

論文

反射・透過係数の観点からのブラッグ導波路の解析

Analysis of Bragg waveguide from a perspective of reflection and transmission coefficients

北川 晃（高知大学教育学部）

Akira KITAGAWA

Faculty of Education, Kochi University

ABSTRACT

We study the propagation properties of electromagnetic fields in a waveguide that has a hollow core and periodically stratified layers in a cladding, from a perspective of reflection and transmission coefficients. In this waveguide, electromagnetic fields are transmitted and reflected at each interface and the reflected and transmitted fields are interfered with each other and form a standing wave as a result. This type of waveguide confines electromagnetic fields due to Bragg diffraction, not the total internal reflection. Electromagnetic fields, on a cross section, must be decayed in the cladding according to a decay ratio for steady traveling. This decay ratio, which is directly related to propagation properties of the electromagnetic field, is determined by reflection and transmission properties only and it does not depend on other parameters like the core width. This means that decay ratio should be determined from the incident condition of electromagnetic fields only, with no dependence of kinds of traveling modes. We numerically show that decay ratios are common among various traveling modes for the TE and TM modes respectively and that they are represented as functions of propagation constant. We also study the waveforms of electromagnetic fields in the waveguide of Bragg diffraction with the beam propagation method and we show electromagnetic fields in cladding are interfered with each other while those in the core travels with no remarkable interference.

1 はじめに

現在では光を信号とする通信技術の発達により、大変効率の良い情報通信が実現されている。光とは、狭義では可視光の波長の電磁波のことを指すが、本稿では電磁波一般を意味するものとする。光は空間内を何よりも速く伝搬するが、これを所望の場所まで伝搬させるためには光導波路が用いられる。光導波路はコアとそれを取り囲むクラッドにより構成されているが、その構造が円対称であるものを特に光ファイバと呼ぶ [1]。

現在では長距離伝搬目的には、石英によるコアとクラッドの境界において、電磁波の全反射を導波原理とする光導波路が用いられている。1970年にコーニング社によって -20dB/km (1km 伝搬して信号強度 1/100) の全反射型光ファイバが実用化されて以来、これまで低損失化の研究開発が進められてきた。現在ではその損失率は理論限界である -0.15dB/km (100km 伝搬して信号強度 3/100) にまで達しつつある。この限界は石英の物性的な性質によるもので、さらなる低損失化を画期的に進めるためには、全反射とは異なる光導波路を用いる必要がある。

その有力な候補の一つがフォトニック結晶光導波路 [2] である。この光導波路は、クラッドに光の波長程度の周期構造を持たせることで、特定の波長の光の進入を禁止する光の禁止帯（フォトニックバンドギャップ） [3] を導波原理とするものである。クラッドにおける周期構造は、空孔を一定の間隔ごとに配置することで実装しているものが多い [4]。光の禁止帯を導波原理とする光導波路では全反射の性質を使っていないため、コアを中空とすることができ、その低損失化を極限まで進めることができる。またコアが石英系の材料による制約を受けないことから、通信波長帯以外の電磁波の伝搬も効率よく行えることが期待できる。

光の禁止帯の概念が発見されるより以前にも、コアを中空、クラッドを屈折率の異なる誘電体の積層構造とすることで周期構造を持たせ、光導波路構造を構成することが報告されている（ブラッグファイバ [5, 6]）。この光導波路は幾何学的に対称性が高い構造であることから、電磁場の伝搬特性を解析的に調べることができるのが大きな特徴である。本稿では誘電体の積層構造によるクラッドを持つスラブ光導波路を、ブラッグ導波路と呼ぶことにする。現在ではブラッグ導波路もフォトニックバンドギャップを導波原理とする光導波路とみなされている。

これまでブラッグ導波路における電磁波の伝搬特性の解析は、コアやクラッド各層境界面における境界条件を課し、周期構造における波動関数の振る舞いに関するブ

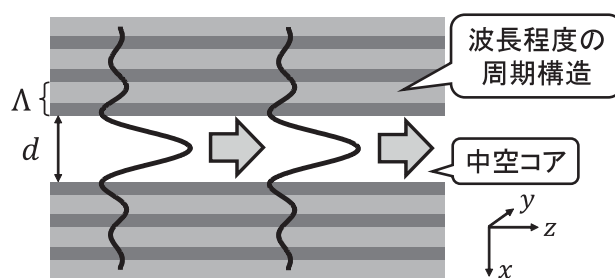


図 1: ブラッグ導波路の概念図。

ロッホの定理 [7] を適用することで調べられてきた。この解析方法によれば、定常状態の電磁場の波形及び波数の伝搬方向成分（伝搬定数）などを求めることができる。ブラッグ導波路ではブラッグ回折により電磁波が閉じ込められているから、誘電体境界面における透過、反射の過程が関係しているはずであるが、しかしながら従来の解析手法ではこれらの性質が明確ではない。

