<論説>

大規模経済における株主一致性
(平均・分散アプローチ)

北　原　　　徹

1．はじめに

本稿の課題は，株主一致性と企業価値最大化行動の最適性とを大規模株式市場経済において検討することである。この問題の分析に関しては Hart〔8〕が存在する。Hart は選好で区別された消費者のタイプを一定に保ちつつ，各タイプの消費者数を平行的に増大させるという方法で大規模経済を構成している。また不確実性を扱う方法としては状態選好アプローチが採用されている。それに対して本稿では不確実性分析のために平均・分散アプローチが使用されているが，大規模経済の構成に際して単純に消費者数を増大させるという，より一般的な方法が採用されている。しかし本稿の結論（4の命題 iv，v)はHart のそれと一致し，大規模経済において企業純価値（企業価値マイナス投入物価値）最大化政策で諸株主の利害は基本的に一致し，それは同時に近似的にパレート最適を達成することが示される。

論文の構成は，2で基本モデルが設定され，3で大規模株式市場経済の特性が検討される。そこでは公共投資の割引率に関して提起された Arrow & Lind

〔1〕の議論との関連にも言及される。4で株主一致性と企業純価値最大化行動の最適性とが分析され，本稿と関連文献の成果との比較検討が5で，若干の補足が6で行なわれる。

2．モ デ ル

モデルは第0期と第1期との2期間から成る。経済には実物財が唯ひとつ存在し，第0期では消費及び生産のための投入に使用される。生産の結果第1期に同一の実物財が産出され，それは企業の株式保有比率に応じて消費者＝株主に分配されて消費される。個々の消費者を i（$=1$，…，n）で示そう。消費者 i の効用は第0期の実物財消費量 x_i^0，第1期消費の期待値 x_i^1 と分散 x_i^σ だけに依存する。消費ベクトル（x_i^0，x_i^1，x_i^σ）を x_i で表わす。効用関数 $U_i(x_i)$ に関して以下の仮定をおこなう。

仮定1；U_i はすべての変数に関して連続微分可能かつ強い意味で擬凹である。また x_i^0，x_i^1 の増加関数，x_i^σ の減少関数である。

さらに　$U_i^t=\dfrac{\partial U_i}{\partial x_i^t}$　$t=0,\ 1,\ \sigma$　として

仮定2；$U_i^t\geqq 0$，$U_i^t=\infty\Longleftrightarrow x_i^t=0$，$U_i^t=0\Longleftrightarrow x_i^t=\infty$，$t=0,\ 1$，

$U_i^\sigma\leqq 0$，$U_i^\sigma=0\Longleftrightarrow x_i^\sigma=0$，$U_i^\sigma=-\infty\Longleftrightarrow x_i^\sigma=\infty$

潜在的に設立可能な企業は可算個存在するものとし，その全体の集合を F とする。企業 f の第0期実物財投入量を y_f^0，第1期の産出期待値を y_f^1，企業 k の産出との共分散を y_{fk}^σ としよう。y_f^1，y_{fk}^σ に関してすべての消費者＝投資家の予想は一致しているものとする。

仮定3；すべての企業 f に対して

$$y_f^1\neq 0\Rightarrow y_f^0\geqq\bar{y}^0$$

なる正数が $\bar{y}^0$ 存在する。

仮定4；すべての企業 f，k に対して

$$y_f{}^1,\ |y_{fk}{}^{\sigma}|<\bar{\bar{Y}}$$

なる正数 $\bar{\bar{Y}}$ が存在する。

第0期の経済全体の実物財賦存量が有限なら，仮定3より有限個の企業しか生産活動を行なうことができず，仮定4より第1期の総産出の期待値も分散も有限となる。

さて消費者の数 n を増大させることにより経済の規模を拡大させていき，その極限でどのような関係が成り立つかを検討しよう。消費者数が n の時の経済を ${}^nE$ で示し，${}^nx_i{}^0$ のように左上付の n によってそれが ${}^nE$ 経済の変数であることを表現しよう。${}^nE$ 経済における消費者 i の財賦存は，第0期に実物財 $\bar{x}_i{}^0$ と企業 f 株の ${}^n\bar{s}_{if}$ $(\sum_{i=1}^{n}{}^n\bar{s}_{if}=1)$ だけの比率であり，第1期に実物財 $\bar{x}_i{}^1$ である。

仮定5；すべての消費者 i について

$$\underline{X}<\bar{x}_i{}^0,\ \bar{x}_i{}^1<\bar{\bar{X}}$$

なる正数 $\underline{X}$，$\bar{X}$ が存在する。

仮定6；すべての消費者 i，経済 ${}^nE$ について

$$\sum_{f\in{}^nF}{}^n\bar{s}_{if}<\bar{\bar{S}}$$

なる正数 $\bar{\bar{S}}$ が存在する。但し，${}^nF$ は ${}^nE$ 経済で生産活動を行っている企業の集合を示す。

第0期の実物財と第1期のそれとの間の取引を媒介するものとして株式の他に債券を導入しよう。債券は第0期に発行され第1期に償還される訳だが，実物財1単位によって償還されるものを1単位としよう。株式や債券の取引は第0期に行なわれる。第0期の実物財をニューメレールとして企業 f の企業価値

を v_f，債券1単位の価格を v_B で示そう。取りあえず債券の取引は消費者相互間だけで行なわれ，企業の投入物の調達は株式発行のみによるとしよう[1]。また。

$$v_f - y_f^0 \geq 0 \tag{1}$$

が充足された場合にのみ投入物の調達が可能になり，生産が実行されうる。市場取引後の消費者 i の持株比率を $({}^n s_{if})_{f\epsilon F}$， 債券保有量を ${}^n B_i$ で示そう。${}^n B_i > 0$ なら購入量を，${}^n B_i < 0$ なら発行量を表わす。

${}^n E$ 経済で企業の生産計画 $({}^n y_f^0, {}^n y_f^1, {}^n y_f^\sigma)_{f,k\epsilon F}$ が与えられているという条件の下での実物財，株式及び債券の市場取引による交換均衡を考えよう。

（定義1）

${}^n E$ 経済における所与の生産計画 $({}^n y_f^0, {}^n y_f^1, {}^n y_{fk}^\sigma)_{f,k\epsilon F}$ の下での交換均衡とは，以下の条件を満たす配列 $(({}^n x_i)_{i=1,\cdots,n}, ({}^n s_{if})_{f\epsilon F}, ({}^n B_i), ({}^n v_f), {}^n v_B)$のことである。

$$ {}^n x_i^0 + \sum_{f\epsilon F} {}^n s_{if} {}^n v_f + {}^n B_i {}^n v_B \leq \bar{x}_i^0 + \sum_{f\epsilon F} {}^n \bar{s}_{if}({}^n v_f - {}^n y_f^0) \tag{2}$$

$$ {}^n x_i^1 = \sum_{f\epsilon F} {}^n s_{if} {}^n y_f^1 + {}^n B_i + \bar{x}_i^1 \tag{3}$$

$$ {}^n x_i^\sigma = \sum_{f\epsilon F} \sum_{F\epsilon k} {}^n s_{if} {}^n s_{ik} {}^n y_{fk}^\sigma \tag{4}$$

すべての消費者iは $({}^n v_f)_{f\epsilon F}$，${}^n v_B$ に関してプライステイカーとして行動し，(2)〜(4)の制約条件の下で効用 $U_i({}^n x_i)$ を最大化する。但し消費者は債券の償還が確実に行なわれる（つまり債券は安全資産）と考えていることが，(3)において想定されている。

さらに市場均衡の条件は

$$\sum_{i=1}^{n} {}^n s_{if} = 1 \quad f\epsilon F \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} {}^{n}B_i = 0 \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} {}^{n}x_i^0 + \sum_{f \in F} {}^{n}y_f^0 = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i^0 \tag{7}$$

消費者の主体的均衡において次の関係が成立する。まず $U_i^1(x_i)/U_i^0(x_i)$ は仮定1，2より B_i（誤解のおそれがないときは左上付の n は以下省略する）を調節することで非負の任意の値を取りえるので，すべての消費者 i について

$$U_i^1/U_i^0 = v_B \tag{8}$$

また

$$U_i^1 y_f^1 + 2U_i^\sigma \sum_k s_{ik} y_{fk}^\sigma - U_i^0 v_f = 0 \tag{9}$$

(9)に対して市場均衡の条件(5)を使えば

$$v_f = v_B (y_f^1 - {}^{n}\lambda \sum_k y_{fk}^\sigma) \tag{10}$$

$$-U_i^1/2U_i^\sigma = s_i/{}^{n}\lambda \tag{11}$$

但し

$${}^{n}\lambda = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}(-U_i^1/2U_i^\sigma)} \tag{12}$$

