多角形の閉擬曲面の分類

井上　朋久・宮本　智之・山口　俊博

『高知大学教育学部研究報告』第68号抜刷　2008年 3月

論　文

多角形の閉擬曲面の分類

The Classification of Closed Pseudo Surfaces of Polygons

井上　朋久（信州大学経済学部）
宮本　智之（元高知大学教育学研究科）
山口　俊博（高知大学教育学部）

Tomohisa INOUE*, Tomoyuki MIYAMOTO**, Toshihiro YAMAGUCHI**

*Faculty of Economics, Shinshu University, Nagano, Japan**
*Faculty of Education, Kochi University, Kochi, Japan*** (*tyamag@cc.kochi-u.ac.jp*)

ABSTRACT

We will consider the closed "pseudo surfaces" of an n-gon, which are made by glueing the edges of an n-gon to the other edges. Also we classify them for n=3,4,5,6 up to homeomorphism and determine the fundamental groups and homology groups. Finally, we will illustrate their embeddings into the 3-Euclid space. (MSC:57Q25)

はじめに

トポロジー（topology）とは、今から300年前に生まれたEulerに起源を持つとされる、ものの つながり具合を表現する数学の１つの概念 [P] [Th] [Ka] である。そこでは、例えばドーナッツとコーヒーカップを強引に同じものとみなす。勿論、材質や大きさ、色、用途は全然違うが、定量的でなく定性的な、やわらかい形を考えている。この発想は、数学の枠を越えていろいろな分野で活躍している。例えば [Mi] では、生物の分類にトポロジーの基本概念の（様々な）距離位相を使った議論を見ることができるし、囲碁においては石の「つながり具合」がまさしく勝敗を左右する [B] [Nak]。最近ＮＨＫで、「ポアンカレ予想 100年の格闘」というトポロジーの番組が放送されたので、日頃数学に馴染みのない人でも興味を持たれているかもしれない [Ne]。

本稿では、[M] をもとに、我々のまわりには組み合わせ的に同相 [K] [No] でない（つながり具合を保ったまま移し合わせることができない）ものがどれだけあるかを、実験的に１つの凸多角形で作ったちょっと歪（いびつ）な曲面（＝本稿では「多角形の閉擬（ぎ）曲面」と言う）を使って紹介したい。この同値関係では、例えば、ポケットの付いているシャツと付いていないシャツは違うものと見なすが、襟（えり）が付いてるとか付いてないは関係ない（同一視する）。ちなみにトポロジーには、これよりゆるい同値関係 [N] もあれば、きつい同値関係 [Kj] [Mi] もある。

ここでのいくつかの曲面は、もし粘土や画用紙と糊があれば、作ることもできるのもあるし、実際は作ってみないとイメージしにくいものもあろう。その形は一意に決まるものではない（！）が、作る材料によって理解度も異なる気がするし、案外大人よりも子供のほうが楽かもしれない。もともと多角形は、小中学生でも親しみのある対象のはずである。幾何の授業では補助線を引いての証明などのユークリッド幾何 [Ko] [Na] が伝統的であるが、一度くらい試しにこのようなトポロジーの話題の授業を、算数（数学）と図工（美術）の合同でやったらどうなるのであろう [F]？　ここでは、19個の閉擬曲面が３次元ユークリッド空間R^3に埋め込めるという証明を、イラストによって与えよう。

ここに登場する「基本群」と「ホモロジー群」は、空間のトポロジー的情報を、群 [I] [O] という代数で表現するためのとても大切な位相不変量（有名な「オイラー数」もしかり）であるが、定義及び計算方法はここでは割愛した。これらは、曲面が同相ならば同じであるが、後述の表からもわかるように、同じでも曲面が同相とはかぎらない。例えば21番と22番などを見比べていただきたい。この表はのちに、ホモトピー類 [N] の分類等に役に立つと思われる（未完成）。