本稿では、ブラッグ導波路内部の電磁波の伝搬特性を、特に反射・透過係数（Fresnel 係数 [8]）の観点から解析する。ブラッグ導波路内部の導波モードの電磁波は、断面積上でクラッドの外へ向かって減衰する定常波を形成するが、その減衰率がコアのサイズや導波モードの種類によらず、伝搬定数の大きさによってのみ決まることを示す。これは減衰率が、屈折率境界面にどのような角度で入射するかという幾何光学的な性質から決まることを意味する。これらの考察は、光導波路を伝搬する電磁波の物理的な性質を明らかにするために大変重要である。

本稿の構成は以下の通りである。第 2 節ではブラッグ導波路を伝搬する電磁波が満たすべき条件についてまとめる。詳細な計算過程は付録 A に記載している。第 3 節において、クラッド各境界面における電磁波の透過・反射係数を与え、光導波路断面積上の波形を示す。第 4 節では、断面積上における波形がクラッド外側へ向かって減衰する割合が、伝搬モードの種類に依存せず、伝搬定数でのみ決まることを数値的に示す。第 5 節において、ブラッグ導波路内部を電磁波が伝搬する様子をビーム伝搬法により解析し、コアおよびクラッドにおける波形がどのように発展するかを調べる。第 6 節において本稿において得られた知見をまとめる。

2 ブラッグ導波路の伝搬特性

図 1 にブラッグ導波路の概略図を示す。コアの屈折率 $n_c = 1.0$ 、クラッド A 層および B 層の屈折率を $n_a = 2.5$ および $n_b = 1.5$ とする。また伝搬する電磁波の波長は $\lambda_0 = 1.55\mu\text{m}$ とし、コア幅を d で表す。クラッド A 層お

よび B 層の厚さをそれぞれ a および b とし、クラッドの周期を $\Lambda = a + b$ とおく。

導波路構造は z 軸方向に一様である場合を仮定し、波数 $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ の z 方向成分 (伝搬定数) を β とすると、 $j(=c, a, b)$ 層における横方向伝搬定数は

$$\kappa_j = \sqrt{n_j^2 k_0^2 - \beta^2} \quad (1)$$

で与えられる。四分の一波長積層条件

$$\kappa_a a = \kappa_b b = \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

が成り立つとき、クラッドにおいて電磁場を効率よく収束させることができる。ここで $n_t = 0.8$ を用いて仮伝搬定数 $\beta_t = n_t k_0$ 導入し、クラッドの構造を

$$a = \frac{\pi}{2k_0 \sqrt{n_a^2 - n_t^2}}, \quad (3)$$

$$b = \frac{\pi}{2k_0 \sqrt{n_b^2 - n_t^2}} \quad (4)$$

のように定める。これは、伝搬定数 β が β_t に等しい場合、電磁波が最も効率よく伝搬する構造に設定することを意味する。

ブラッグ導波路を伝搬する電磁波は、TE モードと TM モードに分類できる。TE モードは電場の z 方向成分がゼロであることが特徴で、電磁場成分の E_y, H_x, H_z のみが値を持つ。一方 TM モードでは H_y, E_x, E_z が値を持つ。ブラッグ導波路内部を安定して電磁波が伝搬するためには、断面積方向成分について、クラッドの外側に向けて減衰する定在波が成り立つ必要がある (→付録 A)。この条件は固有値方程式として与えられるが、TE モード、TM モードまとめて以下のように書ける。S = TE, TM とすれば、

$$\tan \frac{\kappa_c d}{2} = -i \frac{\zeta_a^{(S)}}{\zeta_c^{(S)}} \frac{\kappa_a}{\kappa_c} \Sigma_S \quad (\text{偶対称モード}), \quad (5)$$

$$\cot \frac{\kappa_c d}{2} = i \frac{\zeta_a^{(S)}}{\zeta_c^{(S)}} \frac{\kappa_a}{\kappa_c} \Sigma_S \quad (\text{奇対称モード}), \quad (6)$$

ただしここで

$$\Sigma_S = \frac{\tilde{Y}_S - (\eta_S - \tilde{X}_S)}{\tilde{Y}_S + (\eta_S - \tilde{X}_S)}, \quad (7)$$

$$\tilde{X}_S = \left[\cos \kappa_b b + \frac{i}{2} \left(\frac{\zeta_b^{(S)}}{\zeta_a^{(S)}} \frac{\kappa_b}{\kappa_a} + \frac{\zeta_a^{(S)}}{\zeta_b^{(S)}} \frac{\kappa_a}{\kappa_b} \right) \sin \kappa_b \right] \times \exp(i\kappa_a a), \quad (8)$$

$$\tilde{Y}_S = \frac{i}{2} \left(\frac{\zeta_b^{(S)}}{\zeta_a^{(S)}} \frac{\kappa_b}{\kappa_a} - \frac{\zeta_a^{(S)}}{\zeta_b^{(S)}} \frac{\kappa_a}{\kappa_b} \right) \sin \kappa_b \exp(-i\kappa_a a), \quad (9)$$

$$\eta_S = \text{Re}(\tilde{X}_S) + \sqrt{[\text{Re}(\tilde{X}_S)]^2 - 1}, \quad (10)$$