均衡において $s_{if} = s_{ik} \geq 0$ $(f, k \in F)$ となるので，それを s_i で表示している。

3．大規模株式市場経済

（命　題）

(i)　ある正数 ε が存在し，$^{\forall}n$ に対し

$${}^{n}\lambda < 1/\varepsilon n$$

(ii) 産出の分布が他企業の産出分布から独立である企業 g の価値は，$n\to\infty$ のとき産出期待値の現在価値に一致する。つまり

$$^{n}y_{gk}{}^{\sigma}=0(g\neq k)\Rightarrow\lim_{n\to\infty}({}^{n}v_{g}-{}^{n}v_{B}{}^{n}y_{g}{}^{1})=0$$

(iii) 企業 f だけが生産計画を変更した時の変数を $^{n}\hat{v}_{B}$ のように示せば

$$\lim_{n\to\infty}({}^{n}\hat{v}_{B}-{}^{n}v_{B})=0$$

$$\lim_{n\to\infty}({}^{n}\hat{v}_{k}-{}^{n}v_{k})=0\quad(k\neq f)$$

$$\lim_{n\to\infty}({}^{n}v_{f}-{}^{n}v_{B}[{}^{n}\hat{y}_{f}{}^{1}-{}^{n}\lambda\sum_{k\in F}{}^{n}\hat{y}_{fk}{}^{\sigma}])=0$$

（証　明）

(i) 仮定３，４より十分大きな正数 X^{1}, X^{σ} をとれば，^{n}E 経済において $^{n}x_{i}{}^{1}>X^{1}$ または $^{n}x_{i}{}^{\sigma}>X^{\sigma}$ のいずれかを充たす消費者の割合は消費者全体の半分以下にできる。また $U_{i}{}^{1}=0\Leftrightarrow x_{i}{}^{1}=\infty$, $U_{i}{}^{\sigma}=-\infty\Leftrightarrow x_{i}{}^{\sigma}=\infty$（仮定２）より $^{n}x_{i}{}^{1}\leq X^{1}$ かつ $^{n}x_{i}{}^{\sigma}\leq X^{\sigma}$ なる消費者については

$$-U_{i}{}^{1}/2U_{i}{}^{\sigma}>2\varepsilon$$

なる正数 ε がとれる。すると⑿より

$$^{n}\lambda<1/\varepsilon n$$

‖ [2)]

(ii) 仮定より $\sum_{k}{}^{n}y_{gk}{}^{\sigma}={}^{n}y_{gg}{}^{\sigma}$。これは仮定４より有界だから，⑽及び（命題）(i)から所望の結論が得られる。　‖

（命題）(ii) はさらに成立の条件を弱めることができ，企業 g の産出と他企業の産出との共分散の総和 $\sum_{k}{}^{n}y_{gk}{}^{\sigma}$ が有界であればよい。例えば $n\to\infty$ のとき実際に生産を行なう企業の数が有限に保たれるなら，すべての企業について（命題）(ii) が成立し，企業価値は産出期待値の現在価値に一致する。

ところで，y_g^1 だけの確実な第1期の産出の現在価値はその産出を安全資産の利子率（$1/v_B$）で割り引いたもの，つまり $v_B y_g^1$ である。また企業価値 v_g は期待値 y_g^1，共分散 $(y_{gk})_{k\in F}$ という不確実な産出に対して社会が第0期にどれだけ支払うかを示している。そこで $v_B y_g^1$ と v_g との差額は，不確実な産出に対する社会のないしは企業 g の株主全体のリスク・プレミアムを表わす。すると（命題）（ii）は $n\to\infty$ という経済の規模拡大の極限において，株主全体のリスク・プレミアムが0となることを意味している[3)]。

（命題）（iii）の証明の準備として次の交換均衡概念を導入しよう。

（定義2）

${}^nE$ 経済における所与の生産計画（${}^ny_f{}^0$，${}^ny_f{}^1$，${}^ny_{fk}{}^\sigma)_{f,k\in F}$ の下での変形された交換均衡とは，以下の条件を満たす配列（$({}^nx_i)_{i=1,\dots,n}$，$({}^n\sigma_i)$，${}^nv_B$，${}^n\lambda$）のことである。（以下記号の簡略化のため n を省略する）

$$x_i{}^0+v_Bx_i{}^1-v_B\lambda\sigma_i\leq\bar{x}_i{}^0-\sum_f\bar{s}_{if}y_f{}^0$$
$$+v_B(\bar{x}_i{}^1+\sum_f\bar{s}_{if}y_f{}^1)-v_B\lambda\sum_f\bar{s}_{if}\sum_k y_{fk}{}^\sigma \tag{13}$$

$$x_i{}^\sigma=(\sigma_i)^2/\sum_{f,k}y_{fk}{}^\sigma \tag{14}$$

すべての消費者 i は v_B，λ に関してプライス・テイカーとして行動し，(13)(14)の条件下で $x_i{}^0$，$x_i{}^1$，σ_i を選択し効用 $U_i(x_i)$ を最大化する。さらに市場均衡の条件は

$$\sum_i x_i{}^0=\sum_i\bar{x}_i{}^0-\sum_f y_f{}^0 \tag{15}$$

$$\sum_i x_i{}^1=\sum_i\bar{x}_i{}^1+\sum_f y_f{}^1 \tag{16}$$

$$\sum_i\sigma_i=\sum_{f,k}y_{f,k}{}^\sigma \tag{17}$$

（補　題）

（定義1）の均衡消費配分 $(x_i)_{i=1,\cdots,n}$ と（定義2）のそれとは一致する。

（補題）の証明は付録1に譲る。

（命題）（iii）の証明

$n\to\infty$ として経済の規模を拡大する時の市場均衡とは，消費者1人当りの財の需給均衡と考えよう。すると ${}^nE$ 経済における市場均衡とは

$$\sum_{i=1}^{n} {}^nx_i^0/n=(\sum_{i=1}^{n}\bar{x}_i^0-\sum_{f} {}^ny_f^0)/n$$

$$\sum_{i=1}^{n} {}^nx_i^1/n=(\sum_{i=1}^{n}\bar{x}_i^1+\sum_{f} {}^ny_f^1)/n$$

と定義される。収益の分散の需給均衡に関してはやや注意が必要であり，$\sum_{f,k} {}^ny_{fk}^{\sigma}/n$ は一般に有界にならないが，仮定3～5より $\sum_{f,k} {}^ny_{fk}^{\sigma}/n^2$（以下 ${}^ny^{\sigma}$ と記す）は有界となるので，収益の分散（リスク）の需給均衡を

$$\sum_{i=1}^{n}\sigma_i/n^2={}^ny^{\sigma}$$

と定義しよう。

さて極限経済における市場均衡の規定要因を明示的に定式化できるような方向で問題を追究していこう。まづ上記の（補題）より ${}^nE$ 経済において均衡価格 v_B，λ に影響を及ぼす要因は，生産計画を所与とした時の消費者の初期保有 $(\bar{x}_i^0-\sum_{f} {}^n\bar{s}_{if} {}^ny_f^0,\ \bar{x}_i^1+\sum_{f} {}^n\bar{s}_{if} {}^ny_f^1,\ \sum_{f} {}^n\bar{s}_{if}\sum_{k} {}^ny_{fk}^{\sigma})$ 及び $\sum_{f,k} {}^ny_{fk}^{\sigma}$ であることが明らかになる。(13)(14)から読み取れるように，個々の消費者にとって(13)の右辺の富 w 及び価格ベクトル $(1,\ v_B,\ -v_Bn^n\lambda)$[4)]（以下 v で示す）が与えられていても，産出の分散 $\sum_{f,k}y_{fk}^{\sigma}$ の大きさ如何によって選択される $(x_i^0,\ x_i^1,\ \sigma_i)$ は異なってくる。つまり消費者需要は価格 v，富 w の他に $\sum_{f,k}y_{kf}^{\sigma}$ にも依存することになる。但し，ここでのリスクに対する需要とは，リスクの価格を $-v_Bn^n\lambda$ と定義したことに伴って σ_i/n のことである[5)]。また $\sigma_i/n=$

