のとき、二つのモードが結合した電磁場の期待値は

$$\mathcal{E}(z) = {}_{21}\langle \psi | \hat{U}^\dagger(z) \hat{\mathcal{E}}^{(0)} \hat{U}(z) | \psi \rangle_{12} \quad (40)$$

で与えられる。以上の表現より、それぞれの導波路における電磁場は、一定の周期で導波路の間を行ったり来たりすることがわかる。図 7 に  $|\psi\rangle_{12} = |\alpha\rangle_1 |\alpha\rangle_2$  の場合の計算結果を示す。特に  $\xi z = \pi/4$  となる位置で結合を切った場合、それぞれの導波路における電磁場成分の半分が他方の導波路に移った状態となり、-3dB の方向性結合器が実現される。

(40) 式より、演算子  $\hat{U}(z)$  は伝搬距離  $z$  に応じて電磁場の状態  $|\psi\rangle_{12}$  を発展させる演算子であると見ることもできる。方向結合器の二つのモードに单一光子数状態  $|\psi\rangle_{12} = |1\rangle_1 |1\rangle_2 = \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger |0\rangle$  を入射した場合、再び Baker-Hausdorff の公式 (33) を使うと、電磁場の状態は

$$\hat{U}(z) \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger |0\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= [\hat{\mathcal{U}}(z)\hat{a}_1^\dagger\hat{\mathcal{U}}^\dagger(z)][\hat{\mathcal{U}}(z)\hat{a}_2^\dagger\hat{\mathcal{U}}^\dagger(z)]|0\rangle \\
&= (\hat{a}_1^\dagger \cos \xi z + i\hat{a}_2^\dagger \sin \xi z)(i\hat{a}_1^\dagger \sin \xi z + \hat{a}_2^\dagger \cos \xi z)|0\rangle \\
&= \sqrt{2}i \cos \xi z \sin \xi z |2\rangle_1 |0\rangle_2 \\
&\quad + (\cos^2 \xi z - \sin^2 \xi z) |1\rangle_1 |1\rangle_2 \\
&\quad + \sqrt{2}i \cos \xi z \sin \xi z |0\rangle_1 |2\rangle_2
\end{aligned} \tag{41}$$

のように発展する。特に前述の  $-3\text{dB}$  結合器の場合は、 $\xi z = \pi/4$  とおくと、

$$\hat{\mathcal{U}}\left(\frac{\pi}{4}\right)|1\rangle_1|1\rangle_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(|2\rangle_1|0\rangle_2 + |0\rangle_1|2\rangle_2) \tag{42}$$

となる。これはそれぞれの導波路に同じ光子一個に相当する電磁場を入射しても、量子的な干渉の結果、光子がどちらか一方の導波路に局在してしまうことを示している。どちらの導波路に局在しているかは、それぞれ確率的に  $1/2$  ずつである。

## 6 まとめ

本稿では、全反射を導波原理とするスラブ導波路内部を伝搬する電磁場について、その量子論的な表現を考察した。微弱な光の状態として、擬古典状態であるコヒーレント状態についての期待値を計算し、古典的な電磁場表現に帰着することを示した。また非古典的な状態としてスクイーズド状態と光子数状態を取り上げ、これらで期待値を計算した場合にコヒーレント状態の場合と大きく異なる結果が得られることを示した。電磁場の伝搬の解析にはビーム伝搬法を用いた。

次に異なる導波路を伝搬する電磁場が相互作用するモード結合の様子について、量子論的に解析した。モード結合が起こっている間は、電磁場は伝搬距離に応じて二つの導波路の間を周期的に移動する。この結合の様子はビームスプリッター演算子を用いて表現できる。特に二つのモードに单一光子状態を入れた場合には、これらが量子論的に干渉を起こして、どちらかの導波路に局在する結果が得られる。この様子は、50:50 ビームスプリッターの両側から单一光子を入射した場合の振る舞いと同じものである。

本稿で得られた結果は、微弱光を信号とする量子情報通信技術の解析に必要不可欠なものである。今後本手法を用いて、例えば量子情報通信技術に必要とされる導波路の性能の評価などにつなげていくことができると考えられる。

