論　文

渋滞現象を記述する数理モデルを題材とした授業実践とその考察

On the practice using the mathematical modeling for the traffic jam

加納　理成・服部　裕一郎・中野　俊幸・佐藤　淳郎・山口　俊博（高知大学教育学部）[1]
山中　貴博（高知大学大学院総合人間自然科学研究科）[2]

KANO Risei, HATTORI Yuichiro, NAKANO Toshiyuki,
SATO Junro, YAMAGUCHI Toshihiro[1] and YAMANAKA Takahiro[2]

1 *Faculty of Education, Kochi University*
2 *Graduate School of Integrated Arts and Sciences, Kochi University*

ABSTRACT

In this paper, we report that the class practices using two kinds of mathematical models for a traffic jam. Firstly, we recall the formulation of mathematical models. We can describe the phenomena with the partial differential equations by the advection equation, because we consider that traffic is the one of flowing. In this model, we can approximate by Lax-Friedrichs approximation to visualize it. On the other hand, the cellular automaton model is another model described by the statement of the small cells. In this model, it is easy for a junior high student to understand it, because it is intuitive expression without the algebraic formula. This class was composed by the cellular automaton model. Moreover, we introduce the partial differential equation model to bring out the interest for progressive knowledge. Finally, we analyze the questionnaire in this class, and we report that result.

1　はじめに

例年, 高知大学教育学部で実施されている教材開発演習（数学）[3 年次対象・必修科目] では, 大学教員が附属学校に赴き, 専門的な内容を元にした授業を行うこととしている. 2017 年度の実施では学部で解析学を担当している加納が授業を行うこととなった. そこで今回の授業内容を作成するにあたって, 私が面白いと感じることを題材にしようと考えた. すなわち, 私の専門分野である「身近な現象を数式を用いて表現（数理モデル化）し, それを解析することで現象が持つ性質を分析したり将来予測に役立てたりすること」をメインテーマにした. さらに, 「中学生にとって知りうる, 身近な現象を扱うこと」「数理モデル化にあたって中学生を納得させせることができること」を踏まえ題材を選ぶことにした. その中でも今回は高速道路や集団避難などの際に起こる渋滞現象を題材とした授業を行うことにした.

2　現象と数理モデル

ここでは, 前節で提示された現象の数理モデル化とその解析について, 2 つの方法を紹介する.

2.1　偏微分方程式による数理モデル

まず, [1] による渋滞を表現する数理モデルの導出について説明する. ある直線的な道路を走っている車を想定する. 時刻 t, 場所 x における車の速度を $u(x,t)$, 交通密度を $\rho(x,t)$ とすれば, 交通量 $q(x,t)$ は,

$$q(x,t) = \rho(x,t) \times u(x,t) \tag{1}$$

と表すことができる.

道路上を区切り, ある任意の区間 $I = [a,b]$ について考える. （道路の向きは a から b の向きを進行方向とする）I 上の車の台数を N とおけば, 交通密度の定義より,

$$N = \int_a^b \rho(x,t)\ dx \tag{2}$$

と表すことができる. また, 時間に対する N の変化量は a から流入してくる量と b から流出する量の差で表せる（保存則）ので,

$$\frac{\partial N}{\partial t} = q(a,t) - q(b,t) \tag{3}$$

となる. (2),(3), および微分積分学の基本定理より,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_a^b \rho(x,t)\ dx = q(a,t) - q(b,t)$$

$$= -\int_a^b \frac{\partial}{\partial x} q(x,t)\ dx \tag{4}$$

となる. ここで区間 I は任意なので, (4) より,

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) + \frac{\partial}{\partial x} q(x,t) = 0 \tag{5}$$

となり, 更に (1), (5) より

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}\big(\rho(x,t)u(x,t)\big) = 0 \tag{6}$$

を得る.