$n\cdot{}^n s_i\cdot{}^n y^\sigma$ において $n{}^n s_i$，${}^n y^\sigma$ は共に有界である（証明は付録3～5）から，消費者需要は$\sum_{fk} y_{fk}{}^\sigma$ ではなく ${}^n y^\sigma$ に依存すると考えた方が極限経済の分析にとって都合がよい。また消費者 i の初期保有を $(\bar{\bar{x}}_i{}^0-\sum_f \bar{s}_{if} y_f{}^0,\ \bar{x}_i{}^1+\sum_f \bar{s}_{if} y_f{}^1,\ \sum_f {}^n\bar{s}_{if}\sum_k {}^n y_{fk}{}^\sigma/n)$（以下 e_i と記す）とすれば，消費者 i の富 w_i は $v\cdot e_i$ となる。結局極限経済を含む一般の経済における均衡価格は，経済全体の需要関数一初期保有の分布と ${}^n y^\sigma$ とによって決定されると考えられる。

経済全体の需要関数一初期保有分布を測度を使って以下のように定式化して行こう[6]。まず需要関数 h とは，$V\times[\underline{X},\ M]\times[0,\ Q]$ から R_+^3 への連続関数で

$$v\cdot h(v,\ w,\ {}^n y^\sigma)=w,\ (v,\ w,\ {}^n y^\sigma)\epsilon V\times[\underline{X},\ M]\times[0,\ Q]$$

及び(14)の条件下で $\mathbf{U}_i(x_i)$ を最大化するものである。但し，Vは価格ベクトルの成す空間であり，$V=[1]\times[\delta,\ K]\times[-L,\ 0]$。均衡価格について $0<\delta<v_B<K$，$-L<-v_B n\cdot{}^n\lambda\leq 0$と なることは付録3，6及び（命題 i）で示されている。また均衡価格 v の有界性及び仮定3～6より消費者の富 w も有界となる。

需要関数全体から成る集合 D は，距離の導入により可分距離空間となる。需要関数一初期保有の成す空間を

$$T=D\times[-\alpha,\ \alpha]^3 \qquad 0<\alpha<\infty$$

とすれば，T は可分距離空間となる。さらに

$$\mathfrak{M}_T=\{(T,\ \mathfrak{B}(T))\ \text{上の確率測度}\ \mu\ \text{の集合}\}$$

$$\mathfrak{B}(T)\ ;\ T\ \text{上のボレル}\ \sigma\text{— 集合体}$$

とすれば，$\mathfrak{M}_T$ に弱収束の位相を与えることにより$\mathfrak{M}_T$ を可分距離空間とすることができる。任意の経済の需要関数一初期保有分布は測度によって表現す

ることができることになる。

次に $T\times V\times[0,\ Q]\to R_+{}^3$ の関数 $\underset{\sim}{h}$ を

$$\underset{\sim}{h}((h,\ e),\ v,\ {}^n y^\sigma)=h(v,\ w,\ {}^n y^\sigma)$$

T から $[-\alpha,\ \alpha]^3$ への射影 $\underset{\sim}{e}$ を

$$\underset{\sim}{e}(h,\ e)=e$$

と定義しよう。すると経済全体の消費者1人当りの超過需要は

$$Z(\mu,\ v,\ {}^n y^\sigma)=\int_T(\underset{\sim}{h}(\cdot,\ v,\ {}^n y^\sigma)-\underset{\sim}{e})d\mu$$

である。弱収束の定義[7] 及び $\underset{\sim}{h}-\underset{\sim}{e}$ が T 上で有界連続である（証明は付録7）ことから，Z は μ に関して連続である。さらに $\underset{\sim}{h}$ の連続性により，Z は $\mathfrak{M}_T\times V\times[0,\ Q]$ 上で連続となる。企業 f の生産計画変更前の極限経済における均衡価格，需要関数—初期保有分布，産出の分散をそれぞれ ${}^\infty v$, ${}^\infty\mu$, ${}^\infty y^\sigma$ とすれば

$$\int_T(\underset{\sim}{h}(\cdot,\ {}^\infty v,\ {}^\infty y^\sigma)-\underset{\sim}{e})d^\infty\mu=0$$

である。

さて個別企業 f の生産計画変更は需要関数分布に変化をもたらすことはないが，初期保有分布と ${}^n y^\sigma$ とに影響を与える。そこで

$$\lim_{n\to\infty}{}^n\hat{\mu}={}^\infty\mu$$

$$\lim_{n\to\infty}{}^n\hat{y}^\sigma={}^\infty y^\sigma \tag{18}$$

を示せば，Z の連続性より ${}^\infty v$ は企業 f の生産計画変更後の極限経済においても均衡価格ということになる。まづ

$${}^n\hat{y}^\sigma=\sum_{f,k}{}^n\hat{y}_{f,k}{}^\sigma/n^2=[\sum_{f,k}{}^n y_{fk}{}^\sigma+\sum_k({}^n\hat{y}_{fk}{}^\sigma-{}^n y_{fk}{}^\sigma)\ ]/n^2$$

において仮定 3 ～ 5 より $\sum_k({}^n\hat{y}_{fk}{}^\sigma - {}^n y_{fk}{}^\sigma)/n$ は有界だから(18)が得られる。そこで個別企業の生産計画変更は ${}^\infty y^\sigma$ に影響を及ぼしえないことになる。

次に企業の生産計画の有界性（仮定 4 ）より，任意の $\varepsilon(>0)$ に対して初期保有変化の大きさ（Tに導入された距離で測って）が $\varepsilon/2$ 以上である消費者の数は有限であるから，それを $M(<\infty)$ より小さいとしょう。すると任意の $E\in\mathfrak{B}(T)$ に対して

$${}^n\mu(E)\leq{}^n\hat{\mu}(B_{\varepsilon/2}(E))+M/n$$

$${}^n\hat{\mu}(E)\leq{}^n\mu(B_{\varepsilon/2}(E))+M/n$$

が成立する。よって n を $2M/\varepsilon$ より大きくとれば $M/n\leq\varepsilon/2$ であり

$$\eta({}^n\mu,\ {}^n\hat{\mu})<\varepsilon/2$$

となる。但し，η は可分距離空間 $\mathfrak{M}_T$ 上で定義された Prohorov の距離である[8]。さらに $\lim_{n\to\infty}{}^n\mu={}^\infty\mu$ より十分大きな整数 n_0 に対して $n\geq n_0$ なら

$$\eta({}^n\mu,\ {}^\infty\mu)<\varepsilon/2$$

となる。よって $n\geq\max(2M/\varepsilon,\ n_0)$ なる n に対して

$$\eta({}^n\mu,\ {}^\infty\mu)<\varepsilon$$

つまり $\lim_{n\to\infty}{}^n\hat{\mu}={}^\infty\mu$

以上により個別企業の生産計画変更は $\lim_{n\to\infty}{}^n v_B$, $\lim_{n\to\infty} n\cdot{}^n\lambda$ に対して影響を及ぼすことができないことが明らかになった。そこで

$${}^n\hat{v}_k={}^n\hat{v}_B({}^n y_k{}^1-n{}^n\hat{\lambda}\sum_l{}^n\hat{y}_{kl}{}^\sigma/n)\qquad k\neq f$$

において

$$\sum_l{}^n\hat{y}_{kl}{}^\sigma/n=(\sum_{l\neq f}{}^n y_{kl}{}^\sigma+{}^n\hat{y}_{kf}{}^\sigma)/n$$

$$\lim_{n\to\infty} {}^n\hat{y}_{kf}{}^{\sigma}/n=0$$

だから(10)より $\lim_{n\to\infty}({}^n\hat{v}_k-{}^nv_k)=0$。また $\lim_{n\to\infty}({}^n\hat{v}_f-{}^nv_B[{}^n\hat{y}_f{}^1-{}^n\lambda\sum_k {}^n\hat{y}_{fk}{}^{\sigma}])=0$ は明らかである。 ‖

4. 株主一致性

さてこれから大規模経済における株主一致性を廻る諸問題を考察する訳であるが，その際以下の議論の内容を明瞭にするため，所与の生産計画の下での交換均衡は一意であること及び企業の生産計画変更が他の変数に与える影響は微分形式（例えば債券価格への影響は $dv_B/dy_f{}^0$）で表現可能であると仮定しよう。さらに $({}^n\bar{s}_{if})_{n=1,2\cdots}$ はすべての消費者 i，企業 f に関して収束すると想定しよう。

（命題iv）

$n\to\infty$ のとき，株主が全員一致して支持する生産計画は一般に存在しない。しかし企業 f 株主の全員が $\lim_{n\to\infty}{}^n\bar{s}_{if}>0$ という条件を充たすなら，企業の純価値（つまり企業価値 v_f マイナス投入物価値 $y_f{}^0$）を最大にする生産計画が全員一致で支持される。