作り方と記号

１つの凸多角形の各辺をどこか別の辺と貼り合わせて曲面を作る。イメージしやすく言うと、柔らかくて丈夫

な素材の１枚のｎ角形の板のｎ個の辺に接着剤を付けて、全てのある辺と他の辺を強引にくっつけると、なんとか、少々歪（いびつ）かもしれないが、ある形ができあがる。

例えば、図１左の三角形の３つの辺を矢印の向きにくっつけると、dunce hat [F] といわれるものができる。これを紙粘土で作ると、次の写真のようになる（後図①参照）。カタツムリの殻に近い…？

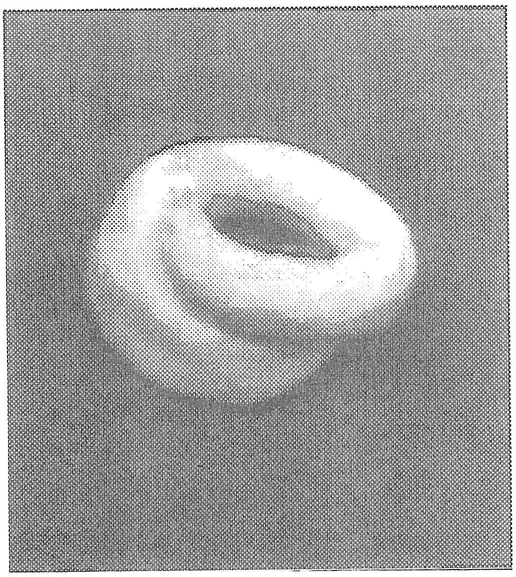


図２では、もはや３次元で作ることはできない。（歪ではあるが）ｎ角形の曲面は、n= 3 の場合はこの２種類しかないことは容易にわかる。図１はaaa^{-1} と、図２はaaa と表示する（矢印に付いているaという記号はなんでもいい。右肩に付いているマイナス１乗の記号は、aとは逆向きにくっつけるという意味）。

四角形以上では、普通の曲面（どんな点の近傍も円盤）もできる。「球面（ボール）」をはじめ、四角形の向いあう辺どうしをくっつけると「トーラス（浮き輪）」（図３）ができるし、一組を反対にくっつけると、「クラインの壺（つぼ）」（図４）ができる。ただしクラインの壺は３次元で作ることはできない。

図３を$aba^{-1}b^{-1}$ 、図４を$abab^{-1}$ と表示する。それらは２ｎ角形の各辺の適当な対をくっつっけてできる。このような普通の閉曲面（＝コンパクトで境界のない曲面）の分類は19世紀に完全にわかっていて、多くのトポロジーの教科書で取り上げられている [C] [K] [Se] [T]。

分類と３次元での実現

図１や図２のような、正確には曲面でない（２次元多様体でない＝ある点の近傍が円盤と同相でない [Mat]）曲面をここでは「擬曲面（pseudo surface)」と言う。しなやかなので、どんなに無理をしても破れたりはしない。我々のいる３次元空間内では自己交差してしまう場合も、高次元（５次元で十分 [Se]）に持っていくと埋め込み可能である。ｎ角形の辺をくっつけてできる閉擬曲面を（`ハサミ’と`ノリ’を使って [K] [Se]）分類すると、３角形の閉擬曲面はさきほど見た２種類（図１、２）、４角形では４種類、５角形では９種類あり、

