論　文

課題研究における数学的な探究活動の指導と評価

－グラフの *n* 筆書きをテーマとした探究－

On instruction and evaluation of mathematical inquiry in project study: the case of inquiry into *n*-cursal graphs

袴田　綾斗（高知大学教育学部）[1]

HAKAMATA Ryoto[1]

1 *Faculty of Education, Kochi University*

ABSTRACT

This paper reports about a practical study on mathematical inquiry carried out by high school students in the context of the *kadai kenkyu* (project study). In this paper, I focus on a group of four students and describe their inquiry-based activity with the intention of obtaining suggestions for instruction and evaluation of inquiry-based activities. The group studied on the “multicursality of graphs”. This theme is located in the graph theory and this theory is included in the domain of discrete mathematics. In graph theory, the topic of unicursal graph is classical and famous. The group developed this topic and posed research questions “What kind of graphs are bicursal?” and then “What kind of graphs are *n*-cursal?”.

In this paper, I describe the inquiry carried by the group together with the teacher’s instruction. Then, the way of instruction and evaluation of inquiry-based activity is examined. As a result, followings are clarified: 1) For instruction and support, we should give directions by presenting specific examples of themes so that students can pose research questions; 2) It is useful to select graph theory (discrete mathematics) as an example of a theme; 3) Formative evaluation that values mathematical viewpoints and thinking can be very important; 4) There is a possibility that a fixed way of thinking about "goal-oriented evaluation" limits mathematical thinking that students may activate in their inquiry.

Ⅰ．はじめに

高大接続改革や新学習指導要領の告示など昨今の教育改革の動向を受け，高等学校における探究活動への期待が高まっている（文部科学省，2016a，2016b，2018）。高等学校数学科における探究活動にはすでに様々な実践例があるが，扱う題材や生徒の活動内容に関する事例報告がほとんどであり，その活動に関わる教員の在り方に関する議論は少ない。しかしながら，高校生が意義ある探究活動を展開するにあたっては，教員の介入は不可欠な要素である。本稿では，探究活動の事例として，高等学校の課題研究における「グラフの n 筆書き」をテーマとした探究を取り上げ，その活動に対する教師の指導や支援の在り方，およびその評価について検討する[1]。また，「探究」に関する知見として，数学教育研究において近年注目を集めている「世界探究パラダイム」と呼ばれる教育に関するパラダイムにも触れ，その視点から本事例の特徴を記述する。

Ⅱ．探究活動の内容

本稿で対象とする探究活動は，スーパーサイエンスハイスクール（SSH）に指定されている国立大学附属高等学校において，教育課程に位置づけられた学校設定科目「課題研究（1単位）」のもと，第2学年の生徒4名からなるグループによって約1年の間行われたものである。

生徒は，グラフ理論における古典的なテーマである一筆書きの判定法に興味を持ち，それを発展させて「グラフが n 筆書き可能かどうかの判定法はあるか」という問いを設定して探究を進めていった。その過程の概要は以下の通りである：

1）グラフ理論の入門的な書籍を輪読し，基本的な概念や用語を理解した。また，一筆書きの数学的な証明が記載されている文献を探し，グループで読み進めて理解した。
2）二筆書きの判定法が存在するか否かを調べるために，二筆書きができるグラフをいくつも作り，共通点や規則性を探した。見つけた規則性から，グラフが二筆書き可能であるための必要十分条件に関する予想を立て，証明した。
3）さらに，一筆書きと二筆書きの判定法に関する規則性から，n 筆書き可能であるための必要十分条件に関する予想を立て，証明した。

以下では，この過程について教員の関わり方も含めて詳細に述べていく。なお，以降の記述のために参照した資料は，生徒の研究ノートおよび筆者のフィールドノートである。

1．テーマの選択と問いの設定

学校設定科目「課題研究」では，研究のテーマに関わらず，生徒に対して活動当初に「研究課題（リサーチ・クエスチョン）」を設定することを求めている。そこで生徒は，自身の興味・関心に応じて研究のテーマを選択し，理科や数学科の教員と相談の上，研究課題（リサーチ・クエスチョン）を設定することとなる。

筆者が担当したグループは，当初「数学に関する研究をしてみたい」という希望はあったものの，特に関心のあるテーマがあるわけではなかった。筆者は自身の経験から離散数学，特にグラフ理論の領域であれば，高校生であっても研究活動ができるだろうと考えており，生徒が初めて相談に来た段階でグラフ理論の話題を提供し，一筆書きの判定問題を含むいくつかの問題について紹介した。また，自分たちでインターネットなどを使ってグラフ理論について調べ，研究テーマとして選択できそうな題材を探してみることを薦めた。