（証　明）

${}^nE$ 経済において企業 f の生産計画変更が消費者 i の効用に及ぼす影響は，(2)(8)(10)を使えば

$$\frac{1}{U_i{}^0}\ \frac{dU_i}{d^ny_f{}^0}={}^n\bar{s}_{if}\left(\frac{d^nv_f}{d^ny_f{}^0}-1\right)-{}^ns_{if}\left[\frac{d^nv_f}{d^ny_f{}^0}-{}^nv_B\right.$$

$$\left.\left\{\frac{d^ny_f{}^1}{d^ny_f{}^0}+\frac{2U_i{}^{\sigma}}{U_i{}^1}\left(\sum_k{}^ns_{ik}\frac{d^ny_{fk}{}^{\sigma}}{d^ny_f{}^0}-\frac{{}^ns_{if}}{2}\ \frac{d^ny_{ff}{}^{\sigma}}{d^ny_f{}^0}\right)\right\}\right]$$

$$+\sum_{f\neq k}({}^n\bar{s}_{ik}-{}^ns_{ik})\frac{d^nv_k}{dy_f{}^0}-{}^nB_i\frac{d^nv_B}{dy_f{}^0}$$

$$=^n\bar{s}_{if}\left(\frac{d^nv_f}{d^ny_f{}^0}-1\right)-{}^ns_i\left[\frac{d^nv_f}{d^ny_f{}^0}-{}^nv_B\left\{\frac{d^ny_f{}^1}{d^ny_f{}^0}\right.\right.$$

$$\left.\left.-{}^n\lambda\left(\sum_k\frac{d^ny_{fk}{}^\sigma}{d^ny_f{}^0}-\frac{1}{2}\ \frac{d^ny_{ff}{}^\sigma}{d^ny_f{}^0}\right)\right\}\right]+\sum_{f\neq k}({}^n\bar{s}_{ik}-{}^ns_i)\frac{d^nv_k}{d^nv_f{}^0}$$

$$-{}^nB_i\frac{d^nv_B}{d^ny_f{}^0}\qquad \text{((11)より)} \tag{19}$$

（命題iii）より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d^nv_B}{d^ny_f{}^0}=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{d^nv_k}{d^ny_f{}^0}=0\qquad (k\neq f)$$

と考えることができ，$\sum_{k\neq f}({}^n\bar{s}_{ik}-{}^ns_i)$，${}^nB_i$ の有界性（前者の有界性については仮定３，５，６及び付録５より，後者の有界性の証明は付録６，８）より

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k\neq f}({}^n\bar{s}_{ik}-{}^ns_i)\frac{d^nv_k}{d^ny_f{}^0}=0,\ \lim_{n\to\infty}{}^nB_i\frac{d^nv_B}{d^ny_f{}^0}=0$$

となる。また（命題iii）より

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{d^nv_f}{dy_f{}^0}-{}^nv_B\left\{\frac{d^ny_f{}^1}{dy_f{}^0}-{}^n\lambda\sum_k\frac{d^ny_{fk}{}^\sigma}{dy_f{}^0}\right\}\right]=0$$

と考えることができるので，（命題ｉ）より(19)の右辺第２項の〔　〕の中は，$n\to\infty$ のとき０に収束する。よって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{U_i{}^0}\ \frac{dU_i}{d^ny_f{}^0}=\lim_{n\to\infty}{}^n\bar{s}_{if}\left(\frac{d^nv_f}{dy_f{}^0}-1\right)$$

それ故 $\lim_{0\to\infty}{}^n\bar{s}_{if}>0$ なる株主 i にとって企業の純価値 (v_f-y_f) を最大にする生産計画が最も望ましいことになる。これで（命題）の後半部分が確立された。

次に $\lim_{n\to\infty}{}^ns_{if}=0$ なる株主 i にとって望ましい生産計画とはどのようなものであろうか。この場合(19)の右辺は０に収束する。しかし(19)の右辺が正となる条件はそれを ${}^ns_i(>0)$ で割ったものが正となる条件に等しく，それの極限を考えれば

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{{}^n\bar{s}_{if}}{{}^n s_i}\left(\frac{d^n v_f}{dy_f{}^0}-1\right)+\sum_{f\neq k}\frac{{}^n\bar{s}_{ik}-{}^n s_i}{{}^n s_i}\ \frac{d^n v_k}{dy_f{}^0}\right.$$

$$\left.-\frac{{}^n B_i}{{}^n s_i}\ \frac{d^n v_B}{dy_f{}^0}\right]$$

となり，上式第２，３項は一般に０に収束しない。よって任意の n について ${}^n\bar{s}_{if}>0$ であっても $\lim_{n\to\infty}{}^n\bar{s}_{if}=0$ なる株主 i は必ずしも企業の純価値を最大にする生産計画を支持しない[9]。またその種の株主間でも企業の生産計画を廻っての利害は一致しない。これで（命題）の前半部分が示された。 ‖

次に消費配分の最適性について考えてみよう。そのために下記の概念を導入する[10]。

$\alpha_{if}((y_k)_{k\in{}^nF})=\{$企業 f だけが何らかの生産計画変更（y_f から $\hat{y}_f$ へ）をして，$U_i(\hat{x}_i{}^0-l,\ \hat{x}_i{}^1,\ \hat{x}_i{}^\sigma)=U_i(x_i)$ なる l の最大値$\}$

明らかに企業 f の生産計画変更を通じて効用水準を高めることが可能な消費者 i については $\alpha_{if}>0$ となる。またすべての消費者 i，企業 f について $\alpha_{if}=0$ となることは，生産計画 $(y_k)_{k\in{}^nF}$ に対応する消費配分 (x_i) がパレート最適であることと同値である。

（命題Ｖ）

${}^nE$ 経済においてすべての企業が純価値を最大にしている時の生産計画を $({}^n y_k{}^*)_{k\in{}^nF}$ で示せば，すべての消費者 i，企業f$(\in{}^nF)$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}{}^n\alpha_{if}(({}^n y_k{}^*)_{k\in{}^nF})=0$$

（証　明）

（命題iv）の証明で明らかにされたように生産計画 ${}^n y_f{}^*$ は，$n\to\infty$ のとき，$\lim_{n\to\infty}{}^n\bar{s}_{if}>0$ なる株主にとって最も望ましいものである。また $n\to\infty$ のとき，$\lim_{n\to\infty}{}^n\bar{s}_{if}=0$ なる株主の効用に企業 f が及ぼす影響はいくらでも小さいものと

なる。よって所望の結論が得られる。 ‖

5．関連したモデルとの比較

Stiglitz（〔21〕p．47，50）は⒆において

$$\bar{s}_{if}=s_i,\quad \frac{dv_B}{dy_f^0}=0,\quad \frac{d\lambda}{dy_f^0}=0 \qquad f\epsilon F \tag{20}$$

と想定した上で dy_{ff}^{σ}/dy_f^0 が $\sum_k dy_{fk}^{\sigma}/dy_f^0$ に比して小さければ（類似した企業が多数存在すればこの条件は満たされる），企業純価値の最大化政策によって近似的にパレート最適な消費配分が実現されると述べている。そうした条件の下では⒆から分るように，企業純価値を最大にする生産計画を株主は全員一致して支持するのであるからパレート最適が実現することは明らかである。しかし企業 f の産出が他企業の産出から確率的に独立である場合には

$$\sum_k dy_{fk}^{\sigma}/dy_f^0=dy_{ff}^{\sigma}/dy_f^0$$

であるから dy_{ff}^{σ}/dy_f^0 が $\sum_k dy_{fk}^{\sigma}/dy_f^0$ に比して小さいという条件は満たされず，企業純価値最大化によってパレート最適が実現されることもない。

Jensen & Long（〔10〕p．169）及び **Merton & Subrahmanyam**〔17〕も類似した議論を展開しているが，それらを本稿のモデルと関連づけてみよう。彼らのモデルではすべての企業 f について，規模に関する確率的収穫不変の共通の生産技術が想定されている。つまり

$$y_f^1=\rho y_f^0,\quad y_{ff}^{\sigma}=\sigma^2(y_f^0)^2$$

また任意の二企業間の産出の相関係数は $\beta(0\leq\beta\leq1)$ で共通だと考えているので

$$y_{fk}^{\sigma}=\beta\cdot\sigma^2\cdot y_f^0\cdot y_k^0$$

Stiglitz と同様に⒇を想定しているので，⒆は次のようになる。

$$\frac{1}{U_t{}^0}\ \frac{dU_t}{dy_f{}^0}=\frac{s_t}{r}\left[\rho-r-\lambda\sigma^2(\beta\sum_{k\neq f}y_k{}^0+y_f{}^0)\right] \tag{21}$$