定理 [M]「６角形までの閉擬曲面は54種類で、そのうち３次元に埋め込めるのは（少なくとも）19個ある。」

詳しい証明等は [M] を参照していただきたい。この定理に関する補足としていくつか挙げる。

(1)　３次元に埋め込めるのは19個以上はないと思っているが証明ができていない。

(2)　普通の閉曲面とちがい、連結和 [K] がちゃんと定義できないので、分類するアルゴリズムはないようだ。

図 1

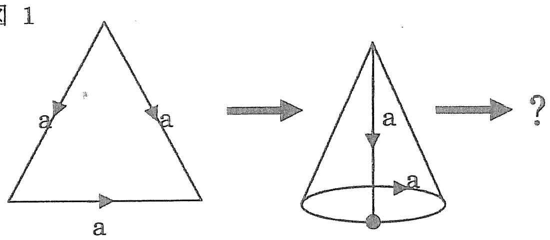


図 2

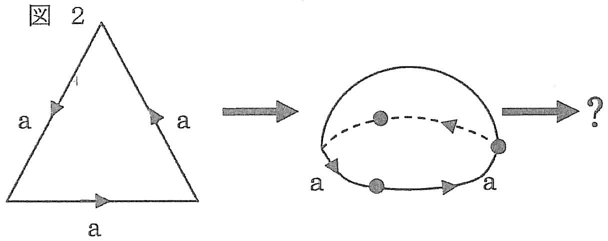


図３

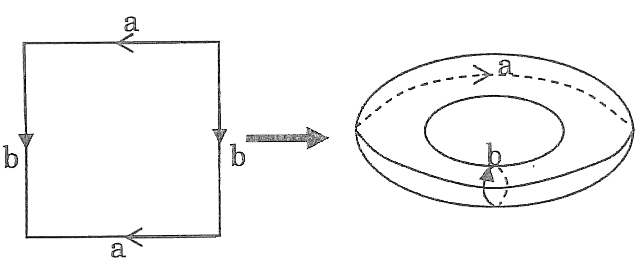
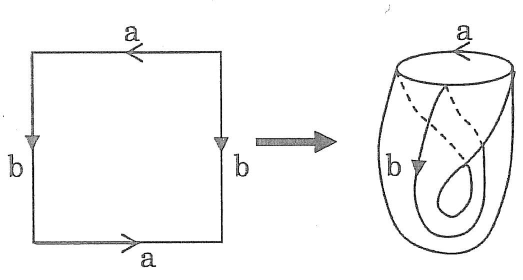


図４



(3) 単体分割をすると、普通の閉曲面に比べ、多くの三角形（単体）を必要とする。

(4) 本稿では6角形までであるが、7角形以上になると、場合によってはaとb以外にcと3文字が必要なので、種類もぐんと増えることが予想される。ただし3次元に埋め込めるものはそれほど増えないだろう。

(5) （同相類よりゆるい）ホモトピー類 [Ma] [N] による分類は、現在研究しているが、まだ未完成である。例えば、ホモトピー的分類では、下表の2，9，10，42番は、つぶれてしまい1点と同一視されてしまう（可縮）。表の5，21，22，35番は、円と2次元球面の一点和とホモトピー同値になり、このことからも多様体でないことがうかがえる。一般的な参考文献としては [H] [Ha] 等がある。

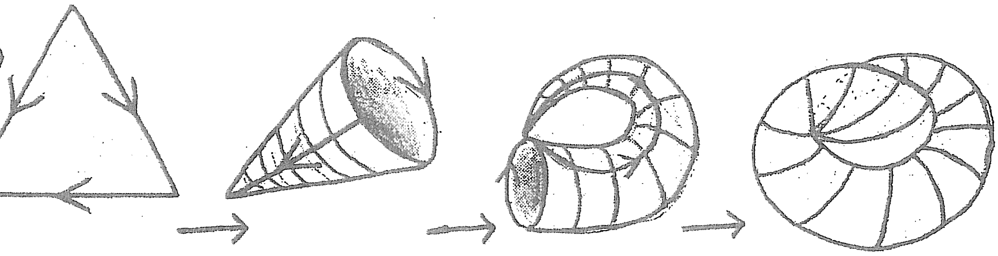
以下、定理の54種類のXの、基本群$\pi_1(X)$ [Ma] [N] [T] と、ホモロジー群$H_1(X)H_2(X)$ [K] [Se] [T] を表にまとめる。ここで、記号〈…;…〉は群を意味し、左に生成元、右に関係式が入っている。Zは整数の集合（加法群）の記号。Zの右下に添え字nが付いたものは、Zを部分群nZで割ってできる有限群。3次元ユークリッド空間に埋め込めるものには○をつけてある。