今回の問題では速度は交通密度に依存して変化する場合を想定しているので, $\mathbb{R}$ 上の与えられた非負関数 f を用いて $u(x,t) = f(\rho(x,t))$ とおけば, 渋滞を表現する数理モデルは以下の偏微分方程式で記述される;

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}\left(f(\rho(x,t))\rho(x,t)\right) = 0. \tag{7}$$

2.1.1　モデルの離散化による解析

方程式 (7) に適切な初期条件・境界条件を与えた問題 (P):={(8)–(11)} について考える;

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}\left(f(\rho(x,t))\rho(x,t)\right) = 0, \qquad 0 < x < L,\ 0 < t < T, \tag{8}$$

$$\rho(x,0) = \rho_0(x), \quad 0 < x < L, \tag{9}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\rho(x,t)\Big|_{x=0} = \alpha, \quad 0 < t < T, \tag{10}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\rho(x,t)\Big|_{x=L} = \beta, \quad 0 < t < T, \tag{11}$$

ただし, $0 < T < \infty$, $0 < L < \infty$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とし, ρ_0 は $(0,L)$ 上の与えられた非負関数とする. 方程式 (10), (11) はそれぞれ道路の左右の端からの流入出を意味している.

今回はコンピュータによる数値解析法についてのみ説明し, 一般的に行われる可解性の議論や, 数値解析における解の安定性の議論については省略する. 区間 $[0,L]$ を N 等分し, その分点を

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_j < \cdots < x_{N-1} < x_N = L,$$

とおく. 空間の刻み幅を k とおくと, $k = L/N$ より, $x_j = kj$ となる $(j = 0,1,\cdots,N)$. また, 時間刻み幅を h とおき, $t_i = ih$, $T = Mh$ とおく $(i = 0,1,\cdots,M)$. $R_j^i = \rho(x_j,t_i)$ とおく. 方程式 (8) を時間微分について前進差分の改良である Lax-Friedrichs 差分で, 空間微分に

ついては中心差分で近似する (差分近似については次節に示す) と,

$$\frac{\rho(x,t+h)-\frac{\rho(x+j,t)+\rho(x-j,t)}{2}}{h} = -\frac{f(\rho(x+k,t))\rho(x+k,t)-f(\rho(x-k,t))\rho(x-k,t)}{2k} \tag{12}$$

となる. したがって,

$$\frac{R_j^{i+1}-\frac{R_{j+1}^i+R_{j-1}^i}{2}}{h}+\frac{f(R_{j+1}^i)R_{j+1}^i-f(R_{j-1}^i)R_{j-1}^i}{2k}=0,$$

となり, i について整理すれば以下の漸化式を得る;

$$R_j^{i+1} = \frac{R_{j+1}^i+R_{j-1}^i}{2} - \frac{h}{2k}\big(f(R_{j+1}^i)R_{j+1}^i-f(R_{j-1}^i)R_{j-1}^i\big), \tag{13}$$

ただし, $i=0,1,\cdots,M,\ j=0,1,\cdots,N$. 境界条件について, 仮想的な座標 $x_{-1}=-k$, $x_{N+1}=L+k$ を設定し, 方程式 (10), (11) を中心差分近似すれば, $i=0,1,\cdots,M$ に対して,

$$R_{-1}^i = R_1^i - 2k\alpha,\quad R_{N+1}^i = R_{N-1}^i + 2k\beta, \tag{14}$$

と表される.

2.1.2　差分近似について (c.f.[2])

$h>0$ とする. C^n 級関数 $\varphi(x)$ について, 区間 $(x,x+h)$ に対して 2 次の項までテイラーの定理を用いると,

$$\varphi(x+h)=\varphi(x)+h\varphi'(x)+\frac{h^2}{2}\varphi''(\xi), \tag{15}$$

を満たす $\xi\in(x,x+h)$ が存在する. よって, $h>0$ を十分小さくとれば $\varphi(x)$ の前進差分近似は

$$\varphi'(x)=\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}+O(h), \tag{16}$$

となる. 同様に 4 次の項まで 区間 $(x,x+h)$, $(x-h,x)$ に対してそれぞれテイラーの定理を用いると,

$$\varphi(x+h) = \varphi(x)+h\varphi'(x)+\frac{h^2}{2}\varphi''(x)+\frac{h^3}{6}\varphi''(x)+\frac{h^4}{24}\varphi''(\xi_1), \tag{17}$$

$$\varphi(x-h) = \varphi(x)-h\varphi'(x)+\frac{h^2}{2}\varphi''(x)-\frac{h^3}{6}\varphi''(x)+\frac{h^4}{24}\varphi''(\xi_2), \tag{18}$$

となる $\xi_1\in(x,x+h)$, $\xi_2\in(x-h,x)$ が存在する. 式 (17),(18) について差をとり, $h>0$ を十分小さくとれば $\varphi(x)$ の中心差分近似は

$$\varphi'(x)=\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x-h)}{2h}+O(h^2), \tag{19}$$

となる.