但し，$r=1/v_B$。

よって上式〔 〕の中が0となる生産計画ですべての株主の利害は一致し[11)]，すべての企業がそのような生産計画を採用すればパレート最適な消費配分が実現される。ところで企業純価値を最大にする生産計画は(10)より

$$\rho-r-\lambda\sigma^2(\beta\sum_{k\neq f}y_k{}^0+2y_f{}^0)=0 \tag{22}$$

であり，パレート最適を実現する生産計画とは異なる。

さてすべての企業が純価値を最大にする生産計画（その時の投入量を $y_f{}^{0*}$ で示す）を採用すれば，すべての企業の投入量は等しくなり，企業数が N の時の社会全体の投入量は(22)より

$$\frac{N(\rho-r)}{\lambda\sigma^2\{\beta(N-1)+2\}}$$

そこで $N\to\infty$ としたとき，$\beta\neq0$ なるかぎり $(\rho-r)/\lambda\sigma^2\beta$ に収束する。よって個別企業の投入量 $y_f{}^{0*}$ は0に収束することとなる。それ故 $N\to\infty$ のとき $\beta\sum_{\substack{k=1\\ \neq f}}^{N}y_k{}^0+y_f{}^0$ と $\beta\sum_{\substack{k=1\\ \neq f}}^{N}y_k{}^0+2y_f{}^0$ とは等しくなり，企業純価値を最大にする生産計画によってパレート最適が実現されることになる。しかしこのことは $\beta=0$ つまりすべての企業の産出が確率的に独立である場合には成立しない。そのとき $y_f{}^{0*}$ は(22)より企業数 N とは無関係に一定に留まるからである。

本稿のモデルでは産出が確率的に独立な企業の場合でも企業純価値を最大にする生産計画により，極限経済ではパレート最適が実現されることが示された（命題V)。そこでは消費者の数 n を増大させるという方法が採用され，それに伴って生産を行なう企業の数も増大することができた。$n\to\infty$ のとき，${}^n\lambda\to0$（命題 i）となるので，$y_f{}^{0*}\to0$ とならなくとも，(21)(22)より企業純価値を最大にする生産計画とパレート最適を実現するそれとは一致することになる。但し，本稿のモデルは $y_f{}^1$ の有界性を仮定している（仮定4）ので，完全な意味での規模に関する確率的収穫不変とは両立しない。

このモデルの違いを明らかにするために，次のように考えてみよう。規模に関する確率的収穫不変を仮定しているので，それぞれの企業の確率的産出物の特性は生産計画からは独立であり，企業は生産規模だけを決定すると考えることができる。企業 f の単位産出物の価格は(10)より

$$v_f/y_f{}^0=[\rho-\lambda\sigma^2(\beta\sum_{k\neq f}y_0{}^k+y_0{}^f)]/r$$

(20)を仮定しても，この値は企業 f の投入・産出水準 $y_f{}^0$ 自体に依存しており，$y_f{}^0$ の増大に伴って低下する（つまり需要曲線が右下り）という意味で完全競争的ではない[12]。一般に市場が完全競争的なら企業純価値を最大にする生産計画によりパレート最適が達成されるが，完全競争的でなければ達成されないと考えられる。

需要曲線が水平となるためには，$\lambda\sigma^2y_f{}^0$ が無視できるほど小さくなければならない。**Jensen & Long, Merton & Subrahmanyam** は $\beta\neq0$ のとき，企業数 N を増大させることにより $y_f{}^{0*}$ が無視できるほど小さくなることを示した。それ故競争状態が実現されることになり，($y_f{}^{0*}$) でパレート最適が達成される。しかし $\beta=0$ のときには，企業数の増大は $y_f{}^{0*}$ を無視できるほど小さくせず，その為競争状態は実現されない。これに対して本稿のモデルでは消費者数を増大させることにより，${}^n\lambda\to0$ が示された。この場合 β がどのような値を取ろうとも，$y_f{}^0$ が有界であるかぎり，$\lambda\sigma^2y_f{}^0$ は無視できるほど小さくなり競争状態が実現される[13]。

6. 補　　論

(i) 本論では企業による投入物の調達は株式発行を通じてのみ行なわれると想定した。この想定を変更し，投入物の調達が株式と共に債券(負債)の発行によって行なわれるとしても，(命題) (i)～(V) はそのままの形で成立する。しかも債券が安全であっても，危険を伴っても同様に成立する。企業純価値の内容が，株式価値マイナス投入物価値から株式価値プラス負債価値マイナス投入

物価値に変わるだけである。結論に変化が生じない理由は，平均・分散アプローチの下では企業価値は資本構成の如何に 依存しないという Modigliani-Miller の命題が，負債が危険を伴うにしろ，伴わないにしろ成立するからである[14]。

(ii) モデルを生産が2回行なわれる3期間モデルへと拡張してみよう。株式の先物市場は存在せず，株式取引は第0期，1期の2回行なわれる ものとする。第0期の取引の結果である株式保有が次の取引の出発点である第1期初の株式保有となる。消費者及び企業に関する仮定はこれまで通りとしよう。但し(3)の代わりに

$$x_i^1=\sum_f s_{if}(y_f^1+v_{if}^1)+B_i+\bar{x}_i^1$$

となる。v_{if}^1 は第1期の株式市場で成立する企業f価値のうち第0期末時点の株主総体に帰属する部分に対する消費者 i の予想であり，確実なものとして予想されているとしよう。 さらにv_{if}^1 がすべての 消費者にとって 同じだと想定しよう。すると第0期の企業の生産計画を廻って（命題iv）が成立する。 しかし（$n\cdot{}^ns_i$）の有界性（付録4） より第1期初の 株式保有は，すべての消費者 i，企業 f について $\lim_{n\to\infty}{}^n\bar{s}_{if}=0$ となっており，第1期の企業の生産計画を廻って（命題iv）の後半部分が成立することはないように思われる。 但し，状態選好アプローチにおける spanning と同様の状況が生じ，消費者数の増大と比例してspanning の関係も拡大して行けば，$\lim_{n\to\infty}{}^n\bar{s}_{if}>0$ ということもありうる[15]。

(iii) 本稿のモデルでは 消費者数 n の増大で示される経済の大規模化によって株式市場における完全競争性が実現され，そこでは個々の消費者のポートフォリオの中にすべての企業の株式が含まれている。ところで，取引費用の存在のために投資家が保有する株式の種類が制限されているとすれば，事態はどう変化するであろうか[16]。${}^nE$ 経済において企業 f の株式を保有している投資家の集合を ${}^nI_f$ で示せば，(9)を $i\epsilon{}^nI_f$ に関して総和することにより

$$v_f = v_B[y_f{}^1 - {}^n\lambda_f(y_{ff}{}^\sigma + \sum_{k \neq f}(\sum_{i \in {}^nI_f} s_{ik})y_{fk}{}^\sigma)]$$

但しここでの ${}^n\lambda_f$ は(12)の ${}^n\lambda$ とは異なり

$$^n\lambda_f = \frac{1}{\sum_{i \in {}^nI_f}(-U_i{}^1/U_i{}^\sigma 2)}$$

である。(12)との相違は，リスクの価格 ${}^n\lambda_f$ がここでは企業ごとに異なり，企業 f 株の保有者のリスク態度 $-U_i{}^1/2U_i{}^\sigma$ だけに依存していることである。また企業 f のリスク $y_{ff}{}^\sigma + \sum_{k \neq f}(\sum_{i \in {}^nI_f} s_{ik})y_{fk}{}^\sigma$ も企業 f 株の保有者が負担する部分だけに限られており，(12)に比して企業 f の産出の分散 $y_{ff}{}^\sigma$ の占める割合が大きくなっている。企業の生産可能性集合が有界である限り，$n \to \infty$ となっても $\#({}^nI_f)$ は有限の大きさに留まるであろう。結局，取引費用の存在のために ${}^n\lambda_f \to 0$ は成立せず，株式市場の完全競争性は実現されないことになる。また（命題）(i)〜(V) は，(iii) の $\lim_{n \to \infty}({}^n\hat{v}_B - {}^nv_B) = 0$ を除いて一般に成立しなくなる。