それらの絵（埋め込み例）を描いてみたのが表の次にあるイラスト①〜⑲である。(n)のnは表の番号。⑪は、ファイバーが2円の一点和で底空間が円の、あるファイバー束 [N] の全空間になっている。そのホモトピー（基本群）完全列は、Zの2元生成自由群〈α,β〉による、ある群の拡大 [N] を与える。このような群の拡大をもつ擬曲面を調べることもおもしろかろう。番号の後ろにいくほど描きずらくなる傾向がある。例えば、⑰⑱⑲は1つの穴からは内側の円へ、もう1つの穴からは外側の円へ、それぞれ漏斗（ろうと）をくっつけたものであるが、画力のなさか、図示するとかえってわかりずらくなるため、途中で断念したが、頭の中ではなんとか作れる。ちなみに、⑪などは絵よりも紙粘土で輪を作って、二重捲きにしたほうがはっきり理解できた。

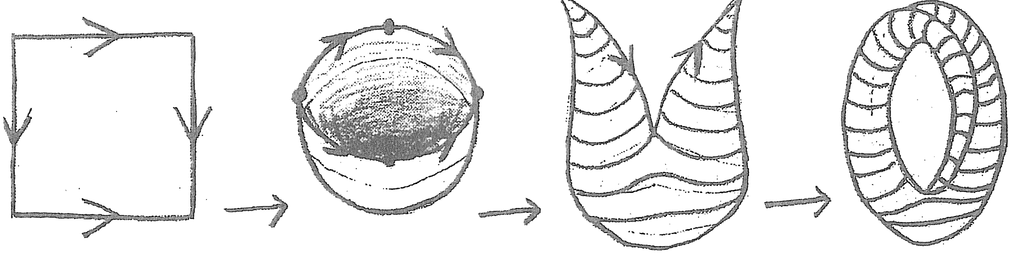
閉擬曲面Xの表示	$\pi_1(X)$	$H_1(X)$	$H_2(X)$	$X\subset R^3$?
1. aaa	$\langle \alpha ; \alpha^3=e \rangle$	Z_3	0	
2. aaa^{-1}	0	0	0	○
3. aaaa	$\langle \alpha ; \alpha^4=e \rangle$	Z_4	0	
4. $aaaa^{-1}$	$\langle \alpha ; \alpha^2=e \rangle$	Z_2	0	
5. $aaa^{-1}a^{-1}$	$\langle \alpha \rangle$	Z	Z	○
6. $aa^{-1}aa^{-1}$	0	0	Z	○
7. aaaaa	$\langle \alpha ; \alpha^5=e \rangle$	Z_5	0	
8. $aaaaa^{-1}$	$\langle \alpha ; \alpha^3=e \rangle$	Z_3	0	
9. $aaaa^{-1}a^{-1}$	0	0	0	○
10. $aaa^{-1}aa^{-1}$	0	0	0	○
11. aaabb	$\langle \alpha,\beta ; \alpha^3\beta^2=e \rangle$	Z	0	
12. $aaa^{-1}bb$	$\langle \alpha,\beta ; \alpha\beta^2=e \rangle$	Z	0	
13. $aabab^{-1}$	$\langle \alpha,\beta ; \alpha^2\beta\alpha\beta^{-1}=e \rangle$	$Z\oplus Z_3$	0	
14. $aaba^{-1}b^{-1}$	$\langle \alpha,\beta ; \alpha^2\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}=e \rangle$	Z	0	
15. $aa^{-1}bab$	$\langle \alpha,\beta ; \beta\alpha\beta^{-1}=e \rangle$	Z	0	○
16. aaaaaa	$\langle \alpha ; \alpha^6=e \rangle$	Z_6	0	
17. $aaaaaa^{-1}$	$\langle \alpha ; \alpha^4=e \rangle$	Z_4	0	
18. $aaaaa^{-1}a^{-1}$	$\langle \alpha ; \alpha^2=e \rangle$	Z_2	0	
19. $aaaa^{-1}aa^{-1}$	$\langle \alpha ; \alpha^2=e \rangle$	Z_2	0	
20. $aaa^{-1}aaa^{-1}$	$\langle \alpha ; \alpha^2=e \rangle$	Z_2	0	
21. $aaaa^{-1}a^{-1}a^{-1}$	$\langle \alpha \rangle$	Z	Z	○
22. $aaa^{-1}aa^{-1}a^{-1}$	$\langle \alpha \rangle$	Z	Z	○
23. $aa^{-1}aa^{-1}aa^{-1}$	0	0	Z	○
24. aaaabb	$\langle \alpha,\beta ; \alpha^4\beta^2=e \rangle$	$Z\oplus Z_2$	0	
25. $aaaa^{-1}bb$	$\langle \alpha,\beta ; \alpha^2\beta^2=e \rangle$	$Z\oplus Z_2$	0	
26. $aaa^{-1}a^{-1}bb$	$\langle \alpha,\beta ; \beta^2=e \rangle$	$Z\oplus Z_2$	0	