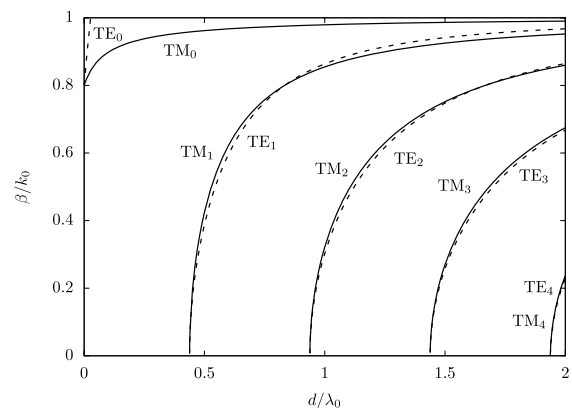


図 2: 伝搬定数のコア幅依存性。破線は TE モード、実線は TM モードを表す。横軸、縦軸の値をそれぞれ λ_0 および k_0 で規格化している。

$$\zeta_j^{(S)} = \begin{cases} 1 & (S = \text{TE}) \\ \frac{1}{n_j^2} & (S = \text{TM}) \end{cases} \quad (j = c, a, b) \quad (11)$$

である。

図 2 に TE モードおよび TM モードについて、伝搬定数 β のコア幅 d に対する依存性を示す。横軸、縦軸は、それぞれ λ_0 と k_0 で規格化されている。この結果より、 TE_1 と TM_1 , TE_2 と TM_2 , TE_3 と TM_3 , ... の各モードの伝搬特性がほぼ縮退しており、特に $\beta/k_0 = n_t$ のとき、これらのモードは完全に縮退していることがわかる。 TE_0 および TM_0 モードに関しては、コア幅 $d \rightarrow 0$ の場合にも電磁波が導波されるモードが存在していることが特徴である [9]。これは、 $d = 0$ の場合には最も内側の A 層が仮想的なコアとなって、導波モードを形成することができるためと考えられる。また、 TE_0 モードが存在する領域には、 $d/\lambda_0 \lesssim 0.0269$ という上限がある。

図 2 より、コアのサイズに応じてどれだけのモードが存在することができるかがわかる。例えば $d = \lambda_0$ のとき、TE モードは二つ、TM モードは三つのモードが存在しうることがわかる。付録 A の (22) 式で与える時空変動因子を用いて、TE モード、TM モードを

$$E_y = U_{tz} F_y^{(\text{TE})}(x) \quad (\text{TE モード}), \quad (12)$$

$$H_y = U_{tz} F_y^{(\text{TM})}(x) \quad (\text{TM モード}) \quad (13)$$

とにおいて、それぞれ $F_y^{(\text{TE})}, F_y^{(\text{TM})}$ の波形を図 3 に図示する。TE, TM のそれぞれのモードにおいて、存在する最低次モードがコアにおいて腹を一つずつ持ち、以降モードの次数が一つ増える度に腹の数が増えることがわかる。また今回は (2) 式の四分の一波長積層条件によりクラッド各層の厚さを決定しているため、誘電体境界面の付近に定在波の節や腹が位置している様子が見られる。

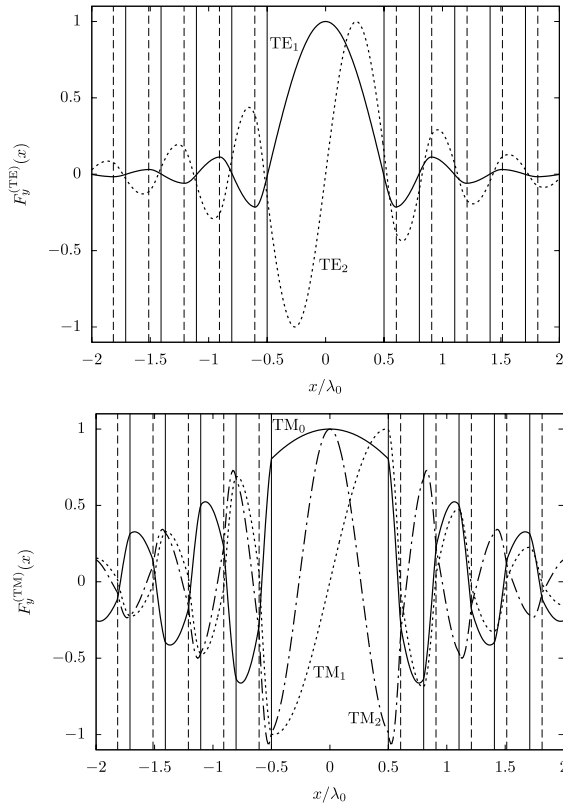


図 3: コア幅が $d/\lambda_0 = 1.0$ のときの電磁場の波形. 上: TE モード, 下: TM モード. 垂直に引かれた実線および波線はコアとクラッド, もしくはクラッドにおける誘電体境界面を示す.