7．むすび

消費者数を無限に増大させることによって構成される大規模経済においては，個別企業（生産可能性集合が有界である）が経済に与える影響は無視できるほど小さいものとなる。債券利子率及びリスクの価格に与える影響は無視できるほど小さくなるので，株主の効用水準は初期保有の予算額にもっぱら依存することになる。また他企業の価値に与える影響も無視できるほど小さくなるので，株主の利害関心は当該企業の価値に集中することになり，企業純価値最大化行動について基本的に株主一致性が成立することになった。但し拡大する経済系列の極限を考察するという方法のために，債券や株式保有の有界性や初期保有株式の極限に十分な注意を払わねばならない。

付 録 1

補題の証明

（定義１）の均衡条件は(2)～(8)(10)～(12)である。（定義２）の均衡では次の関係が成立する。

$$U_i^1/U_i^0=v_B \qquad (A,\ 1)$$

$$-U_i^1/2U_i^\sigma=\sigma_i/\lambda\sum_{f,k}y_{fk}^\sigma \qquad (A,\ 2)$$

よって（定義２）の均衡条件は(13)～(17)（A，１）（A，２）となる。

さて（定義１）の均衡消費配分（x_i）が（定義２）のそれになることをまづ示そう。（定義１）において σ_i は明示的に現われていないので

$$\sigma_i=s_i\sum_{f,k}y_{fk}^\sigma \qquad (A,\ 3)$$

を σ_i の定義式と考えよう。(3)(10)（A，３）を(2)に代入して整理すれば(13)が得られる。（A，３）を(4)に代入すれば(14)が成立する。(7)は(15)と，(8)は（A，１）と一致している。(3)を i について総和し，(5)(6)を考慮すれば(16)が得られる。（A，３）を i に関して総和し，(5)を考慮すれば(17)が成立する。(11)と（A，３）より（A，２）が成り立つ。

逆に（定義２）の均衡消費配分は（定義１）のそれであることを次に示そう。（定義２）においてs_i，B_i，v_f は明示的に現われていないので，（A，３）を s_i の，(3)を B_i の，(10)を v_f の定義式と考えよう。（A，３）(3)(10)を(13)に代入すれば(2)が得られる。(14)と（A，３）より(4)が成立する。（A，３）と(17)より(5)が成立する。(3)を i について総和し，(5)(16)を考慮すれば(6)が得られる。（A，２）（A，３）より(11)が成立する。(11)と(5)より(12)が成り立つ。 ‖

付 録 2

$({}^n v_B)_{n=1,2,\cdots}$，$({}^n v_f)_{n=1,2,\cdots}$ は有界である。

（証　明）

${}_r v_B = \max_n ({}^n v_B)_{n=1,2,\cdots,r}$ と定義すれば，$({}_r v_B)_{r=1,2,\cdots}$ は単調増加数列である。ここで$({}^n v_B)$ が有界でないと仮定すれば，$\lim_{r\to\infty} {}_r v_B = \infty$ となる。${}_r v_B$ に対応する経済の変数をすべて左下付の r で表示することにしよう（以下の付録ではすべて同様に記す)。すると債券取得に関する 効用最大化の条件(8)と仮定 1，2 とによりすべての消費者 i について

$$\lim_{r\to\infty} {}_r x_i{}^1 = 0 \text{ または } \lim_{r\to\infty} {}_r x_i{}^0 = \infty$$

でなければならない。

さて $\lim_{r\to\infty} {}_r x_i{}^0 = \infty$ なる消費者の集合を I_1，それ以外の消費者の集合を I_2 とし，${}_r v_B$ に対応する経済における 消費者の集合と I_1，I_2 との共通部分を${}_r I_1$，${}_r I_2$ としよう。${}_r I_1$ に属する 消費者の数を $\#({}_r I_1)$ で表わせば， 経済全体の消費者 1 人当りの第 0 期実物財初期保有は有限である（仮定 5 ）から

$$r\to\infty \text{ のとき } \#({}_r I_2)/\#({}_r I_1)\to\infty$$

(11)(12)から $s_{i,r} \geq 0$ であり，また(3)及び仮定 5 より I_2 に属する消費者に関しては

$$\lim_{r\to\infty} {}_r B_i \leq -\bar{x}_i{}^1 < -\underline{X} < 0$$

でなければならない。債券市場の均衡条件(6)より

$$\sum_{i\in {}_r I_1} {}_r B_i = -\sum_{i\in {}_r I_2} {}_r B_i$$

ここで I_1 に属する消費者 1 人当りの債券保有額を考えてみれば

$$\lim_{r\to\infty} \frac{-\sum_{i\in {}_r I_2} {}_r B_i}{\#({}_r I_1)} \geq \lim_{r\to\infty} \frac{\underline{X}\#({}_r I_2)}{\#({}_r I_1)} = \infty$$

よって $r=\infty$ のとき，債券を無限に保有する消費者が I_1 に存在しなければならない。ところで消費者 i の第 0 期消費は，予算制約式(2)，効用最大化の条件(8)(10)より

$$
\begin{aligned}
{}_r x_i{}^0 &\leqq \sum_f ({}_r\bar{s}_{if} - {}_r s_{if})\,{}_r v_f - {}_r B_i \cdot {}_r v_B + \bar{x}_i{}^0 - \sum_f {}_r\bar{s}_{if} \cdot {}_r y_f{}^0 \\
&= \frac{U_i{}^1}{U_i{}^0}\Bigl(\sum_f {}_r\bar{s}_{if}\ {}_r y_f{}^1 - {}_r B_i - \lambda \sum_f \bar{s}_{if} \sum_k y_{fk}{}^{\sigma}\Bigr) \\
&\quad - \sum_f s_{if}\, y_f{}^1 + \bar{x}_i{}^0 - \sum_f \bar{s}_{if}\, y_f{}^0
\end{aligned}
$$

I_1 に属し，債券を無限に保有することになる消費者 i について考えれば，$(\sum_f {}^n\bar{s}_{if})$，$({}^n y_f{}^1)$ の有界性（仮定４，６）より

$$
\lim_{r\to\infty}\Bigl(\sum_f {}_r\bar{s}_{if} \cdot {}_r y_f{}^1 - {}_r B_i\Bigr) = -\infty
$$

となり，上式より $\lim_{r\to\infty} {}_r x_i{}^0 = \infty$ ではありえない。これは $i \epsilon I_1$ に矛盾する。それ故 $\lim_{r\to\infty} {}_r v_B = \infty$ ではありえず$({}^n v_B)$ は有界となる。

また仮定３，４及び（命題ｉ）より $({}^n\lambda \sum_k {}^n y_{fk}{}^{\sigma})$ は有界である。そこで v_f の決定式⑽及び（${}^n v_B$）の有界性より（${}^n v_f$）も有界となる。　　‖

付　録　3

$^{\forall}n$，i について ${}^n x_i{}^1 > \varepsilon$ なる正数 ε が存在する。

（証　明）

上記の ε が存在しなければ ${}_r x_i{}^1 = \min_n ({}^n x_i{}^1)_{n=1,\cdots,r}$ で定義された単調減少数列（${}_r x_i{}^1$）の極限は，ある消費者 i に関して０となる。すると仮定１，２，⑻及び（${}_r v_B$）の有界性（付録２）より $\lim_{r\to\infty} {}_r x_i = 0$ でなければならない。しかし，それは消費者 i の予算 $\bar{x}_i{}^0 + \sum_f {}_r\bar{s}_{if}({}_r v_f - {}_r y_f{}^0)$ が正であることに矛盾する。　　‖

付　録　4

$^{\forall}n$ に対して $\sum_{f,k} {}^n y_{fk}{}^{\sigma}/n^2 > \delta > 0$ なる δ が存在するなら，すべての消費者 i について$(n \cdot {}^n s_i)_{n=1,2,\ldots}$，$(\sum_{f \epsilon {}^n F} {}^n s_{if})_{n=1,2,\ldots}$ は有界である。

（証　明）

(11)及び（命題 i ）より

$$n \cdot {}^n s_i < \frac{1}{2\varepsilon} \cdot \frac{U_i^1}{U_i^\sigma}$$

ここで $\forall n$, i に対して ${}^n x_i^\sigma > \delta_1$ なる正数 δ_1 の存在が示されれば，付録 3，仮定 2 及び上記の式より $(n \cdot {}^n s_i)$ は有界となる。

そうした δ_1 が存在しないなら，${}_r x_i^\sigma = \min_n ({}^n x_i^\sigma)_{n=1,2,\cdots,r}$ と定義したとき，ある消費者 i について $\lim_{r\to\infty} {}_r x_i^\sigma = 0$。また(11)より任意の消費者 i, j について

$$\frac{{}^n s_j}{{}^n s_i} \cdot \frac{U_i^1}{U_i^\sigma} = \frac{U_j^1}{U_j^\sigma}$$