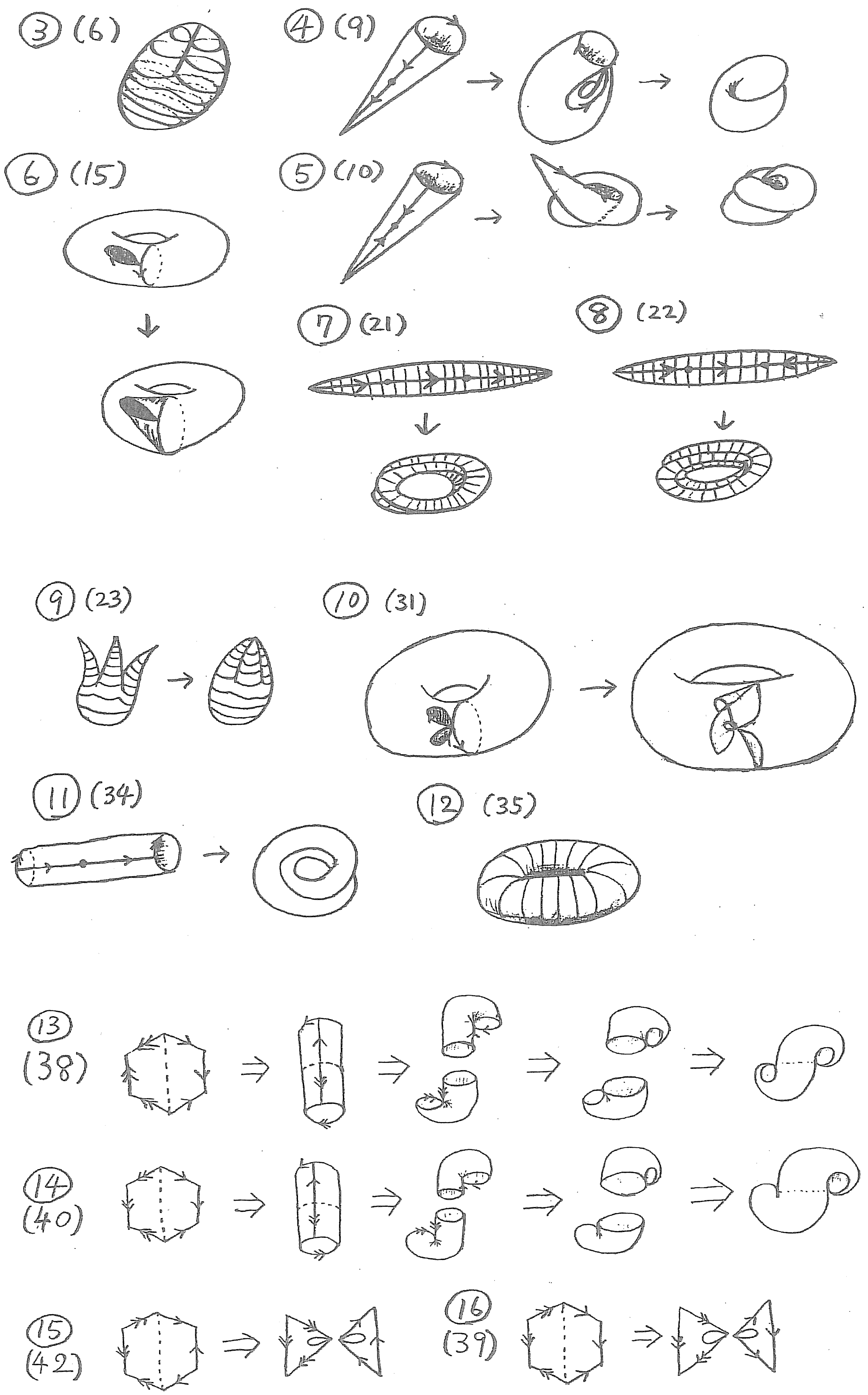
27. $aa^{-1}aa^{-1}bb$	$\langle \beta ; \beta^{2}=e \rangle$	Z_2	0	
28. $aaabab^{-1}$	$\langle \alpha, \beta ; \alpha^{3}\beta\alpha\beta^{-1}=e \rangle$	$Z \oplus Z_4$	0	
29. $aaaba^{-1}b^{-1}$	$\langle \alpha, \beta ; \alpha^{3}\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}=e \rangle$	$Z \oplus Z_2$	0	
30. $aaa^{-1}bab^{-1}$	$\langle \alpha, \beta ; \alpha\beta\alpha\beta^{-1}=e \rangle$	$Z \oplus Z_2$	0	
31. $aaa^{-1}ba^{-1}b^{-1}$	$\langle \alpha, \beta ; \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}=e \rangle$	Z^2	Z	○
32. $aabaab^{-1}$	$\langle \alpha, \beta ; \alpha^{2}\beta\alpha^{2}\beta^{-1}=e \rangle$	$Z \oplus Z_4$	0	
33. $aabaa^{-1}b^{-1}$	$\langle \alpha, \beta ; \alpha^{2}=e \rangle$	$Z \oplus Z_2$	0	
34. $aaba^{-1}a^{-1}b^{-1}$	$\langle \alpha, \beta ; \alpha^{2}\beta\alpha^{-2}\beta^{-1}=e \rangle$	Z^2	Z	○
35. $aa^{-1}baa^{-1}b^{-1}$	$\langle \beta \rangle$	Z	Z	○
36. $aaabbb$	$\langle \alpha, \beta ; \alpha^{3}\beta^{3}=e \rangle$	$Z \oplus Z_3$	0	
37. $aaa^{-1}bbb$	$\langle \alpha, \beta ; \alpha\beta^{3}=e \rangle$	Z	0	
38. $aaa^{-1}bbb^{-1}$.	$\langle \alpha, \beta ; \alpha\beta=e \rangle$	Z	0	○
39. $aaa^{-1}bb^{-1}b$	$\langle \alpha, \beta ; \alpha\beta=e \rangle$	Z	0	○