一筆書きの判定法に興味を持った生徒は，「二筆書きの判定法はあるか」という問題を調べてみたいと持ち掛けてきた。この段階では，「グラフが二筆書き可能である」ことの数学的な定義などは無意識的であいまいなままであったが，すでに問いが設定できており，研究課題として明確にできそうであったため，このテーマについて探究を進めることとなった。

2．基本的な概念や用語の理解

探究を進めていくためには，研究課題を数学的に定式化し，予想やその証明を数学的な表現で記述しなければならない。そこで，グラフ理論の基本的な概念や用語を知るために，筆者から入門書の輪読を行うことを提案した。グラフ理論に関する書籍は当該の学校の図書室や数学科の教材室にもいくらかあったため，生徒はこれらの文献から教科書となりそうなものを選ぶことにした。しかし，手に取ったものは数学の専門書として書かれているものがほとんどであり，集合や論理記号が駆使されていたり，文体がやや硬かったりしたため，取り組みづらい様子であった。

この輪読の段階は，それ自体が目的ではなく，探究にスムーズに入るための段階として位置づいていた。確かに，数学の専門書を丁寧に読み進めたり，基本的な定理の証明を自分たちでわかるまで考えたりする活動には価値がある。その一方で，この探究は課題研究という枠の中で行われており，そこには限られた時間という大きな制約がある。このような状況を鑑みて，筆者はより入門的で初学者にもわかりやすい書籍を用いることとした。実際には，学校の図書室等には適切と思われる図書が見つからなかったため，大学の図書館で入門書（小林，2013）を探し，その必要な部分を複写して生徒に配布した。

輪読は，節などの区切りごとに担当者を決め，予習をしてきた担当者が黒板を用いて説明する形で進められた。ここでは，グラフの定義や，特徴的なグラフの名称（例えば，パス，サイクル，ツリー，完全グラフ，二部グラフなど），

そして，頂点数や辺の本数に関する基本的な定理などについて学習した。

３．一筆書きの判定法の数学的な証明の理解

上述の通り，生徒が探究した問いは，一筆書きの判定法を発展させたものであった。一筆書きの可能性は，そのグラフにおける奇点の数を調べれば判定することができ，実際には「グラフが一筆書き可能である⇔奇点が０個または２個である」という命題によって定式化される。ここで，奇点とは，そこに集まる辺の本数が奇数であるような頂点のことである。このように，その図にかかれている点や線分の数を調べることによって判定できるため，判定法の主張自体は中学生にも理解できる程度である。

しかしながら，これを数学的に証明することは簡単ではない。「p と q は同値である」という命題を証明することになるため，必要条件や十分条件という概念の理解が必要であり，頂点数や辺の本数が任意であるため，図にかき下せないという抽象性が伴う。また，証明の中身には背理法が用いられる場面もある。一筆書きの判定法自体は広く知られているが，それが数学的な命題として表現されたり，証明が付されたりすることがほとんどないのはこのためであると考えられる。

生徒は，二筆書きの判定法を数学的に定式化し，それを証明するために，まず一筆書きの判定法の証明を理解することにした。輪読のための書籍を探しているときに，一筆書きの判定法の数学的な証明に触れている文献（マトウシェク・ネシェトリル，2012）を見つけていたため，これに記載されている「奇点が０個のグラフ（オイラーグラフ）は一筆書き可能であり，かつ，その一筆書き経路の始点と終点は一致する」という定理の証明について，グループ内で読み合わせながら理解を進めていった。

上記の文献に記載されていたのは，奇点が０個の場合に関する判定法の証明だけであった。一方，一筆書きは奇点が２個のグラフ（準オイラーグラフ）でも可能である。奇点が２個の場合の証明を記載している文献が見当たらなかったため，生徒は自分たちで証明を考えることにした。実際に証明を考えていくと，「奇点が２個という条件を満たす任意のグラフ」はやはり一般性が高く，探究が進まない様子であった。そこで筆者から「奇点が２個のグラフから奇点が０個のグラフをつくって，そこで得られる一筆書き経路を“うまくもとのグラフ（奇点が２個）に持ち帰る”ことはできないか」とアドバイスを出した。このアドバイスに対して，生徒からは「２個の奇点をくっつけて１つにする」「２個の奇点を辺で結ぶ」などのアイデアが出てきた。これらのアイデアのもと，グループで試行錯誤をしながら，後者のアイデアから考察を進めることで，奇点が２個の場合の証明も完成させることができた。