しかも付録 4 の仮定から，n に対応して適当な j を取れば，${}^n x_j^\sigma > \delta > 0$ とできる。すると上式の右辺は明らかに有界である。左辺については ${}_r x_i^\sigma \to 0$ より $U_i^1/U_i^\sigma \to -\infty$ だから，${}_r s_j / {}_r s_i \to 0$ でなければならない。他方 x_i^σ の定義式(4)より

$$\frac{{}_r s_j}{{}_r s_i} = \left(\frac{{}_r x_j^\sigma}{{}_r x_i^\sigma} \right)^{1/2}$$

${}_r x_i^\sigma \to 0$, ${}_r x_j^\sigma > \delta > 0$ だから ${}_r s_j / {}_r s_i \to 0$ ということはありえない。よって ${}^n x_i^\sigma > \delta_1$ なる正数 δ_1 の存在が示された。

また $(n \cdot {}^n s_i)$の有界性及び仮定 3， 5 より $\sum_{f \in {}^n F} {}^n s_{if} = \#({}^n F) \cdot {}^n s_i$ も有界となる。 ‖

付録 4 の仮定が充たされていない場合を考察してみよう。その場合 $\sum_{f,k} {}^n y_{fk}^\sigma = 0$ なる n が存在するか，または $\left(\sum_{f,k} {}^n y_{fk}^\sigma / n^2\right)$ の適当な部分列をとれば 0 に収束するかのどちらかである。前者のケースでは，すべての企業の株式が安全な債券となり，株式保有率 ${}^n s_{if}$ を問題にしても意味がない。

後者のケースについても同様のことが言えることを以下示そう。x_i^σ の定義式(4)，株式取得に関する効用最大化条件(11)及び（命題 i ）より

$$
\begin{aligned}
{}^{n}x_i{}^{\sigma} &= ({}^{n}s_i)^2 \sum_{f,k} {}^{n}y_{fk}{}^{\sigma} \\
&= ({}^{n}\lambda)^2 \cdot \left(\frac{-U_i{}^1}{2U_i{}^{\sigma}} \right)^2 \sum_{f,k} {}^{n}y_{fk}{}^{\sigma} \qquad (\mathrm{A},\ 4) \\
&< \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{-U_i{}^1}{2U_i{}^{\sigma}} \right)^2 \frac{\sum_{f,k} {}^{n}y_{fk}{}^{\sigma}}{n^2}
\end{aligned}
$$

議論の簡単化のため $\sum_{f,k} {}^{n}y_{fk}{}^{\sigma}/n^2 \to 0$ としよう。すると ${}^{n}x_i{}^{\sigma}$ が0に収束しないという想定は上式と矛盾する。よって ${}^{n}x_i{}^{\sigma} \to 0$ である。

ところで株式購入額は

$$
s_i \sum_f v_f = v_B [s_i \sum_f y_f{}^1 - s_i \lambda \sum_{f,k} y_{fk}{}^{\sigma}]
$$

であり，(11)より

$$
{}^{n}s_i {}^{n}\lambda \sum_{f,k} {}^{n}y_{fk}{}^{\sigma} = ({}^{n}\lambda)^2 \left(\frac{-U_i{}^1}{2U_i{}^{\sigma}} \right) \sum_{f,k} {}^{n}y_{fk}{}^{\sigma}
$$

${}^{n}x_i{}^{\sigma} \to 0$ より，n が十分大きければ，$-U_i{}^1/2U_i{}^{\sigma} > 1$。それ故（A，4）より十分大きな n に対して

$$
{}^{n}s_i {}^{n}\lambda \sum_{f,k} y_{fk}{}^{\sigma} < {}^{n}x_i{}^{\sigma}
$$

そこで ${}^{n}s_i {}^{n}\lambda \sum_{f,k} y_{fk}{}^{\sigma} \to 0$ となる。つまり $n \to \infty$ のとき ${}^{n}s_i \sum_f v_f$ という株式を購入することは，${}^{n}s_i \sum_f y_f{}^1$ だけの安全な債券を購入することと同じになり，株式保有率 s_{if} を問題にしても無意味である。

付　録　5

ある正数 δ が存在し，$\forall n$ に対して

$$
{}^{n}v_B > \delta
$$

（証　明）

もし上記のような δ が存在しなければ，${}_{r}v_B = \min_n ({}^{n}v_B)_{n=1,2\cdots,r}$ と定義した

とき，$\lim_{r\to\infty} {}_rv_B=0$。株式価値の決定式(10)より

$$\sum_k {}_ry_{fk}{}^\sigma \geqq 0 \Rightarrow {}_rv_f \leqq {}_rv_B \cdot {}_ry_f{}^1$$

そこで r を十分大きくとれば $y_f{}^1$ の有界性（仮定４）より $\sum_k {}_ry_{fk}{}^\sigma \geqq 0$ なる企業 f は投入物の調達が不可能になり（(1)の条件を充たさない），生産を行なわない。すると ${}_rv_B$ に対応する経済において生産を行なっている企業の集合 ${}_rF$ が空集合でないかぎり，どのようなものであっても ${}_rF$ の中に $\sum_k {}_ry_{fk}{}^\sigma \geqq 0$ なる企業 f が存在するのだから条件(1)に抵触する。よって r が十分大きいとき ${}_rF=\phi$ である。

そこで消費者 i の消費は（$\bar{x}_i{}^0-{}_rB_i\cdot{}_rv_B$, $\bar{x}_i{}^1+{}_rB_i$, 0）となり，${}_rv_B\to 0$，債券取得に関する効用最大化条件(8)及び仮定１，２よりすべての消費者の債券需要${}_rB_i$ は正となる。これは債券市場の均衡条件(6)に矛盾する。故に ${}^\forall n$ に対して ${}^nv_B>\delta>0$ なる δ が存在する。 ‖

付録 6

すべての消費者 i について $({}^nx_i{}^1)({}^nx_i{}^0)$ は上に有界である。

（証明）

$({}^nx_i{}^1)$ が上に有界でないと仮定するなら，${}_rx_i{}^1=\max_n({}^nx_i{}^1)_{n=1,2,\cdots,r}$，で定義された単調増加数列 $({}_rx_i{}^1)_{r=1,2,\cdots}$ の極限は，ある消費者 i について無限大となる。すると仮定１，２，(8)及び ${}^nv_B>\delta>0$（付録５）より，$\lim_{r\to\infty} {}_rx_i{}^0=\infty$ でなければならない。ところで予算制約式(2)の右辺は有界である（仮定５，６，付録２）。そこで $\lim_{r\to\infty} {}_rx_i{}^0=\infty$ なるためには $\lim_{r\to\infty}(\sum_f {}_rs_{if}\cdot{}_rv_f+{}_rB_i\cdot{}_rv_B)=-\infty$ でなければならない。(10)(11)(3)(4)より

$$\sum_f s_{if}v_f+B_iv_B=v_B[s_i\sum_f y_f{}^1+B_i-\lambda s_i\sum_{f,k}y_{fk}{}^\sigma]$$

$$=v_B\left[x_i{}^1-\bar{x}_i{}^1+\frac{2U_i{}^\sigma}{U_i{}^1}x_i{}^\sigma\right]$$

そこで $r\to\infty$ のとき，$-2U_i^\sigma\cdot{}_rx_i^\sigma/U_i^1\to\infty$ でなければならない。すると ${}_rx_i^\sigma\to\infty$ または ${}_rx_i^1\to\infty$ いずれにしろ $-U_i^1/2U_i^\sigma\to0$ となる。${}_rx_i^1$ に対応する経済の消費者数を $\tilde{r}$ とすれば，(11)（命題 i），$(\sum_f {}^ny_f^1/n)$ の有界性（仮定3，4，5より）から

$$
\begin{aligned}
{}_rs_i\sum_f {}_ry_f^1 &= {}_r\lambda\frac{-U_i^1}{2U_i^\sigma}\sum_f {}_ry_f^1\\
&<\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{-U_i^1}{2U_i^\sigma}\cdot\frac{\sum_f {}_ry_f^1}{\tilde{r}}\longrightarrow 0
\end{aligned}
$$

ところが他方 ${}_rx_i^1={}_rs_i\sum_f {}_ry_f^1+{}_rB_i+\bar{x}_i^1\to\infty$ かつ ${}_rB_i\to-\infty$ より ${}_rs_i\sum_f {}_ry_f^1\to\infty$ でなければならない。これらは互いに矛盾する。それ故 $({}^nx_i^1)$ は上に有界である。