2.2　セル・オートマトンモデル

セル・オートマトンモデルとは, 対象となる現象の起こる領域を 1 つ 1 つのセルに分けてそれぞれに属性を決め, 自身とその周りのセルの情報を元にした時間発展ルールによって様々な現象を記述するモデルのことである. 時間発展ルールの決め方によって色々なモデルを作ることができる. ここでは, [3], [4] で取り上げられた S.Wolfram が交通流の解析のために提唱した 184 モデルについて紹介する. まず, 直線的な道路をセルに分けて, 車両の有無によってセルの属性を決める. 時間発展による車両の進行ルールは以下の通りである.

- 1 つのセルに存在できる車の数は最大 1 台である.
- 進行方向を x 軸の正の向きにとり, 時間ステップが 1 進む度に最大 1 セル分だけ前進できる.
  - 1 つ前のセルに車がいなければ前進できる.
  - 1 つ前のセルに車がれば前進できない.

これらのルールのもとで全てのセルで同時に時間ステップを進めていき, 繰り返すことで交通の流れを解析できる. もし, 時間ステップが 1 進んだとき, 前進できない車が少なくとも 1 台存在するならば, そのときを渋滞と定義する.

このルールのみでは, 道路の端ではセルの情報がないため進むか進まないかの判定が行えない. よって境界条件として以下の条件を付加する.

- 左端のセルにおいて, ある時間ステップのときに車が存在していないならば, 次のステップでは新しい車が侵入してくる.
- 左端のセルにおいて, ある時間ステップのときに車が存在しているならば, 次のステップでは新しい車が侵入してこない.
- 右端のセルにおいて, いかなるときも前進する.

これは解放境界条件と呼ばれている. 以下にこのルールを用いたセル・オートマトンモデルによる移動の例を提示する.

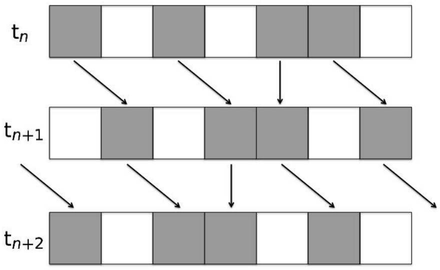

図 1: S.Wolfram の 184 モデル

3　授業・教材について

本授業の目標として, 下記の項目を挙げた.

1. 生徒が現実の問題解決に数理モデルが役に立つことを感じることができる
2. 生徒が大学で学ぶような専門的な数学の知識に触れることができる
3. ICT 機器を活用する

項目 1 および 2 については, 第 1 節で述べた通りである. 項目 3 については, 教育学部門研究プロジェクト「ICT を活用する中学校数学教材及び授業の学部・附属共同開発」の一環として取り入れた.

授業の主な部分は 2.2 節で挙げた渋滞現象のセル・オートマトンモデルによる解析である. 時間経過によるルールを確認したあと, 空間的余裕が渋滞の前と後にある場合についてそれぞれ考察を行う. 最後に 大学で学ぶ専門的な知識を利用した方法として偏微分方程式モデル (2.1 節) を紹介し, 離散化シミュレーションのグラフ変化を提示する.

3.1　授業の展開

授業の展開は以下の通りである. 指導にあたっての留意点を [ ] で記述した.

◎導入 (５分)
♦ 自己紹介
・これまで加納が研究で取り組んだ解析例を具体的に挙げて, 興味を惹きつける.
♦ 渋滞現象の紹介
・廊下が混み合っている写真や高速道路の写真を提示する.