４．二筆書きの判定法の予想とその証明

一筆書きの判定法の証明が完成した段階で，すぐに二筆書きの判定法の考察に入った。研究課題が「二筆書きの判定法はあるか」であったことを確認し，まずは証明すべき命題を予想しなければならないことを共有した。そこで，筆者から「二筆書きが可能なグラフをとにかくたくさん作ること」を課題として提示し，１週間時間をとって各自で取り組ませた。その後，生徒から「奇点が４個だったらいけそう」という予想が提示されたため，予想される判定法を「グラフが二筆書き可能である⇔奇点が４個である」という命題として定式化し，証明に取り組んだ。

この予想の証明にあたって，生徒は一筆書きの際に用いたアイデアを適用しようとした。ここではその詳細については記述しないが，その方針は「奇点が２個のグラフ（一筆書き可能）から奇点が４個のグラフを構成することで，二筆書きの可能性を示すことができないか」というものであった。このアイデアのもと，グラフ内のある偶点を分割して２つの奇点にする方法などが考察されたが，証明を進めることはできなかった。確かに，既知のものから未知のものを構成する，というアイデアであったものの，この方法では奇点が４個であるという条件をみたす「任意の」グラフについて考えることが難しい。生徒がみずからこのことに気づくのは困難であろうと判断し，こちらからその難しさを説明した。

筆者からの説明の後，生徒は奇点が４個であるような「任意の」グラフからスタートし，そこから既知のグラフへと帰着させることを考えた。すると，一筆書きの証明の際に用いたアイデアをそのまま適用することができた。すなわち，奇点同士を結ぶ新たな辺を加えると，４個であった奇点が２個になり，一筆書きが可能な既知のグラフに帰着できる，というアイデアである。論理のギャップが生まれないように，いくつか注意すべき点はあったものの，このアイデアのもとで大きくつまずくこともなく証明を完成させることができた。

５．*n* 筆書きへの発展

二筆書きの判定法についての証明が完成したため，最初に設定した研究課題に対する結論は得られた。しかし，生徒はここで探究を止めることはせず，そのまま n 筆書きの判定法についての考察を進めた。

二筆書きの際には，予想を立てる上で実験を行ったが，n 筆書きの場合には生徒はすぐに予想を立てることができた。すなわち「グラフが n 筆書き可能である⇔奇点が $2n$ 個である」という予想である。しかしながら，この証明は前段階と比べて考察対象の任意性がより高くなっている。「任意の」自然数 n に対して，奇点が $2n$ 個であるような「任意の」グラフを考えなければならないからである。特に，自然数の任意性に関しては，無限を対象とした証明が必要になり，数学的帰納法を用いる必要がある。この時期

にはまだ未習であったため，筆者から「このような場合には数学的帰納法という証明法を用いることができるから，調べてみよう」と指示を出した。グループの中にはすでに数学的帰納法を知っている生徒もおり，インターネットで調べたり数学Ｂの教科書を読んだりしながら，その生徒を中心にして数学的帰納法について学習していった。

数学的帰納法において肝心なのは，「$P(k) \Rightarrow P(k+1)$」（$P(n)$ は自然数 n についての命題）を示すときに，$n=k$ の場合と $n=k+1$ の場合との関係をうまく用いることであろう。具体的には，$n=k+1$ としたときの対象を，$n=k$ の場合の対象から構成する方法を見つけたり，$n=k$ の場合と $n=k+1$ の場合との間に成り立つ関係式をつくったりすることが解決の糸口となる。今回の探究では，「１つ前（既知）からその後者（未知）を構成する」という方法には既に慣れていた。そのため，数学的帰納法を用いた証明は困難を感じることなく完成させることができた。

数学的帰納法による証明は，上記の予想のうち「奇点が $2n$ 個である⇒グラフが n 筆書き可能である」という命題に用いられたものである。「グラフが n 筆書き可能である⇒奇点が $2n$ 個である」という命題については，この対偶命題を考えることで容易に証明することができた。