3 クラッド各境界面における透過・反射率と伝搬特性

波動光学においては, 異なる屈折率の境界面において, 境界面と平行な電磁場成分が連続である条件より, 電磁波の反射と透過が起こる割合を与える [8]. 第 m 番目の A 層と B 層の境界面 ($x = d/2 + (m-1)\Lambda + a$) では, TE モードについて付録 A の (29) 式の関係式が得られる. TM モードについても電磁場の H_y と E_z について同様の関係式が成り立ち, これらを変形すると, $S = \text{TE, TM}$ として,

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_{b,m} \\ \tilde{B}_{a,m} \end{pmatrix} = \exp(i\kappa_a a) \begin{pmatrix} t_S & -r_S \\ r'_S & t'_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_{a,m} \\ \tilde{B}_{b,m} \end{pmatrix} \quad (14)$$

が得られる. ここで

$$t_S = \frac{2\zeta_a^{(S)} \kappa_a}{\zeta_a^{(S)} \kappa_a + \zeta_b^{(S)} \kappa_b} = \frac{\zeta_a^{(S)} \kappa_a}{\zeta_b^{(S)} \kappa_b} t'_S, \quad (15)$$

$$r_S = \frac{\zeta_a^{(S)} \kappa_a - \zeta_b^{(S)} \kappa_b}{\zeta_a^{(S)} \kappa_a + \zeta_b^{(S)} \kappa_b} = r'_S \quad (16)$$

は Fresnel 係数を表しており, $\zeta_j^{(S)}$ は (11) 式で与えられるパラメータである. 第 m 番目の B 層と第 $(m+1)$ 番目の A 層の境界面 ($x = d/2 + m\Lambda$) においても同様に,

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_{a,m+1} \\ \tilde{B}_{b,m} \end{pmatrix} = \exp(i\kappa_b b) \begin{pmatrix} t'_S & -r'_S \\ r_S & t_S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_{b,m} \\ \tilde{B}_{a,m+1} \end{pmatrix} \quad (17)$$

が得られる. 以上の表記法では, (32)~(35) 式の基底変換を行っているため, 各電磁場の反射・透過係数全体に位相因子 $\exp(i\kappa_a a)$ もしくは $\exp(i\kappa_b b)$ がかかっていることが特徴である.

また Fresnel 係数の間には

$$t_{(S)} t'_{(S)} + r_{(S)} r'_{(S)} = 1 \quad (18)$$

が成り立つ. ただし $t_{(S)} \neq t'_{(S)}$ であるため, 境界面の表から裏への透過率と, 裏から表への透過率が異なっているように見える. これは電磁波が屈折率境界面を透過する際に電磁波のエネルギー密度が変わることを考慮に入っていないためである [10]. 屈折率境界面で屈折が起こると, 幾何学的にビームの幅が変わるため, 結果としてエネルギー密度が変わる. 実際に, 境界面においてポインティング・ベクトルを計算することで, 両面の電磁場について, エネルギーが保存していることがわかる [11].

4 クラッドにおける電磁場の減衰特性の導波モード非依存性

前節で説明したように, ブラッグ導波路内部を伝搬する電磁波は, クラッドの各境界面において Fresnel 係数による反射・透過を起こしながら進行する. ブラッグ導波路はブラッグ回折が導波原理となっているので, 電磁波の屈折率境界面における反射・透過の性質からのみ決まると考えるのが妥当である.

図 2 に示す通り, ブラッグ導波路コアの幅が決まれば, 一般に伝搬定数の異なる複数の導波モードの存在が決まる. 伝搬定数は波長の伝搬方向成分であるから, 特定のコア幅に対する異なる導波モードは, コア・クラッド境界面に異なる角度で入射することがわかる. 逆に言えば, 異なるモードでもコア幅を変えることで同じ伝搬定数として現れうる (例えば $d/\lambda_0 = 0.689$ のときの TE_1 モードと $d/\lambda_0 = 1.389$ の TE_2 モード, $\beta/k_0 = 0.7$). これらはモード (断面積上の空間分布) は異なるが, コア・クラッド境界面には同じ角度で入射していることになる. 幾何光学的には, コアからクラッドへ同じ角度で入射した電磁波は同じ振る舞いをすると考えられ, 電磁波の減衰率すなわち η は同じになるはずである. クラッド内部