また $({}^nx_i^0)$ が上に有界でないなら，${}_rx_i^0=\max_n({}^nx_i^0)_{n=1,2,\cdots,r}$ と定義したとき，ある消費者 i について $\lim_{r\to\infty}{}_rx_i^0=\infty$ となる。すると仮定1，2，(8)及び ${}^nv_B>\delta>0$（付録5）より $\lim_{r\to\infty}{}_rx_i^1=\infty$ でなければならない。これは $({}^nx_i^1)$ の有界性に矛盾する。よって $({}^nx_i^0)$ も上に有界となる。 ‖

付　録　7

${}^\forall n$ に対して $\sum_{f,k}{}^ny_{fk}^\sigma/n^2>\delta$ なる正数 δ が存在するなら，すべての消費者 i について $({}^nB_i)$ は有界である。

（証　明）

予算制約式(2)において右辺は有界であり（付録2，仮定5，6），${}^nx_i^0\geq0$，${}^ns_{if}\geq0$，${}^nv_B>\varepsilon>0$（付録5）だから $({}^nB_i)$ は上に有界である。また x_i^1 の定義式(3)から

$$
{}^nB_i={}^nx_i^1-\sum_f {}^ns_{if}\,{}^ny_f^1-\bar{x}_i^1
$$

であり，${}^nx_i^1\geq0$，$(\sum_f {}^ns_{if})$ の有界性（付録4）及び $({}^ny_f^1)$，$\bar{x}_i^1$ の有界性（仮定4，5）より $({}^nB_i)$ は下からも有界となる。 ‖

付録7の仮定が充たされない場合は，付録4で示されたように株式と債券との区別が意味をなさず，$\sum_{f} s_{tf} v_f + B_t v_B$ の全体を安全資産の購入額と考えることができる。これは予算制約式(2)及び（$^n x_t^0$）の有界性（付録6）より，明らかに有界である。

注

1）cf. 本稿6，補論(i)

2）消費者数nとリスクの価格 λ との関連については，Lintner〔15〕及び Stiglitz〔21〕p. 38においても言及されている。

3）Rubinstein（〔18〕p. 752）は，すべての消費者の効用関数及び初期保有財が等しいという強い想定の下で，本稿と同じことを示している。尚公共投資の割引率という文脈でこのことを最初に明らかにしたのは Arrow & Lind〔1〕である。cf Foldes & Rees〔5〕。Leland（〔12〕p. 142）はリスクの価格 λ が小さくない場合や産出の分散 y_{ff}^{σ} が大きい場合には，Arrow & Lind の議論は成立しないと述べている。形式的にはその通りだが Arrow & Lind の議論は本来大規模経済を前提しており，その眼目を本稿のモデルに則して述べれば，大規模経済において $\lambda \to 0$ となることにより有界で独立な投資のリスク・プレミアムは必ず0になる，ということであろう。

4）（命題i）に留意してリスクの価格を $-v_B n \cdot {}^n\lambda$ と定義しよう。

5）リスクに対する需要が x_t^{σ} ではなく σ_t であること及び均衡が $^n y^{\sigma}$ に依存する点において，変形された均衡は標準的ワルラス型モデルと異なっている。消費者の効用が収益の分散ではなく標準偏差に依存していると想定すれば，変形された均衡は標準的ワルラス型モデルとなる。cf Harris〔6〕p. 107

6）以下の展開については，cf Dierker〔3〕12章，Hildenbrand〔9〕，2章付録。

7）弱収束の定義は，

$^n\mu \to \mu \Leftrightarrow T \to R$ の任意の有界連続関数 f に対して，$\int f d^n\mu \to \int f d\mu$

cf Hildenbrand〔9〕p. 48

8）Prohorov の距離 η の定義は，

$\eta(\mu, \nu) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid \nu(E) \leq \mu(B_\varepsilon(E)) + \varepsilon$ and $\mu(E) \leq \nu(B_\varepsilon(E)) + \varepsilon$

for $^{\forall} E \in \mathfrak{B}(T)\}$

cf Hildenbrand〔9〕p. 49

9）この点は既に Rubinstein〔19〕によって確実性の想定下で指摘されている。この種の株主不一致性は Arrow & Lind〔1〕が設定した状況においても生じるが，暗

黙に本稿(20)が想定されているため表面化することはない。

10) この概念については，cf Hart〔7〕p. 11，〔8〕p. 1066

11) 条件(20)を想定するかぎり平均・分散アプローチでは，規模に関する確率的収穫不変及び産出の相関係数 β の一定性を仮定しなくとも株主一致性が得られることは明らかである。cf Ekern & Wilson〔4〕p. 178

12) Le Roy（〔13〕p. 154），Krouse（〔11〕p. 772）はArrow—Debreu モデルとの対比において同様の結論に達している。

13) 平均・分散アプローチにおける競争性については，cf Baron〔2〕

14) cf Stiglitz〔20〕p. 789

15) cf Hart〔8〕p. 1073

16) cf Levy〔14〕，Mayshar〔16〕

参 考 文 献

〔1〕 Arrow, K. J. and R. C. Lind, "Uncertainty and the Evaluation of Public Investment Decisions" Amer. Econ. Rev. June 1970, 60, 364—78.

〔2〕 Baron, D. P. "Investment Policy, Optimality and the Mean-Variance Model" Journal of Finance, March 1979 34, 1, 207—32.

〔3〕 Dierker, E. *Topological Method in Walrasian Economics*, Springer-Verlag, 1974.

〔4〕 Ekern, S. and R. Wilson, "On the Theory of the Firm in an Economy with Incomplete Markets" Bell Jour. Econ. Manag. Scien. Spring 1974, 5, 171—80.

〔5〕 Foldes, L. P. and R. Rees, "A Note on the Arrow-Lind Theorem" Amer. Econ. Rev. March 1977, 67, 188—93.

〔6〕 Harris, R. G. "A General Equilibrium Analysis of the Capital Asset Pricing Model" Jour. Fina. Quanti. Analy. March 1980, 15, 1, 99—122.

〔7〕 Hart, O. D. "Monopolistic Competition in a Large Economy with Differentiated Commodities" Rev. Econ. Stud. January 1979, 46, 1—30.

〔8〕 ——— "On Stockholder Unanimity in Large Stock Market Economies" Econometrica, Sep. 1979, 47, 1057—83.

〔9〕 Hildenbrand, W. *Core and Equilibria of a Large Economy*. Princeton University Press, 1974.

〔10〕 Jensen, M. C. and J. B. Long, "Corporate Investment under Uncertainty and Pareto Optimality in the Capital Market" Bell Jour. Econ.

Manag. Scien. Spring 1972, 151—74.
〔11〕 Krouse, C. G. "The Optimality of Risk Allocation in Competitive Production and Exchange: A Synthesis" Southern Economic Journal, April 1978, 44, 4, 762—77.
〔12〕 Leland, H. E. "Production Theory and the Stock Market" Bell Jour. Econ. Manag. Scien. Spring 1974, 5, 125—44.
〔13〕 LeRoy, S. F. "Stock Market Optimality: Comment" Quar. Jour. Econ. Feb 1976, 90, 150—55.
〔14〕 Levy, H. "Equilibrium in an Imperfect Market: A Constraint on the Number of Securities in the Portfolio" Amer. Econ. Rev. Sep. 1978, 68, 4, 643—58.
〔15〕 Lintner, J. "The Market Price of Risk, Size of Market and Investor's Risk Aversion" Rev. Eco. Statis. Feb. 1970, 52, 87—99.
〔16〕 Mayshar, J. "Transaction Costs in a Model of Capital Market Equilibrium" Jour. Polit. Econ. August 1979, 87, 4, 673—700.
〔17〕 Merton, R. C. and M. G. Subrahmanyam "The Optimality of a Competitive Stock Market" Bell Jour. Econ. Manag. Scien. Spring 1974, 5, 145—70.
〔18〕 Rubinstein, M. "Corporate Financial Policy in Segmented Securities Markets" Journal of Financial and Quantitative Analysis, Dec. 1973, 749—61.
〔19〕 ——— "Competition and Approximation" Bell Journal of Economics, Spring 1978, 9, 280—86.
〔20〕 Stiglitz, J. E. "A Re-Examination of the Modigliani-Miller Theorm" Amer. Econ. Rev. Dec. 1969, 59, 5, 784—93.
〔21〕 ——— "On the Optimality of the Stock Market Allocation of Investment" Quar. Jour. Econ. April 1972, 86, 25—60.