## 謝辞

本研究は、科研費（課題番号 26790058, 17H01981）の助成を受けて行われた。

## A 伝搬方向に一様な構造をもつ導波路における電磁場

導波路中の TE モードの電場は (1) 式で与えられるが、さらに伝搬方向 ( $z$  軸方向) に一様な構造をもつ場合、電場の  $z$  依存性が

$$E_y = \exp[i(\beta z - \omega t)]f(x) \tag{43}$$

のように分離できる [2]。 $\beta$  は伝搬定数と呼ばれ、電磁場の波数の  $z$  軸方向成分に対応する。電場の断面積方向の空間分布  $f(x)$  は微分方程式

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + (n_j^2 k_0^2 - \beta^2) f(x) = 0 \tag{44}$$

を満たすが、電磁波が効率よく伝搬される（導波モード）ためには、

$$f(x) = \begin{cases} A_1 \exp(\gamma x) & (x \leq -\frac{d}{2}) \\ A_2 \exp(i\kappa x) + B_2 \exp(-i\kappa x) & (-\frac{d}{2} < x \leq \frac{d}{2}) \\ B_3 \exp(-\gamma x) & (x > \frac{d}{2}) \end{cases} \tag{45}$$

となればよい。 $\kappa, \gamma$  はそれぞれコアにおける横方向伝搬定数およびクラッドにおける減衰係数を表しており、波数  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ 、伝搬定数  $\beta$  と

$$\kappa = \sqrt{n_1^2 k_0^2 - \beta^2}, \tag{46}$$

$$\gamma = \sqrt{\beta^2 - n_0^2 k_0^2} \tag{47}$$

のように関係づけられる。

屈折率境界面 ( $x = \pm d/2$ ) において、電磁場はその接線方向成分  $H_x$  および  $E_y$  が連続であるから、

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \exp(-\frac{\gamma d}{2}) & \exp(\frac{\gamma d}{2}) \\ \gamma \exp(-\frac{\gamma d}{2}) & -\gamma \exp(\frac{\gamma d}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \exp(-\frac{i\kappa d}{2}) & \exp(\frac{i\kappa d}{2}) \\ i\kappa \exp(-\frac{i\kappa d}{2}) & -i\kappa \exp(i\frac{\kappa d}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \exp(\frac{i\kappa d}{2}) & \exp(-\frac{i\kappa d}{2}) \\ i\kappa \exp(\frac{i\kappa d}{2}) & -i\kappa \exp(-\frac{i\kappa d}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \exp(\frac{\gamma d}{2}) & \exp(-\frac{\gamma d}{2}) \\ \gamma \exp(\frac{\gamma d}{2}) & -\gamma \exp(-\frac{\gamma d}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ B_3 \end{pmatrix} \tag{49}
\end{aligned}$$

なる関係式が得られる。これらを組み合わせると、

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ B_3 \end{pmatrix} \quad (50)$$

が得られる。ここで

$$m_{11} = \frac{|\eta|^2}{4} [\exp(\gamma\eta d) + \exp(\gamma\eta^* d)], \quad (51)$$

$$\begin{aligned} m_{12} &= \frac{\eta^2}{4} \exp\left(\frac{\gamma\eta^* d}{2}\right) \exp\left(-\frac{\gamma\eta d}{2}\right) \\ &\quad + \frac{\eta^{*2}}{4} \exp\left(\frac{\gamma\eta d}{2}\right) \exp\left(-\frac{\gamma\eta^* d}{2}\right), \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} m_{21} &= \frac{\eta^{*2}}{4} \exp\left(-\frac{\gamma\eta d}{2}\right) \exp\left(\frac{\gamma\eta^* d}{2}\right) \\ &\quad + \frac{\eta^2}{4} \exp\left(-\frac{\gamma\eta^* d}{2}\right) \exp\left(\frac{\gamma\eta d}{2}\right), \end{aligned} \quad (53)$$

$$m_{22} = \frac{|\eta|^2}{4} [\exp(-\gamma\eta d) + \exp(-\gamma\eta^* d)] \quad (54)$$