◎展開 I（２０分）
♦ 課題の提示

発生した渋滞を解消するには, どのような進み方をすればよいか考えよう

・個人で予想させる. [これは直感的な予想で構わない.]

- 前の車（人）が先に進めばいい.
- 後ろの車（人）がゆっくりに進めばいい.
- スペースがあればいい.

♦ セル・オートマトンモデルの紹介
・セル・オートマトンモデル を表現した表の読み取り方と, 使い方を説明する.

- 進行方向・車 (人) など, 図の意味
- 進行に関するルール
- モデルにおける渋滞の定義

[用語の定義や作業内容について, 全員が理解できるように留意する.]
♦ 問題 1 の考察
問題 1 は道路上に渋滞が起こったとき

に時間変化とともに, 渋滞がどのように推移するかを考察する問題である.
・セル・オートマトンモデルのルールを確認しながら全体で考察する. [問題 1 が早く終わってしまった生徒には, 周りの生徒に助言をするよう促す.] [時間ステップを進めると渋滞箇所が左に見切れるが, その場合でも渋滞が解消しているわけではないことを全体で確認する.]

◎展開 II（１５分）
♦ 問題 2・問題 3 の考察
問題 1 の考察を受けて, 渋滞の前方に空間的な余裕がある場合

を問題 2 とし, 渋滞の箇所の後方に空間的な余裕がある場合

を問題 3 とし, それぞれ時間変化とともに渋滞がどのように推移するかを考察する.

・個人で考察した後, 近くの生徒と共有する. [早く終わってしまった生徒には, 渋滞が２箇所ある場合などの応用問題を渡し考察させる.]

◎まとめ（１０分）

♦ 展開 II での考察を受けて

- 渋滞の前にスペースが有っても意味がない.
- 渋滞の後ろにスペースがあればいい.
- どれくらいスペースがあればよいのか？
- ３つ連続して混み合っていたらどうなるのか？

♦ 専門数学を用いての解析例の紹介

・渋滞を記述した偏微分方程式について, 事前に準備したシミュレーションの結果についてグラフの推移を提示する. [時間の変化, 場所の変化が関数領域で学習する『変化の割合』を表していることに触れ, 変化の割合の一般形である微分を使って数式で表現できることを伝える.]

♦ アンケートの実施

3.2　アンケート

授業実施後, 以下の項目についてアンケート調査を行う.

1. 今日の授業は面白かったですか？
2. 今日の授業ではセル・オートマトンモデルを用いて考えましたが、このモデルは渋滞の様子を表現できていると思いますか？
3. 数学を使って身の回りの出来事の仕組みを解決してみたいと思いますか？
4. 今日の授業では大学で扱うような専門的な内容を元にしていますが, このような授業を他にも受けてみたいですか？
5. 今日の授業について感じたことを何でも書いてください.

問 1 については, 1. 面白かった, 2. 少し面白かった, 3. あまり面白くなかった, 4. 全然面白くなかった, の 4 段階, 問 2,3,4 については, 1. そう思う, 2. 少しそう思う, 3. あまりそう思わない, 4. 全然そう思わない, の４段階で回答してもらい, 問２と３は自由記述欄を設けた.

このアンケートにより目標 1 および 2 が達成できていたのか確認する.

4　実際の授業と考察

授業の概要は以下の通りである.

対象： 高知大学教育学部附属中学校 3 年 D 組 35 名

日時： 2017 年 12 月 8 日（金）第 5 校時 (13:30〜14:20)