Ⅲ．探究活動の指導・支援に関する考察

これまでに，探究活動の内容やその過程について，担当教員である筆者の関わり方も含めて記述してきた。以下では，この事例から得られる示唆について考察していこう。

１．研究課題の設定について

研究課題の設定にあたっては，生徒の主体性を尊重することが大切である一方，少なくとも「高校生が探究可能な問いであること」と「数学的に何らかの価値のある問いであること」という２つの条件を満たしていなければならない。前者が満たされていなければ，そもそも探究が不可能になってしまうし，後者が満たされていなければ，表面上は活動していたとしても「探究」と呼ぶべきものではなくなってしまうだろう。ただし，後者については新規な結果を要求するものではない。すでに知られている事実であっても，それを生徒が自分なりの考え方で再発見したのであれば，数学的活動としての価値を十分に認めることができる。

これらの条件を満たすような研究課題を設定させるためには，生徒に課題設定のすべてを委ねるのではなく，指導・支援に当たる教員がテーマや問いについて具体例を示すなど，示唆を与える必要があるだろう。今回の事例では，テーマの選択にあたって，グラフ理論におけるいくつかの題材を紹介した。「離散数学，特にグラフ理論の領域であれば，高校生であっても研究活動ができるだろう」と考えていたことはすでに触れたが，上記の条件を満たすような題材として，グラフ理論（離散数学）は有効な領域の１つであると考えられる。

実際に，景山（2007）は，離散数学の諸問題に共通する特徴として次の４つを挙げ，高等学校数学の教材として離散数学を取り入れることの有効性を主張している（p.11）:

1) 問題解決の前提となる知識や技能が少なくて考えられる場面を設定できる。
2) 能力（アイデア）に応じて多様な解法が考えられる。
3) 身近な事象，特に，社会的事象から題材を得やすい。
4) アルゴリズムの開発が中心的な課題の一つである。

本事例の探究についても，これらの特徴のうち，３点目までが有効に働いていたといえるだろう。

以上の有効性に加え，グラフ理論の問題は What-if-Not?（ブラウン・ワルター，1990）などの方略によって生徒自身が問題設定をしやすいという特徴がある。実際に，一筆書きの判定法からは二筆書きの問題だけでなく，ハミルトンサイクルの問題（辺ではなく頂点の一筆書き），二重書きの問題（辺を２回まで重複してよい一筆書き）など，さまざまな問題をつくることができる。そして，問題設定のしやすさは，高校生でもオリジナルな結果を出しやすいという有効性にも直接的につながり得る。今回の n 筆書きの判定法についても，インターネット上などにその主張（命題）を見ることはできるが，その証明が載せられている日本語の文献は，管見の限り見当たらなかった。この意味で，高校生が探究活動によってその証明を完成させることができたことには，大きな価値があるだろう。

以上のように，研究課題の設定にあたっては，教員がテーマの具体例などを示して方向性を示唆する必要があるが，その際には，生徒自身が問題をつくることができ，かつ，多くの予備知識を必要としない離散数学が有効な題材の１になり得る。

２．探究方法の提供について

① メディアの提供

探究活動の際，情報を得るためのメディアには書籍や文献の他に，インターネットなどの電子メディアがある。近年の目覚ましい技術の発展により，インターネットでは学術情報にすら容易にアクセスすることが可能になった。これは，高校生が（小学生や中学生でも）探究活動をする上で，非常に強力なツールとなることを意味する。今回の事例においても，インターネットを用いた情報収集がいつでもできるよう，グループで活動する際には常にノートパソコンを１台用意するようにしていた。

インターネットを用いることができる環境を用意することは，生徒の「自分たちの研究（探究）はすでになされているものなのか，あるいは何らかのオリジナリティがあるものなのか」という関心を促進したとに考えられる。当然ながら，課題研究の初めからこのような関心があったわ

けではなく，筆者を含む教員の働きかけもあった。しかし，成果報告会などの活動の節目にあたって，生徒自身で先行研究を調べたり，研究課題の正当性を記述しようとしたりするなかで，自律的に研究の新規性を意識するようになってきた。これは，探究における望ましい態度が形成された証左であると考えられる。

また，インターネット環境以外にも，書籍や論文などの文献情報も積極的に提供すべきだと考える。上述のように，情報の収集能力それ自体も本来の研究活動で問われる力ではあるが，高校生に許される時間的な制約を踏まえれば，基本的な情報は教員がやや先回りして与えてもよいのではないだろうか。しかし，今後，探究活動への期待が高まっていけば，教育課程において探究活動に割り当てられる時間も増加するだろう。そのときには，基本的な情報の検索や収集にも時間をかけ，試行錯誤できるような場を設定することが望ましいと考える。