であり、また  $\eta = 1 + i\kappa/\gamma$  とおいた。

(50) 式が自明でない解 ( $A_1 \neq 0, B_3 \neq 0$ ) をもつためには  $m_{22} = 0$  となればよく [8]、これを整理すると、全反射型スラブ導波路の固有値方程式

$$2 \cos \kappa d + \left( \frac{\gamma}{\kappa} - \frac{\kappa}{\gamma} \right) \sin \kappa d = 0 \quad (55)$$

が得られる。さらに三角関数の半角の公式を使って整理すると、

$$\kappa \tan \frac{\kappa d}{2} - \gamma = 0, \quad \kappa \cot \frac{\kappa d}{2} + \gamma = 0 \quad (56)$$

に帰着できるが、一つ目および二つ目の等式はそれぞれ、 $f(x)$  が  $x$  について偶関数（偶対称モード）である場合および奇関数（奇対称モード）である場合に対応する。 $\kappa$  と  $\gamma$  は (46), (47) 式より  $\beta$  の関数であるから、(56) 式を解くことで閉じ込め条件を満たす伝搬定数  $\beta$  を求めることができる。全反射型の導波路においては、導波路の構造を規格化周波数  $v$ 、伝搬特性を規格化伝搬定数  $b$  で表すことが多い。それぞれの量は

$$v = \frac{d}{\lambda_0} \pi \sqrt{n_1^2 - n_0^2}, \quad (57)$$

$$b = \frac{\beta^2 - (n_0 k_0)^2}{(n_1 k_0)^2 - (n_0 k_0)^2} \quad (58)$$

で定義される。図 8 に各空間モードの規格化伝搬定数を示す。 $v < \pi/2$  の領域では、TE<sub>0</sub> モードのみが存在しており、シングルモード動作が実現されていることがわかる。

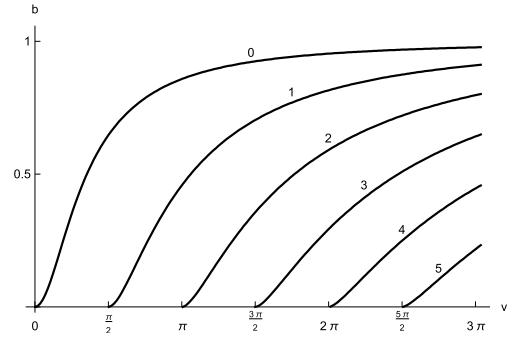


図 8: スラブ導波路内部の TE モード定常状態の規格化伝搬定数。

## B $\tilde{f}(x, z)$ の規格化

この節では、特性関数  $\tilde{f}(x, z)$  の規格化の手順と数値例を挙げる。

$$\tilde{U}_{tz} = \exp[i(\tilde{\beta}z - \omega t)] \quad (59)$$

を用いて、電磁場は

$$E_y = \tilde{U}_{tz} \tilde{f}(x, z), \quad (60)$$

$$H_x = \frac{i}{\omega \mu_0} \tilde{U}_{tz} \left[ \frac{\partial \tilde{f}(x, z)}{\partial z} + i\tilde{\beta} \tilde{f}(x, z) \right], \quad (61)$$

$$H_z = -\frac{i}{\omega \mu_0} \tilde{U}_{tz} \frac{\partial \tilde{f}(x, z)}{\partial x} \quad (62)$$

と書ける。これらを (7) 式に代入すると、

$$U_{\text{total}}(L_z)$$

$$\begin{aligned} &= L_z \int_S \frac{\varepsilon_0}{2k_0^2} \left\{ [n^2(x, z) k_0^2 - \tilde{\beta}^2] |\tilde{f}(x, z)|^2 + \left| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + \left| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z} \right|^2 + i\tilde{\beta} \left[ \tilde{f}(x, z) \frac{\partial \tilde{f}^*}{\partial z} + \tilde{f}^*(x, z) \frac{\partial \tilde{f}(x, z)}{\partial z} \right] \right\} dS \end{aligned} \quad (63)$$