授業者： 加納理成　（TA:山中貴博・村上諒）

まず, 実際の授業の様子について述べる. 多くの専門的な用語を取り扱うため, それらの意味や扱い方については細心の注意をした. これによって, それぞれの問題 1, 問題 2, 問題 3 での個人の考察についてはつまづきも少なく順調に取り組むことができた. その反面, 几帳面な性格の生徒が多く, セル・オートマトンを表現するためのマス目を丁寧に塗りつぶす場面が多々あった. 初対面の生徒であったため特性を理解できていなかったことが原因ではあるが, マス目の数を調整したり, セル・オートマトンの表現を黒く塗りつぶすことから丸印に変えるなどの改良を加えるべきであると感じた. 最後の微分方程式による解析のところでは, 中学校の授業で学習する変化の割合がモデルの導出に大きく寄与していることを伝えたかったのだが, 時間の関係で説明を省略せざるをえなくなってしまったのが残念である. 授業では電子黒板とホワイトボードを併用して進めた. 各自問題に取り組む際にセル・オートマトンの進行ルールを常に提示したままにできており, 全体でのルール確認は 1 回限りであったが特に問題は起きなかった. また, 最後に偏微分方程式の数値シミュレーションを見せたことによって, 時間によって変化するグラフという多変数関数を印象づけることができ, 専門的な内容に興味を持たすことができたと感じた.

次に, アンケート結果についてまとめる. 総回答数は 34 件で, 各々の回答数とその割合は以下の表の通りである.

	1	2	3	4
問 1	14 (41%)	16 (47%)	4 (12%)	0 (0%)
問 2	13 (38%)	12 (35%)	8 (12%)	1 (3%)
問 3	13 (38%)	14 (41%)	2 (6%)	5 (15%)
問 4	14 (41%)	8 (24%)	10 (29%)	2 (6%)

「問 1. 今日の授業は面白かったですか？」については, 好意的な回答が 8 割を超えており, 題材の選び方に問題がなかったと考えた.

「問 2. 今日の授業ではセル・オートマトンモデルを用いて考えましたが、このモデルは渋滞の様子を表現できていると思いますか？」について, 少しだけ否定的な回答があるが自由記述欄を確認すると, 車の個体差などが除外されモデルが簡略化されていることに対する疑問が含まれていた. これは数理モデルを扱った授業としては

発展的な内容にまで興味関心が及んでいることを表していると考えた.

「問 3. 数学を使って身の回りの出来事の仕組みを解決してみたいと思いますか？」についても好意的な回答が 8 割近くあり, 生徒が数学の有用性を感じ取っていると言える. 自由記述欄においても多岐に渡る分野の事象が挙げられており, 学びへの意欲の高さを感じ取れた.

「問 4. 今日の授業では大学で扱うような専門的な内容を元にしていますが, このような授業を他にも受けてみたいですか？」について, 他の問と比べて否定的な回答が多くあったが, 他の回答の傾向から考えるともう少し具体例を挙げるなどの問いかけの工夫が必要であると考えた.

「問 5. 今日の授業について感じたことを何でも書いてください.」について, ”意外なところも数学の考え方を利用したら解決できることが分かりました.”や, ”日常の中にあるものに対して規則性を見つけようとするのは面白いと感じました.”という回答から, 多くの生徒が数学の有用性を感じていると考えた.

これらの考察から, まだまだ改善点は多くあるが, 本授業の目標として挙げた「生徒が現実の問題解決に数理モデルが役に立つことを感じる ことができる」「生徒が大学で学ぶような専門的な数学の知識に触れる ことができる」「ICT 機器を活用する」については達成できたと考えている.

謝辞

高知大学教育学部附属中学校の橋口和恵先生には本研究のために貴重な授業実践の場を提供していただき, 心からの感謝を表す.

また本研究は, 教育学部門研究プロジェクト「ICT を活用する中学校数学教材及び授業の学部・附属共同開発」（平成２８年度〜平成３０年度）の研究成果の一部である.

参考文献

[1] R. Harberman, 『交通流の数学モデル』, 現代数学社, 1981.

[2] 洲之内治男, 石渡恵美子, 『数値計算 [新訂版]』, サイエンス社, 2002.

[3] 長山雅晴, 『漸化式を使っていろいろな現象を数学にしてみよう！』, JST「数学と諸分野の協働によるブレークスルーの探索」領域 生理学と協働した数理科学による皮膚疾患機構の解明 2014 年度実践資料, `http://www.jst.go.jp/crest/math/ja/caravan/20141129_Mito/2-Nagayama.pdf`, 2017/11/01：閲覧.

[4] 宮入洋介, 『交通流解析における流体モデルとセルオートマトンモデルの比較』, 新潟工科大学情報電子工学科卒業論文, 2003.