② 数学的な知識・内容に関する情報の提供

本事例では，グラフ理論（離散数学）というテーマの特性もあり，証明中に数学的帰納法を必要とする場面があった。前節で述べたように生徒にとっては未習の内容であったが，教員の側から数学的帰納法という証明法があることを知らせた。一方で，この証明法について筆者が解説することはしなかった。その結果，インターネットや教科書を調べ，わからないところはグループで聞き合ったり教えあったりする活動が行われた。このように，未習事項であっても積極的に情報を提供することで，主体的な理解と活用とを促すことができるだろう。ただし，情報提供の際には，生徒が調べればわかること，あるいは生徒たち自身で考えられる範囲のことについて，教員が「解説者」にならないことが大切である。

数学的な知識や内容に関する情報の提供以外にも，教員の側から指示やアドバイスを出す場面があった。例えば，前節で，二筆書きの判定法の予想を立てる際に出した実験の指示である。数学では命題の証明と同様に命題の予想が大切であるが，通常の授業では「成り立つとわかっているもの」が命題として与えられ，その証明を考えたり表現したりする場面がどうしても多くなってしまう。命題の予想を立てるために，１授業時間，あるいはもっと長い時間をかけて実験や観察を行うことは，望ましいことではあるが実際には難しいことであろう。本事例で探究活動を行った生徒に関してもこのことは同様であり，条件を満たすような数学的対象を可能な限り挙げて，そこに共通する性質を見つけ出す，という作業は，生徒自身では自然に思いつかないであろうと考えた。そこで，筆者から実験の指示を出し，具体例に共通する性質を命題として抽出する活動を１週間の時間をかけて行わせた。

このように，課題研究を始めとした探究の時間には，通常の授業では「させたくてもできない」ような数学的活動を仕組むことができる。「させたくてもできない」活動であるがゆえに，生徒にとってはあまり経験したことのない活動になることが多いだろう。したがって，教員の支援としては，まずはそのような活動を具体的に指示する必要があると考える。

Ⅳ．探究活動の評価に関する考察

１．探究活動の目標と評価の対象

今後，その重要性がますます大きくなっていくと期待される探究活動について，評価の在り方を考えるとき，その探究活動がどのような目標のもとに設定されているのかが問われなければならない。そして，その目標とは，簡潔にまとめれば「資質・能力の育成」ということになるだろう。

資質・能力の育成という目標のもと，カリキュラムの構成原理も「内容ベース」から「資質・能力ベース」へと変化した。そしてこの変化に伴い，「学習とは何か」という学習観（目標達成の方法）も「文化遺産の伝達」から「文化的実践への参加」へとシフトする必要がある（石井，2018）。そして，探究活動が学習の方法かつ内容として重要な位置を占め得るのは，そこで展開される活動が文化的実践への参加に他ならないからであると考えられる。

探究活動の位置づけをこのように捉えたとき，そこで評価されるべきは，文化的実践への参加の度合い，あるいはその文化的共同体における熟達の度合いであろう。石井(2015）は，パフォーマンス評価について，そこで何を評価するのかということに関して，「学習者の思考過程について，問題把握の的確さ，判断の際に重視している視点の包括性や妥当性，いわばプロ（熟達者）らしい思考ができている程度（熟達度）を評価するのです」(p.59）と述べている。そして，「実践場面での判断や行動に表れる，その道のプロらしい思考の枠組み」(p.60）として，教科の特質に応じた「見方・考え方」を捉えている。

探究活動の評価対象について，その目標にさかのぼって考察してきた。その結論としてここで主張されるのは，評価の枠組みとして最も重要視すべきは「数学的な見方・考え方」だということである。「数学的な見方や考え方」は現行の学習指導要領でも評価観点に設定されているものであり，かつ，新学習指導要領では教科目標の冒頭に書かれている文言である。したがって，評価枠組み（観点）としてそれが重要なことは自明であるかもしれない。しかしながら，以上で明らかになったのは，数学的な見方・考え方の枠組み（観点）を通して文化的実践への参加の度合いを評価する，ということであり，見方や考え方の捉え方がより具体的になったといえるだろう。