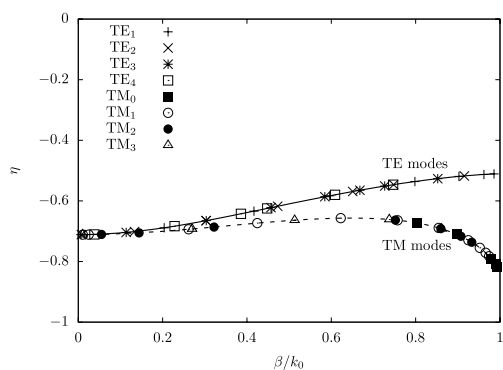


図 4: TE および TM についての様々な導波モードについての伝搬定数 β とクラッドにおける電磁場の減衰率 η の関係。横軸は k_0 で規格化している。

では、電磁波はスネルの法則に従って屈折をしながら、クラッド外側に向かって染み込んでいく。

図 4 に様々なモードについて、 β/k_0 と η の関係をプロットしたものを示す。これより、TE モードと TM モードのそれぞれについて、コアのモード形状が違ってても（腹と節の配置の様子が異なっても）、 β/k_0 の値が同じであれば、同じ η を与えていることがわかる。これは電磁波のコアへの閉じ込めが、クラッドの各境界面における反射・透過の性質にのみよって決まっていることを示している。

5 ビーム伝搬法を用いたブラッグ導波路の波形解析

この節では、ブラッグ導波路内部の電磁場の伝搬の様子を、ビーム伝搬法 [12, 13] を用いて解析を行う。導波路内部の電磁波は、波動方程式に従って発展する。例えば TE モードについて $E_y = \exp(-i\omega t)f(x, z)$ であるとすれば、波動方程式は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f(x, z) = -n^2(x, z)k_0^2 f(x, z) \quad (19)$$

のように書ける。この偏微分方程式に適当な境界条件を課すことで波形の発展の様子を調べることができる。しかしながらこの微分方程式は楕円型であり、数値的に評価する場合膨大な計算時間がかかるなど、解析に困難が伴うことが知られている。

入射側の境界条件として、電磁波が定常状態の波形を保っているとすれば、導波路内部の電磁場の z 依存性は大域的に $\exp(i\beta z)$ であると考えすることは自然な仮定であると考えられる。これはつまり $f(x, z) = \exp(i\beta z)\tilde{f}(x, z)$ と置いた場合、 $\tilde{f}(x, z)$ の z 方向の振動は、くくりだした

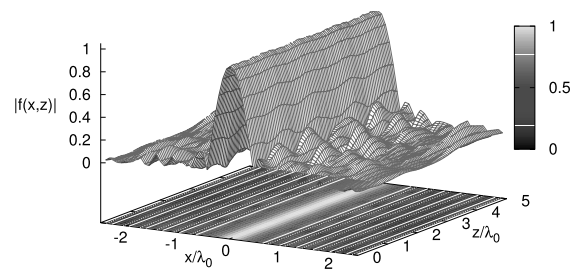


図 5: ブラッグ導波路における電磁場の特性関数の発展の様子。底面における実線および破線は、コアとクラッドもしくはクラッド各層の境界面を表す。

振動因子ほど激しくはないことが期待される。このとき、

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}(x, z)}{\partial z^2} \approx 0 \quad (20)$$

が良い精度で成り立つから、(19) 式は

$$2i\beta \frac{\partial \tilde{f}(x, z)}{\partial z} = \frac{\partial^2 \tilde{f}(x, z)}{\partial x^2} + [n^2(x, z)k_0^2 - \beta^2] \tilde{f}(x, z) \quad (21)$$

のように放物型の微分方程式に近似でき、効率よく解析を行うことができる。以降、 $\tilde{f}(x, z)$ を電磁波の特性関数と呼ぶことにする。

図 5 に TE モードの電磁波について、 $d/\lambda_0 = 0.5$ のときの特性関数の大きさ $|\tilde{f}(x, z)|$ を示す。クラッドにおける周期構造は 10 周期分を設定し、これより外の領域の屈折率は $n_{\text{ex}} = 1.0$ と設定した。また計算領域の端においては、透過境界条件 [12, 13] を課している。ここで設定したコア幅は、図 2 より TE モードのシングルモード動作が実現される構造であるので、TE₁ モードだけが伝搬していることになる。この結果より、コアにおいては z 軸方向にはほぼ一般的な波形が得られているが、それに対してクラッドにおいては、コア領域に比べて振動している様子が見られる。これはクラッドにおいて、電磁波がコアにおける各導波モードの伝搬定数 β からずれている成分があることを示唆している。