が得られる。ここで  $z$  軸については  $0 \leq z \leq L_z$  の区間で積分を行っている。電場の表現 (60) 式から、 $\tilde{f}(x, z)$  の単位は [N/C] である。またこれより  $U_{\text{total}}(L_z)$  はエネルギーの単位 [J] で測られることがわかる。

光導波路に用いられる石英では、単位断面積あたり毎秒のエネルギー  $\sim 10^{10} \text{ W/m}^2$  許容されるとして、ここではその  $1/100$  のエネルギーをもつ電磁場を伝搬させる場合を考える。 $y$  軸方向には単位長さを用いると、 $W = 10^2 \text{ W}/\mu\text{m}$  のエネルギーが流れることになる。 $L_z$  を電磁波が屈折率  $n \simeq 1.51$  の空間において毎秒進む距離  $3.00 \times 10^8 / 1.51 \simeq 1.99 \times 10^8 \text{ m}$  とすると、 $\tilde{f}(x, z)$  の規格化係数は  $\sqrt{W/U_{\text{total}}(L_z)}$  であることがわかる。

## C さまざまな量子状態の表現

量子状態  $|\psi\rangle$  を可視化するための表現の一つとして、  
ウィグナー関数

$$W(x, p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp(2ipy) \langle x-y|\psi\rangle \langle \psi|x+y\rangle \quad (64)$$

がよく用いられる [12]. ここで  $(x, p)$  は位相平面上の互いに共役なパラメータである. ウィグナー関数  $W(x, p)$  は量子状態  $|\psi\rangle$  と一対一に対応しており、確率分布に準じた量を表すが、非古典的な量子状態の場合には  $W(x, p) < 0$  となる場合もあり、その特徴をよく表すことが知られている.

### コヒーレント状態

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (65)$$

は光子の消滅演算子の固有状態であり、

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (66)$$

の関係を満たす. コヒーレント状態については直交性は成り立たないが、完全性関係

$$\frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\alpha\rangle \langle \alpha| = \hat{1} \quad (67)$$

が成り立つことが知られている. これより、任意の量子状態はコヒーレント状態を用いて展開することができる.

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha \langle \alpha|\psi\rangle |\alpha\rangle \quad (68)$$

またコヒーレント状態は位相平面において不確定性が最小となるため、擬古典的な状態であると考えられる. コヒーレント状態のウィグナー関数は

$$W_{CH}(x, p) = \frac{1}{\pi} \exp\left\{-[(x-x_0)^2 + (p-p_0)^2]\right\} \quad (69)$$

となる. ここで  $\alpha = (x_0 + ip_0)/\sqrt{2}$  である. 図 9 に  $\alpha = (1+i)/\sqrt{2}$  の場合を図示する. これより、コヒーレント状態は  $x_0 = 1, p_0 = 1$  を中心に、等方的にガウス型の分布をしていることがわかる.  $|\alpha = 0\rangle$  は特に真空状態と呼ばれ、光子が一つもない状態に対応する.

スクイーズド状態  $|r, \alpha\rangle$  は、コヒーレント状態を一つの軸（例えば  $x$  軸）に沿って揺らぎを圧縮（スクイーズ）し、代わりに直交する軸（ $p$  軸）に沿って揺らぎを大きくした状態であり、コヒーレント状態にスクイーズ演算子

$$\hat{S}(r) = \exp\left[-\frac{r}{2}(\hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}^2)\right] \quad (70)$$

をかけたものとして表される ( $|r, \alpha\rangle = \hat{S}(r)|\alpha\rangle$ ). ここで  $r$  は圧縮率に関係したパラメータである. 不確定性関

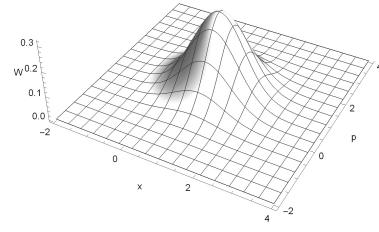


図 9:  $\alpha = (1+i)/\sqrt{2}$  のコヒーレント状態のウィグナー関数.