２．評価の方法

評価の対象をこのように定めたとき，その方法としては，上記でも参照したパフォーマンス評価が有効であろう。これは，あらかじめ作成した「文化的実践への参加の度合い」の観点と水準－ルーブリック－を用いて，学習者の実践（パフォーマンス）を評価するものである。

しかし，探究活動に焦点を当てれば，基準や水準に基づいて「評定（１，２，３などの数値やA，B，Cなどの段階による水準の高低）」を付ける評価だけではなく，「そこでどのような見方・考え方が働いたのか」を価値づける評価が重要である。なぜならば，探究活動では（自分たちにとっての）未解決な問題に試行錯誤的にアプローチするのが普通であり，そこでは見方・考え方は意識的に「働かせる」ものではなく，ほとんど無意識的に「働かせてしまう」ものであることが多いからである。特に，その文化的実践に熟達していないものにとっては，意識的に「これから○○に着目して，□□という考え方をしてみよう」と考えて探究を進めることは難しいだろう。したがって，探究活動を評価する際には，例えば「いまの考え方は，既知のものから未知のものをつくる『方法』に着目して，その方法がいつでも使えるという『一般性』を使ったんだね」など，そこで無意識的に働かせてしまった見方・考え方を価値づけ，それを表現して生徒に伝えることが大切である。あるいは，「いま，どんなふうに考えましたか？」と問いかけることによって，見方・考え方を意識的に振り返らせる方法も考えられる。

課題研究における探究活動は，小人数かつ長期間にわたって行われることが多いため，通常の授業と比較して，一人ひとりの生徒の様子を詳細に観察することが容易になるだろう。節目ごとのパフォーマンス評価だけではなく，上記のような「価値づけ」の評価を形成的評価として取り入れ，探究活動の質の向上（＝文化的実践での熟達化）を目指していきたい。また，このような評価を積み重ねていくことで，パフォーマンス評価などの評定を付す評価についても変容が期待できるだろう。

３．評価に関する問題提起

探究活動は試行錯誤的なものであり，そこで働く数学的な見方・考え方はあらかじめ予期しきれない。このことを踏まえると，「目標に準拠した評価」への（過剰な）固執に警戒が必要であることが指摘される。すなわち，目標に準拠した評価を意識しすぎるあまり，「あらかじめ設定された到達目標」と「その目標に到達させるための目的的な指導・学習方法」，そして「目標に基づく評価」，という３点を固定化して考えてしまうと，探究活動の適切な評価ができないばかりでなく，真正な活動を妨げる可能性すらある。なぜなら，すでに述べたように，探究活動の方向性はあらかじめ予期しきれるものではなく，その時々で働いている数学的な見方・考え方は，熟達者である教員から見たときには非合理的であっても，探究の実践者である生徒にとっては常に合理的とみなせるからである。あらかじめ設定された目標とそれに基づく指導・評価は，そのような探究の場面をノイズとして切り落としてしまう可能性がある。したがって，探究活動の評価を考えるにあたっては，事前に設定された目標や評価項目（ルーブリック）を参考にしつつも，常に新たな見方・考え方に開かれている必要がある。

Ⅴ．数学教育研究における探究の視点からの考察

本節では，近年，わが国の数学教育研究において注目されている「世界探究（questioning the world）」パラダイムと呼ばれる教授[2]パラダイムについて，シュバラール（2016）を参照しつつ概説し，このパラダイムの視点から本事例について考察を加えていく。

１．世界探究パラダイム

まず，教授パラダイムとは「勉強されるべきもの（教授争点 *O*[3] になりうるもの）やそれらを勉強する形態となるもの［つまり広い意味での学習方法］を暗黙裡にではあるが規定する規則の集合」(p.74，［］内筆者加筆）のことである。例えば，現在の日本という状況では，学習指導要領や教科書に「勉強されるべきもの」が書かれていることがイメージしやすい。また，40名程度を上限とする教室での一斉授業，という学習形態が一般的であると思われる。これらは，個々の授業者や学習者の意図とは独立に学習の内容や方法を規定しているものであり，教授パラダイムとはこれらの規則の集合のことである。