前節で述べたように、ブラッグ導波路ではクラッドにおける反射・透過の性質によって導波特性が決まっているが、屈折率の各境界面での反射・透過の過程において、その法線方向の波数成分はスネルの法則に従って関連付けられる一方、境界面と平行な成分である伝搬定数は一定のはずである。実際、コア領域においては長距離の z 方向の発展を経た後でも同じ伝搬定数を保っていることが確認できる。しかしながらクラッドにおいては伝搬定数にずれが生じており、各境界面における反射波・透過波の干渉の結果、解析的に得られているモードとは異なる電磁波が出現している可能性があると考えられる。

6 まとめ

本稿では、中空コアと2種類の誘電体の積層周期構造によるブラッグ導波路における電磁場の伝搬特性を、屈折率境界面での反射・透過係数の観点から調べた。この導波路においては、ブラッグ回折が導波原理であり、クラッド内部において各層境界面での反射・透過過程の結果として、電磁波が断面積上でクラッドの外側へ向かって減衰する定在波を形成している。この減衰率はコアのサイズには依存せず、クラッドへの電磁波の入射条件、すなわち伝搬定数にのみ依存していることが明らかとなった。またブラッグ導波路内部の電磁場の伝搬の様子について、ビーム伝搬法を用いて波形解析を行った。この結果において、コアの電磁波はほぼ同じ伝搬定数を保って伝搬するものの、クラッドにおいては伝搬定数にずれが生ずる様子が見られた。これは電磁波のクラッドにおける反射・透過波が、相互に複雑に干渉し合っている結果であると考えられる。

謝辞

本研究は、科研費（課題番号 17H01981）の助成を受けて行われた。

A ブラッグ導波路における固有値方程式の導出

本節では、ブラッグ導波路において閉じ込め条件を満たしつつ伝搬する電磁波の伝搬定数を与える方程式の導出を行う。伝搬定数は波動方程式において、二階微分方程式の固有値としての役割を果たすことから、ここで導く方程式は固有値方程式とも呼ばれている。

電磁場の角振動数は ω とし、波数の進行方向成分（伝搬定数）が β であるとする、電磁場は共通の時空変動因子

$$U_{tz} = \exp[i(\beta z - \omega t)] \quad (22)$$

をもつ。TE モードの場合、コアにおける電磁場は

$$E_y = U_{tz}(A_c \cos \kappa_c z + B_c \sin \kappa_c z), \quad (23)$$

$$H_x = -\frac{\beta}{\omega \mu_0} U_{tz}(A_c \cos \kappa_c x + B_c \sin \kappa_c x), \quad (24)$$

$$H_z = i \frac{\kappa_c}{\omega \mu_0} (A_c \sin \kappa_c x - B_c \cos \kappa_c x), \quad (25)$$

またクラッドの各層 ($j = a, b$) における電磁場は

$$E_y = U_{tz}[A_{j,m} \exp(i\kappa_j x) + B_{j,m} \exp(-i\kappa_j x)],$$

$$H_x = -\frac{\beta}{\omega \mu_0} U_{tz}[A_{j,m} \exp(i\kappa_j x) + B_{j,m} \exp(-i\kappa_j x)], \quad (26)$$

$$H_z = \frac{\kappa_j}{\omega \mu_0} [A_{j,m} \exp(i\kappa_j x) - B_{j,m} \exp(-i\kappa_j x)] \quad (27)$$

$$H_z = \frac{\kappa_j}{\omega \mu_0} [A_{j,m} \exp(i\kappa_j x) - B_{j,m} \exp(-i\kappa_j x)] \quad (28)$$

のように表される。(26), (27), (28) の各式に現れるパラメータ m は、第 m 番目の A もしくは B 層 ($j = a, b$) であることを示す ($m > 0$ は $x > 0$ のクラッド, $m < 0$ は $x < 0$ のクラッドに対応する)。

屈折率の境界面において、それと平行な電磁場成分は連続である。第 m 番目のクラッド A 層と第 m 番目の B 層の境界 ($x = d/2 + (m-1)\Lambda + a$) における条件より、

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_{b,m} \\ \tilde{B}_{b,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{f}_{ba} & \tilde{g}_{ba} \\ \tilde{g}_{ba}^* & \tilde{f}_{ba}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_{a,m} \\ \tilde{B}_{a,m} \end{pmatrix} \quad (29)$$

が得られる。ここで

$$\tilde{f}_{ba} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\kappa_a}{\kappa_b} \right) \exp(i\kappa_a a), \quad (30)$$

$$\tilde{g}_{ba} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\kappa_a}{\kappa_b} \right) \exp(-i\kappa_a a) \quad (31)$$

である。また

$$\tilde{A}_{a,m} = \exp \left\{ i\kappa_a \left[\frac{d}{2} + (m-1)\Lambda + a \right] \right\}, \quad (32)$$

$$\tilde{B}_{a,m} = \exp \left\{ -i\kappa_a \left[\frac{d}{2} + (m-1)\Lambda + a \right] \right\}, \quad (33)$$

$$\tilde{A}_{b,m} = \exp \left[i\kappa_b \left(\frac{d}{2} + m\Lambda \right) \right], \quad (34)$$

$$\tilde{B}_{b,m} = \exp \left[-i\kappa_b \left(\frac{d}{2} + m\Lambda \right) \right] \quad (35)$$