40. $aaa^{-1}bb^{-1}b$	$\langle \alpha, \beta ; \alpha\beta=e \rangle$	Z	0	○
41. $aa^{-1}abbb$	$\langle \alpha, \beta ; \alpha\beta^{3}=e \rangle$	Z	0	
42. $aa^{-1}abb^{-1}b$	0	0	0	○
43. $aababb$	$\langle \alpha, \beta ; \alpha^{2}\beta\alpha\beta^{2}=e \rangle$	$Z \oplus Z_3$	0	
44. $aaba^{-1}bb$	$\langle \alpha, \beta ; \alpha^{2}\beta\alpha^{-1}\beta^{2}=e \rangle$	Z	0	
45. $aa^{-1}babb$	$\langle \alpha, \beta ; \beta\alpha\beta^{2}=e \rangle$	Z	0	
46. $aa^{-1}ba^{-1}bb$	$\langle \alpha, \beta ; \beta\alpha\beta^{2}=e \rangle$	Z	0	
47. $aaba^{-1}b^{-1}b^{-1}$	$\langle \alpha, \beta ; \alpha^{2}\beta\alpha^{-1}\beta^{-2}=e \rangle$	Z	0	
48. $aa^{-1}bab^{-1}b^{-1}$	$\langle \alpha, \beta ; \beta\alpha\beta^{-2}=e \rangle$	Z	0	
49. $aa^{-1}ba^{-1}b^{-1}b^{-1}$	$\langle \alpha, \beta ; \beta\alpha\beta^{-2}=e \rangle$	Z	0	
50. $aa^{-1}babb^{-1}$	$\langle \alpha, \beta ; \beta\alpha=e \rangle$	Z	0	○
51. $aa^{-1}bab^{-1}b$	$\langle \alpha, \beta ; \beta\alpha=e \rangle$	Z	0	○
52. $ababa^{-1}b$	$\langle \alpha, \beta ; \alpha\beta\alpha\beta\alpha^{-1}\beta=e \rangle$	Z	0	
53. $ababa^{-1}b^{-1}$	$\langle \alpha, \beta ; \alpha\beta\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}=e \rangle$	Z	0	
54. $abab\ a^{-1}b^{-1}$	$\langle \alpha, \beta ; \alpha\beta\alpha\beta\ \alpha^{-1}\beta^{-1}=e \rangle$	Z	0	○