シュバラール氏は，これまでの教授パラダイムを「記念碑主義」的であると指摘する。すなわち，「ヘロンの公式のような知識の小片それぞれがそれだけで自立した記念碑のように扱われ［中略］生徒はたとえその過去や現在における存在理由（*raisons d'être*）についてほとんど何も知らない場合でさえも，それに感嘆しそれを楽しむことが期待される」(p.75）ような教育がなされてきたということを指摘している。シュバラール氏は日本の教育を対象にして上記の指摘をしているわけではないが，我が国の教育，特に高等学校における教育についてもおおむね当てはまるであろう。例えば，数学Ⅰで学習する「必要条件」や「十分条件」という概念や知識がいかなる理由をもって導入され，いかに（教科書において）活用されているかを反省してみれば，シュバラール氏の批判にも頷けるところが大きい。

そこで，氏が記念碑主義的パラダイムに代わって提案するのが「世界探究パラダイム」である。このパラダイムで学ばれるべきものは「問い」であり，その問いに対する自分（たち）なりの回答を得るための探究する「態度」であ

る。この態度は，より具体的に「出会ったことも解いたこともない問題を含む状況に常に尻込み」せず，「価値ある答え A に到達するために，可能な限り頻繁にそれについて研究するような」(p.77) 態度のことである。これは我々が一般に「科学的である」と捉えるような態度のことであるが，まさにシュバラール氏は「この態度は，通常では科学者の研究領域における態度であるが，すべての活動領域における市民の態度となるべきである」(p.78) として，今後の教育で目指す市民像を掲げている。

世界探究パラダイムに基づく教育では，「初源的」な問いから学習（すなわち探究）が始まり，派生する問いを設定したり，部分的な回答を提示したりしながら活動が続けられていく。上記の通り，そこで目指されるのは科学者のような態度であるから，探究の方法も実際の科学者の活動のように開かれているべきである。すなわち，教科書などの限られたメディアからだけの学習に制限するのではなく，可能な限り多くのメディアから情報収集ができるようにする。

ここで，インターネットなどの教科書以外のメディアを認めることは，「権威づけられていない」メディアを参照することを意味する。重要なのは，このことを指導者と学習者が共有していることである。なぜならば，「この情報は本当に正しいかどうかわからない」ということを共有していることは，その情報の正当化の必要性を自然に発生させるからである。

以上のように，世界探究パラダイムは，「問い」に対して躊躇することなく探究を続けるような態度の育成を目指し，学校教育の目標や方法に大きな変化を要求するものである。このパラダイムのもとでは，知識や活動は，その存在理由と必然性を伴って生じることになる。確かに，それぞれの国や地域の状態を鑑みれば，この大規模な変革をすぐに受け入れ，実行することは難しいだろう。早急な変化には，大きなデメリットが付随する可能性もある。しかし，我が国でも目指されている探究活動の実現を考えるにあたっては，先行する研究として参照する価値が大いにあると考える。

２．本事例における「知識の存在理由」

世界探究パラダイムの視点から本事例における探究活動を振り返ると，「存在理由」を伴って生じた概念や知識があったことを指摘することができる。

まず，先にも触れた「必要条件」と「十分条件」が，探究における「見方・考え方」として発生したと捉えられることである。一筆書きや n 筆書きの「判定法」とは，数学的に定式化すれば必要十分条件[4]を意味する。したがって，その証明にあたっては必要性と十分生の双方を示さなければならない。生徒の実際の活動では，活動の当初はこの区別がほとんど意識されておらず，$p \Rightarrow q$ の証明をしているはずが仮定と結論を逆に考えてしまう，ということもあった。その際には，教員の側からそれを指摘し，証明を修正した。一筆書きの場合の証明を終え，二筆書きの判定法の証明を考える段階になると，生徒から「矢印（⇒）」の向きを意識するような発言が増えてきた。筆者がこの時機に「それは必要条件（必要性）を考えているということだね」という旨の言葉を投げかけていくと，n 筆書きの判定法を証明する段階では，必要条件や十分条件の用語を用いて，自らの証明を整理しながら進められるようになった様子であった。

必要条件や十分条件という概念は，数学の探究活動において，自らの証明を構想したり（「まずは必要条件を考えてみよう」など），進行中の証明の位置づけを整理したり（「いま行ったことは十分条件であることの証明だ」など）する機能がある（構想の機能については濵中 (2016) に事例が述べられている）。本事例における探究では，必要条件や十分条件の概念がこれらの機能を伴って表れたと考えられる。実際に，生徒は「矢印（⇒）」の向きを意識するという数学において本質的な「見方・考え方」を働かせることができており，これに教員の側から名前を与えることでその概念が「使えるもの」として機能をもったのではないだろうか。