のように位相変換を行った。同様に第 m 番目の B 層と第 $(m+1)$ 番目の A 層の境界 ($x = d/2 + m\Lambda$) における条件より、

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_{a,(m+1)} \\ \tilde{B}_{a,(m+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{f}_{ab} & \tilde{g}_{ab} \\ \tilde{g}_{ab}^* & \tilde{f}_{ab}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_{b,m} \\ \tilde{B}_{b,m} \end{pmatrix} \quad (36)$$

が得られる。ここで

$$\tilde{f}_{ab} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\kappa_b}{\kappa_a} \right) \exp(i\kappa_b b), \quad (37)$$

$$\tilde{g}_{ab} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\kappa_b}{\kappa_a} \right) \exp(-i\kappa_b b) \quad (38)$$

である。

(29), (36) の両式を組み合わせると、

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_{a,(m+1)} \\ \tilde{B}_{a,(m+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{X} & \tilde{Y} \\ \tilde{Y}^* & \tilde{X}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_{a,m} \\ \tilde{B}_{a,m} \end{pmatrix} \quad (39)$$

なる関係式が得られる。ここで

$$\begin{aligned}\tilde{X} &= \tilde{f}_{ab}\tilde{f}_{ba} + \tilde{g}_{ab}\tilde{g}_{ba}^* \\ &= \left[\cos \kappa_b b + \frac{i}{2} \left(\frac{\kappa_b}{\kappa_a} + \frac{\kappa_a}{\kappa_b} \right) \sin \kappa_b \right] \exp(i\kappa_a a),\end{aligned}\quad (40)$$

$$\begin{aligned}\tilde{Y} &= \tilde{f}_{ab}\tilde{g}_{ba} + \tilde{g}_{ab}\tilde{f}_{ba}^* \\ &= \frac{i}{2} \left(\frac{\kappa_b}{\kappa_a} - \frac{\kappa_a}{\kappa_b} \right) \sin \kappa_b \exp(-i\kappa_a a)\end{aligned}\quad (41)$$

とおいた。

一方、クラッドにおいて屈折率分布は周期的であり、 $E_y|_{x=x}$ と $E_y|_{x=x+\Lambda}$ は同じ微分方程式を満たすはずである (Bloch の定理 [7])。したがって、

$$E_y|_{x=x+\Lambda} = C(\Lambda)E_y|_{x=x} \quad (42)$$

であるが、 $x \rightarrow x + N\Lambda$ (N は整数) の変換において、 $C(N\Lambda) = C^N(\Lambda)$ が成り立つ必要があり、これより

$$C(\Lambda) = \exp(iK\Lambda) \quad (43)$$

と書ける (K は Bloch 波数)。以降 $\eta = \exp(iK\Lambda)$ とおく。このとき

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_{a,(m+1)} \\ \tilde{B}_{a,(m+1)} \end{pmatrix} = \eta \begin{pmatrix} \tilde{A}_{a,m} \\ \tilde{B}_{a,m} \end{pmatrix} \quad (44)$$

が成り立つ。

(39) と (44) の両式を組み合わせると、

$$\begin{pmatrix} \tilde{X} & \tilde{Y} \\ \tilde{Y}^* & \tilde{X}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_{a,m} \\ \tilde{B}_{a,m} \end{pmatrix} = \eta \begin{pmatrix} \tilde{A}_{a,m} \\ \tilde{B}_{a,m} \end{pmatrix} \quad (45)$$

が得られるが、この固有値問題を解くと

$$\eta = \text{Re}(\tilde{X}) + \sqrt{[\text{Re}(\tilde{X})]^2 - 1}, \quad (46)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_{a,m} \\ \tilde{B}_{a,m} \end{pmatrix} = \xi \begin{pmatrix} \tilde{Y} \\ \eta - \tilde{X} \end{pmatrix} \quad (47)$$

であることがわかる (ξ は比例係数)。 η には右辺の符号が負である解もあるが、導波モードでは $x \rightarrow \infty$ の境界条件で電場が発散しないために $|\eta| < 1$ が必要である。したがってこれを満たすために正の符号の解のみを採用している。(44) 式を繰り返し使うと、

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_{a,m} \\ \tilde{B}_{a,m} \end{pmatrix} = \eta^{m-1} \xi \begin{pmatrix} \tilde{Y} \\ \eta - \tilde{X} \end{pmatrix} \quad (48)$$