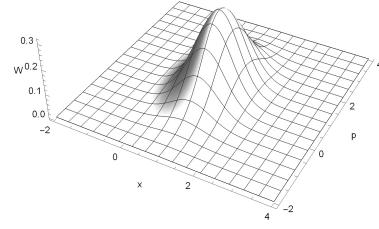


図 10:  $\alpha = (1+i)/\sqrt{2}, r = 0.5$  のスクイーズド状態のウィグナー関数.

係を最小状態に保ちつつ、一方の観測量の精度を高めていることが特徴である. 真空状態を  $x$  軸に沿って圧縮した状態のウィグナー関数は、

$$W_{SQ}(x, p) = \frac{1}{\pi} \exp\left[-\exp(2r)(x-x_0)^2 - \exp(-2r)(p-p_0)^2\right] \quad (71)$$

で与えられ、図 10 に  $r = 0.5$  (-4.3dB の圧縮に相当) の場合を図示する. 位相空間上の分布が  $x$  軸方向には圧縮され、逆に  $p$  軸方向には引き延ばされているが、ウィグナー関数の輪郭はガウス型分布を保っていることがわかる.  $r = 0$  はコヒーレント状態（真空状態）に一致する.

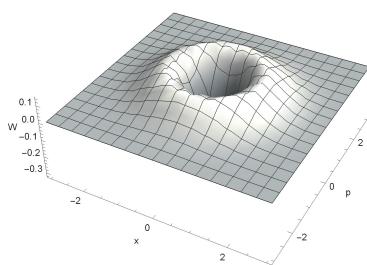
光子数状態  $|n\rangle$  は存在する光子数が確定した状態であるが、このような状態を実験的に作る出すことは困難であるため、コヒーレント状態やスクイーズド状態よりも非古典性が高い状態であると考えられる. 光子数状態に生成・消滅演算子を作用させることで、

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \quad (72)$$

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle \quad (73)$$

のように異なる光子数の状態に遷移する. また光子数状態については、直交性が成り立つ.

$$\langle n|n'\rangle = \begin{cases} 1 & (n = n') \\ 0 & (n \neq n') \end{cases} \quad (74)$$

図 11:  $n = 1$  の光子数状態のウィグナー関数.

光子数状態  $|n\rangle$  のウィグナー関数は

$$W_n(x, p) = \frac{(-1)^n}{\pi} \exp[-(x^2 + p^2)] L_n(2x^2 + 2p^2) \quad (75)$$

で与えられる。ここで  $L_n(x)$  はラゲール多項式である。図 11 に  $n = 1$  の場合を図示するが、これより輪郭がガウス型分布でないことがわかる。また位相平面の原点において、ウィグナー関数が負の値をとっていることも大きな特徴であるといえる。

## 参考文献

- [1] A. W. Snyder and J. D. Love, “Optical Waveguide Theory,” Chapman and Hall (1983).
- [2] 左貝 潤一, 「導波光学」, 共立出版 (2004).
- [3] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, “Quantum Computation and Quantum Information,” Cambridge (2000).
- [4] S. L. Braunstein and A. K. Pati, “Quantum Information with Continuous Variables,” Kluwer (2003).
- [5] N. Gisin, G. Ribordy, W. Tittel and H. Zbinden, “Quantum cryptography,” Rev. Mod. Phys. **74**, 145 (2002).
- [6] 小芦 雅斗, 小柴 健史, 「量子暗号理論の展開」, サイエンス社 (2008).
- [7] W. K. Wootters and W. H. Zurek, “A single quantum cannot be cloned,” Nature **299**, 802 (1982).
- [8] 山内 潤治, 薮 哲郎, 「光導波路解析入門」, 森北出版 (2007).
- [9] 左貝 潤一, 「光導波路の電磁界数值解析法」, 森北出版 (2015).
- [10] W. H. Louisell, “Quantum Statistical Properties of Radiation,” Wiley (1973).
- [11] A. Kitagawa, “Quantum description of electromagnetic fields in waveguides,” arXiv:1510.06836 (2015).
- [12] U. Leonhardt, “Measuring the Quantum State of Light,” Cambridge (1997).