三次元時空の相対論について

畠　山　邦　夫

（文理学部　物理学教室）

§1　序

1虚光時次元と $(\nu-1)$ 空間次元より成る所の，線型直交綜合体を ν 次元 Minkowski 時空 $\mathrm{M}-\nu$ と，Riemann 綜合体を ν 次元 Riemann 時空 $\mathrm{R}-\nu$ と名付く。n 次元 Euclid 空間を $\mathrm{E}-\mathrm{n}$ と記す。

以下、添字のギリシヤ文字は空間座標を，ローマ文字は空間座標を，O は虚光時座標を 1，2，3 乃至nは空間座標を表す。又同一項中に二個の同添字あるは，とり得る座標すべてについての和を表す。

§2　E-n の Laplace 方程式の中心對稱解

(1)　$\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^i\partial x^i}=\mathrm{O}$　　　$(i=1,\cdots\cdots\cdots,n)$

なる Laplace 方程式の原点に対して中心対称な解を求めるならば，

(2)　$\varphi=|x|$　　　$(n=1)$

(3)　$\varphi=\log\{x^ix^i\}^{1/2}$　　　$(n=2)$

(4)　$\varphi=-\{x^ix^i\}^{-\frac{n-2}{2}}$　　　$(n\geqq 3)$

§3　M-4 の Maxwell 方程式

(5)　$\dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\nu}=I_\mu$

(6)　$\dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}+\dfrac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu}+\dfrac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu}=\mathrm{O}$

なる Maxwell 方程式が $\mathrm{M}-4$ の電磁場で成立する。I_μ は四元電流にして，電磁場の强さ $F_{\mu\nu}$ は

(7)　$F_{\mu\nu}=\dfrac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}-\dfrac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}.$

とポテンシヤル A_μ より導かれ，且つ，（6）を恒等的に満す。

§4　R-4 の Einstein の場の方程式

(8)　$G^{\mu\nu}=T^{\mu\nu}$

なる場の方程式は，左辺を Einstein テンソル，右辺を物質テンソルと呼ぶ。

(9)　$G^{\mu\nu}=\left(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}-\tfrac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\right)R_{\rho\alpha\beta}^{\ \ \ \ \rho}$

(10)　$R_{\rho\alpha\beta}^{\ \ \ \ \gamma}=\dfrac{\partial\left\{{\gamma \atop \alpha\rho}\right\}}{\partial x^\beta}-\dfrac{\partial\left\{{\gamma \atop \alpha\beta}\right\}}{\partial x_\rho}-\left\{{\gamma \atop \mu\rho}\right\}\left\{{\mu \atop \alpha\beta}\right\}+\left\{{\gamma \atop \alpha\mu}\right\}\left\{{\mu \atop \beta\rho}\right\}$

(11)　$R_{\rho\alpha\beta\gamma} = R^{\ \mu}_{\rho\alpha\beta}\, g_{\mu\gamma}$

§5　中間相對論

M−4に於ける(5)及び(6)より特殊相対論的力学が発展し，之に古典力学のHamiltonの変分原理を加味して，スカラーポテンシャル φ の下で速度Uの質点の運動をLagrange函数

(12)　$L = -\{1-U^2\}^{1/2} - \varphi$

より求めんとする。但し光速を1とする。例へば，小貫著「相対性理論」§26参照。

(12)の時間積分の変分をとるHamilton原理の形式は(12)を

(13)　$L = -\{1-U^2+2\varphi\}^{1/2}$

と直せば，四元的立場から合理的である。之より一般相対論的計量に移り，(8)の基礎となる。(12)より(13)への変化の為には φ が1に比べて充分小さい事が必要である。φ は一般的に(1)を満すべきで，E−3に於ては解(4)の形の和で表され，充分遠方では1に比べて小となり，上記条件に適合している。本節の過程を中間相対論と名付ける。

§6　理論形式の次元數との關連

以上の如き四次元時空の相対論を，次元数の異つた時空に逆類推的に拡張できるかという問題について考察しよう。

(5)，(6)及び(7)は実験を基礎にもつ電磁場論としてはM−4に限定されるけれども，その完成形に於ては任意のM−ν時空で成立可能の形式を表面的には備へている。

又(8)及至(11)は任意のR−ν時空で成立する様な立場で，数学的には形式されている。且つ，§5の中間相対論も又任意次元で成り立ち得る数学的形式を持つ。

併し之等が物理的に矛盾が無いかどうかは検討を要する。特に三次元時空に対しては，上述の予想が悉く誤であることが以下に明らかとなる。五乃至それ以上の次元の時空に対しては一応成立の可能性はあるが確言は出来ない。