が得られる。

コア・クラッドの境界 ($x = d/2$) 条件より、

$$A_c \cos \frac{\kappa_c d}{2} + B_c \sin \frac{\kappa_c d}{2} = \xi [\tilde{Y} + (\eta - \tilde{X})], \quad (49)$$

$$\begin{aligned}\kappa_c \left(-A_c \sin \frac{\kappa_c d}{2} + B_c \cos \frac{\kappa_c d}{2} \right) \\ = i\kappa_a \xi [\tilde{Y} - (\eta - \tilde{X})]\end{aligned}\quad (50)$$

が成り立つ。電場分布が断面積上において偶対称のモードの場合 ($B_c = 0$)、 $A_c \neq 0, \xi \neq 0$ である条件から

$$\tan \frac{\kappa_c d}{2} = -i \frac{\kappa_a}{\kappa_c} \Sigma \quad (51)$$

$$\Sigma = \frac{\tilde{Y} - (\eta - \tilde{X})}{\tilde{Y} + (\eta - \tilde{X})} \quad (52)$$

なる固有値方程式が導かれる。電場分布が奇対称のモードの場合 ($A_c = 0$) は、固有値方程式は

$$\cot \frac{\kappa_c d}{2} = i \frac{\kappa_a}{\kappa_c} \Sigma \quad (53)$$

である。固有値方程式に現れる各パラメータは伝搬定数 β を含んでいるので、固有値方程式は β についての超越方程式である。これを解くことにより、導波路断面積上で定常解となる電磁波モードを与える伝搬定数 β が得られる。

TM モード電磁場では H_y, E_x, E_z のみがゼロでない値を持つが、同様に固有値方程式が

$$\tan \frac{\kappa_c d}{2} = -i \frac{n_c^2}{n_a^2} \frac{\kappa_a}{\kappa_c} \Sigma' \text{ (偶対称モード)}, \quad (54)$$

$$\cot \frac{\kappa_c d}{2} = i \frac{n_c^2}{n_a^2} \frac{\kappa_a}{\kappa_c} \Sigma' \text{ (奇対称モード)}, \quad (55)$$

$$\Sigma' = \frac{\tilde{Y}' - (\eta' - \tilde{X}')}{\tilde{Y}' + (\eta' - \tilde{X}')} \quad (56)$$

のように得られる。ここで

$$\begin{aligned}\tilde{X}' &= \left[\cos \kappa_b b + \frac{i}{2} \left(\frac{n_a^2}{n_b^2} \frac{\kappa_b}{\kappa_a} + \frac{n_b^2}{n_a^2} \frac{\kappa_a}{\kappa_b} \right) \sin \kappa_b \right] \\ &\quad \times \exp(i\kappa_a a),\end{aligned}\quad (57)$$

$$\tilde{Y}' = \frac{i}{2} \left(\frac{n_a^2}{n_b^2} \frac{\kappa_b}{\kappa_a} - \frac{n_b^2}{n_a^2} \frac{\kappa_a}{\kappa_b} \right) \sin \kappa_b \exp(-i\kappa_a a), \quad (58)$$

$$\eta' = \text{Re}(\tilde{X}') + \sqrt{[\text{Re}(\tilde{X}')]^2 - 1} \quad (59)$$

である。

参考文献

- [1] A. W. Snyder and J. D. Love, "Optical Waveguide Theory," Chapman and Hall (1983).
- [2] P. St. J. Russel, "Photonic-crystal fibers," J. Light-wave Technol. **24**, 4729 (2006).

- [3] E. Yablonovitch, “Inhibited Spontaneous Emission in Solid-State Physics and Electronics,” *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2059.
- [4] T. A. Birks, P. J. Roberts, P. St. J. Russel *et al.*, “Full 2-D photonic bandgaps in silica/air structures,” *Electron. Lett.* **31**, 1941 (1995).
- [5] P. Yeh, A. Yariv and C.-S. Hong, “Electromagnetic propagation in periodic stratified media. I. General theory,” *J. Opt. Soc. Am.* **67**, 423 (1977).
- [6] P. Yeh, A. Yariv and Marom, “Theory of Bragg fiber,” *J. Opt. Soc. Am.* **68**, 1196 (1978).
- [7] F. Bloch, “Über die Quantenmechanik der Electonen in Kristallgittern,” *Z. Phys.* **52**, 555 (1928).
- [8] J. D. Jackson, “Classical Electrodynamics 3rd. Ed.,” Wiley (1998).
- [9] P. Yeh, “Optical Waves in Layered Media,” Wiley (1988).
- [10] A. Kitagawa, “Quantum description of electromagnetic fields in waveguides,” arXiv:1510.06836 (2015).
- [11] 國分 泰雄,「光波光学」, 共立出版 (1999).
- [12] 山内 潤治, 藪 哲郎,「光導波路解析入門」, 森北出版 (2007).
- [13] 左貝 潤一,「光導波路の電磁界数値解析法」, 森北出版 (2015).