この他にも，数学的帰納法や「任意の」という言葉など，いくつかの概念や知識が，必要性や存在理由を伴って生じていたと考えられる。この探究活動が，科学者としての態度形成にどの程度貢献したかは明らかではないが，「知識の小片それぞれがそれだけで自立した記念碑のように扱われ」，その存在理由が失われたような学習ではなかったことは主張できるだろう。

Ⅵ. おわりに

本稿では，高等学校の課題研究における探究活動の事例として，グラフの n 筆書きをテーマとした探究を取り上げ，探究活動の指導や支援の在り方，および評価の対象や方法について考察を行った。事例から得られる示唆として，指導や支援については，生徒が主体的に研究課題（リサーチ・クエスリョン）を設定できるように，テーマの具体例を提示するなどして方向性を与えることを挙げた。特に，テーマの具体例としてグラフ理論（離散数学）を選択することの意義を，グラフ理論（離散数学）のもつ数学的な特性から例示した。

探究活動の評価については，教育の目標として挙げられた「資質・能力の育成」との関連から，評価の対象を「文化的実践への参加の度合い」として規定した。また，その方法として，数学的な見方・考え方の価値づけを行う形成的評価が重要な位置を占め得ることを述べた。加えて，「目標に準拠した評価」に対する固定的な考え方が，探究活動

において働きうる見方・考え方を制限してしまう可能性があることを指摘した。

また，数学教育研究において近年注目されている世界探究パラダイムと呼ばれる教授パラダイムに触れ，この観点から探究活動の特徴を記述した。特に，知識の存在理由という考え方に注目し，探究において存在理由を伴って発生した知識の具体例を提示した。

以上のことを示した一方で，指導の在り方については，テーマ設定（グラフ理論）の妥当性・有効性が１つの例証にとどまっており，また，評価については，その具体的な方法を提示するにはいたっていない。グラフ理論の特性については，数学的により詳細な分析が必要となるであろうし，評価の具体を提示するためには，実践的な研究が不可欠である。これらについては今後の課題である。

註記

1) 本稿で取り上げる事例は，実践当時に筆者が教諭として勤務していた学校で行われたものである。筆者は，探究活動を行った生徒らの担当教員として指導や支援にあたっていた。
2) ここでの「教授（didactic)」は，指導と学習に関する行為全般を意味している。
3) 教授争点とは，その状況において勉強されるべき対象，学習されるべき対象のことである。
4) 判定法には，「必要条件であるが十分条件ではないもの」および「十分条件であるが必要条件ではないもの」も考えられるが，本事例における探究では必要十分条件に対応する。

引用・参考文献

石井英真（2015).『今求められる学力と学びとは―コンピテンシー・ベースのカリキュラムの光と影―』（日本標準ブックレット，No.14）．株式会社日本標準

石井英真（2018).「資質・能力ベースの教育改革の深層と教科カリキュラムの構成原理」．日本数学教育学会『第６回春期研究大会論文集』，pp.69-72.

景山三平（2007).「高等学校へ導入する離散数学の有効性について」．長崎栄三 他『高等学校における離散数学を中心とした新たな教材の開発研究 最終報告書』(pp.10-24). 国立教育政策研究所

小林みどり（2013).『あたらしいグラフ理論入門』．牧野書店

シュバラール，Y. (2016). 大滝孝治，宮川健（訳).「明日の社会における数学指導―来るべきカウンターパラダイムの弁護―」. 上越数学教育研究, 第 31 号, pp.73-87.

濵中裕明（2016).「高校で可能な証明活動を組み入れた数学的活動についての考察―証明の多面的機能のケーススタディ―」. 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』，第 22 巻，第１号，pp.171-178.

ブラウン，S.，ワルター，M. (1990). 平林一栄，岩崎秀樹(訳).『いかにして問題をつくるか―問題設定の技術』．東洋館出版社

マトウシェク，J.，ネシェトリル，J.（2012). 根上生也，中本敦浩（訳).『離散数学への招待 上』．丸善出版.

文部科学省（2016a).『高大接続システム改革会議「最終報告」』．http://www.mext.go.jp

文部科学省（2016b).『高等学校の数学・理科にわたる探究的科目の在り方に関する特別チームにおける審議の取りまとめ』．http://www.mext.go.jp

文部科学省（2018).『学習指導要領解説数学編理数編』．http://www.mext.go.jp