§7　M-3の電磁理論の不可能性

1虚光時と2空間座標より成るM−3に於て，(5)，(6)，(7)が形式的に成立すると仮定する。(7)が(6)を恒等的に満すのは当然であり，$F_{\mu\nu}$及び(5)を書下すと

$$(14)\qquad (F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} O & -F_{10} & -F_{20} \\ F_{10} & O & F_{12} \\ F_{20} & -F_{12} & O \end{pmatrix}$$

$$(15)\qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial F_{10}}{\partial x^1} - \dfrac{\partial F_{20}}{\partial x^2} = I_0 \\ \dfrac{\partial F_{10}}{\partial x^0} + \dfrac{\partial F_{12}}{\partial x^2} = I_1 \\ \dfrac{\partial F_{20}}{\partial x^0} - \dfrac{\partial F_{12}}{\partial x^1} = I_2 \end{cases}$$

併しながら，(15) は重要な矛盾を含み，ひいては M－3 の電磁場論の成立は不可能である。何となれば，M－3の空間座標は1及び2の2個しかないから，(15) の中で1と2とを交換しても，方程式は不変に保たれねばならぬ。併し (15) の第二式及び第三式はこの要求を満さない。之は (7) に於ける $F_{\mu\nu}$ の反対称性，特にその Rot 形式に基因している。

M－4に於てはこの危険はない。例へばその空間座標1，2及び3の中の何れか二個の交換を (5) に対して施す時，それは丈度所謂「左手系」から「右手系」に移る事或ひはその逆を意味している。且つ (7) の Rot 形式が之と合致して変化し，結局 (5) は矛盾無く新形式に変化する。よつて M－4 にては (5)，(7) は矛盾に無い。よつて両式を M－5 或いはそれ以上に迄拡張できるかどうかは，何れとも断定出来ないので，細い検討を要する。

§ 8　M-3 の中間相對論の困難

今一歩を譲つて，M－3 に於ける特殊相対論が形成され得ると仮定しても，R－3 に於ける (8) を得る為への移行過程として，M－3 の中間相対論特に (13) との対応が可能でなければならない。その為には M－3 に対する (13) の φ は E－2 の (1) を満す解として，(3) の形の和で表さるべきである。(3) は原点より充分遠方で小さくないから、M－3 より R－3 に移る中間相対論的操作は不可能である。

之に反して，§5に記した如く四次元時空に於ては φ が遠方で小になる条件が，(8) に移行して，充分遠方に於ける基本テンソルの Galilei 値の条件に拡張され，微分方程式として (8) を解く際の物理的意味のある境界条件の役割をする。(4) より判る様に五次元時空又はそれ以上に於ても，中間相対論の成立は可能である。

§ 9　R-3 の一般相對論

R－ν に於ける場の方程式 (8) 並びに Einstein テンソル (9) の独立成分個数は

$$(16)\qquad \frac{1}{2}\nu(\nu+1)$$

であり，(11) の共変曲率テンソルの独立成分個数

$$(17)\qquad \frac{1}{12}\nu^2(\nu^2-1)$$

は同時に (10) の Christoffel の曲率テンソルの独立成分個数である。

微分幾何学によれば，R－ν が完全に Euclid 的（厳密には Minkowski 的）である為の必要且つ充分な条件は (10) が至る所消えることである。併し物理的に我々の定め得るのは (8) であつて (10) ではない点は二要である。

先づ，R－2 について考察しよう。その際 (16) は3個，(17) は1個で，前者が後者より多い。これは (8) によりて与へられる物理的条件が、時空構造を定めるべき (11) の過剰決定を強ひるという困難を生ずる。

R－3 に於ては，(16)，(17) 共に6個で，一致しているけれども，これでは時空構造は完全決

定されて仕舞い，遠方での Galilei 値条件の入る余地が窮屈となる。又例へば empty space では（８）の物質テンソルが消えるから Einstein テンソル（９），ひいては（11）の独立成分よつて（10）の全独立成分が消えねばならず，時空は Euclid 的（或ひは Minkowski 的）になり，不合理である。

R－4 に於ては，（16）は10個，（17）は20個で時空構造（10）の不完全決定となり，物理現象と時空構造とが緩く結合され，境界条件の下に（８）を解く事は意味が出来る。又 empty space に対する R－3 に於ける困難もこゝでは避けられる。R－5 又はそれ以上にても以上の立論は可能である。

§ 10 結　　語

四次元時空の相対論に analogous に，三次元時空に於ける相対論を形成することは，以上の三点で不可能である。特に§3及び§7の Maxwell 方程式体系は四次元時空と本質的に結びついてゐる事は注目すべきである。

（昭和27年９月30日受理）