Sierpinski の定理について

内　田　虎　雄
渋　谷　清　雄

（文理学部　数学教室）

Sierpinski は次のような定理を証明している。

定　　　理

$$\varepsilon_n = a_n + q\frac{\sum_{i=n}^{n} a_i}{n}$$

$q > -1$ とおくとき，$\varepsilon_n \to 0$ ならば $a_n \to 0$

この定理は後に色々に拡張され，筆者の一人は一つの拡張定理をさきに発表したのであるがここではこの定理の別証明を与えよう。

証　　　明

(i)　$a_n \to a$ とすると，Cauchy の定理により

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \to a \quad 従つて \quad a = 0\,, \qquad a_n \to 0\ .$$

故にこの定理は真である。

(ii)　$|q| < 1$ のとき，

$\{a_n\}$ は有界である。

なぜなら，もし有界でないとすると，任意の整数 n_0 について $n \geqq n_0$ で $|a_n| > |a_{n-i}|$ $(i = 1, 2, \cdots\cdots, {}_{n-1})$ なるような N が存在するから，その N については

$$|a_N| > \frac{\sum_{1}^{N} |a_i|}{n} \geqq \left| \frac{\sum_{1}^{N} a_i}{N} \right|$$

$$|\varepsilon_N| = |a_N + q\frac{\sum a_i}{N}| \geqq |a_N|(1 - |q|)\quad , \quad a_N \to \infty$$

となり，$\varepsilon_n \to 0$ $(n \to \infty)$ に矛盾する。

従つて $\{a_n\}$ は有界である。

次に $\overline{\lim}\ a_n = \underline{\lim}\ a_n$ がなり立つ。

もし，$\overline{\lim}\ a_n = \underline{\lim}\ a_n$ でないとすると，

$$\overline{\lim}\ a_n > \underline{\lim}\ a_n \geqq 0,$$

$$\underline{\lim}\ a_n < \overline{\lim}\ a_n \leqq 0,$$

$$\overline{\lim}\ a_n > 0 > \underline{\lim}\ a_n$$

の何れかとなる。

ここに，$\overline{\lim}\ a_n = m$,　$\underline{\lim}\ a_n = l$ とおく。

上の三つの場合の最後の場合には $|\overline{\lim}\, a_n|$ $|\underline{\lim}\, a_n|$ の大きい方をとれば次の二つの場合を考えればよい。

任意の $\varepsilon>0$ について，

$$\overline{\lim}\, a_n > 0;\quad a_N > m - \varepsilon \geqq \frac{|\sum^N a_i|}{N} - (\varepsilon + \varepsilon'),$$ $N\to 0$ で $\varepsilon'\to 0$ となるような N が存在するから

$$|\varepsilon_N| = |a_N + q\frac{\sum a_i}{N}| \geqq |a_N|(1-|q|) - (\varepsilon+\varepsilon')|q|$$

$$> m(1-|q|) - (\varepsilon + |q|\varepsilon')$$

$\underline{\lim}\, a_n < 0;\quad a_N < l + \varepsilon$ として同様に上の不等式が得られる。

これは $\varepsilon_n\to 0$ に矛盾するから $\overline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, a_n$ となる。

(iii)　$q \geqq 1$ のとき，

(イ)　$\underline{\lim}\, a_n \geqq 0$,

$\overline{\lim}\, a_n \leqq 0$

(ロ)　$\overline{\lim}\, a_n > 0 > \underline{\lim}\, a_n$

と分けられる。

(イ)　$\underline{\lim}\, a_n \geqq 0$ とすると，任意の $\varepsilon > 0$ について，

$$a_n > -\varepsilon, \qquad n \geqq n_0$$

なる n_0 が存在し

$$|\varepsilon_n| = |a_n + q\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}| > |a_n| + q|\frac{\sum_{n_0+1}^{n} a_i}{n}| - q|\frac{\sum_{1}^{n_0} a_i}{n}| - \varepsilon(1+2q)$$

ここに最後の二項は任意に小さくできるから $\underline{\lim}|\varepsilon_n| \geqq \overline{\lim}|a_n|$ となり矛盾を起す。$\overline{\lim}\, a_n \geqq 0$ の場合も同様である。

(ロ) n'を任意にとるとき，

$$n' \leqq n_0, \qquad a_{n_0} < 0,$$

$$n_0 \leqq n_2, \qquad a_{n_2} > \overline{\lim}\, a_n - \varepsilon$$

なる n_0, n_2 をとり，

$$n_1 = \mathrm{Max}\,\{a_n < 0, \quad n_0 < n < n_2\}$$

とおくと，

$$a_{n_1} < 0,\quad a_{n_1+i} \geqq 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots\cdots, n_2 - n_1)$$

$$\varepsilon_{n_1} = a_{n_1} + q\frac{\sum^{n_1} a_i}{n_1}$$

故に a_{n_1} と $\dfrac{\sum^{n_1} a_i}{n_1}$ とは異符号又は絶対値が $|\varepsilon_{n_1}|$ より小さい。

$$|\varepsilon_{n_2}| = \left| a_{n_2} + q\,\frac{\sum_{i=1}^{n_1} a_i + \sum_{i=n_1+1}^{n_2} a_i}{n_2} \right| = |a_{n_2}| + q \left| \frac{\sum_{i=1}^{n_1} a_i}{n_2} \right| + q \left| \frac{\sum_{i=n_1+1}^{n_2} a_i}{n_2} \right|$$

又は $\geqq |a_{n_2}| - q\,|\varepsilon_{n_1}|\,\frac{n_1}{n_2} + q \left| \frac{\sum_{i=n_1+1}^{n_2} a_i}{n_2} \right|$

$n_0 \to \infty$ で $\lim |\varepsilon_{n_2}| \geqq \lim |a_{n_2}|$ となり矛盾を起す。

従つて我々の定理は証明されたのである。

参　考　文　献

Sierpinski Tohoku Math. Journal vol. 11.

岡田良知 〃 vol. 15

内田虎雄 日本数学会秋季総会発表 昭和25年11月

（昭和27年10月27日受理）