①(2)

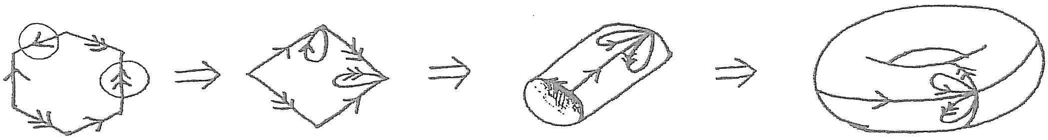


②(5)

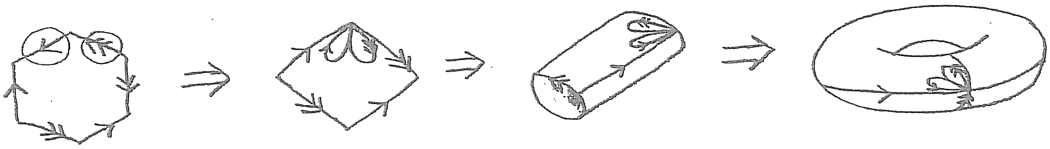



③ (6)
④ (9)
⑥ (15)
⑤ (10)
⑦ (21)
⑧ (22)
⑨ (23)
⑩ (31)
⑪ (34)
⑫ (35)
⑬ (38)
⑭ (40)
⑮ (42)
⑯ (39)

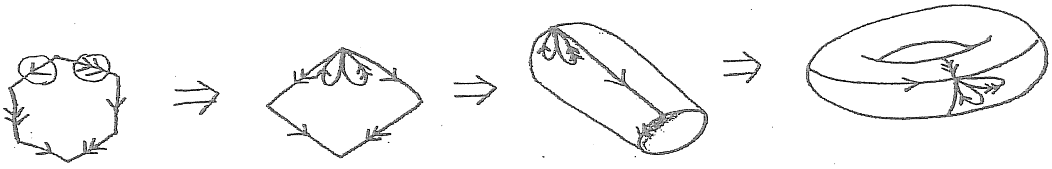
17
(50)



18
(51)



19
(54)



参考文献

[B] Berlekamp and Wolfe 「Mathematical Go」 A K Peters

[C] カールソン 「曲面、結び目、多様体のトポロジー」 培風館

[F] フランシス 「トポロジーの絵本」シュプリンガー東京

[Ha] Harlander, Jensen「On the homotopy type of CW-complexes with aspherical fundamental group」 Top. and its Appl. 153 15 3000-3006 (2006)

[H]Hog-AngeloniMetzler,Sieradski「Two-dimensional Homotopy and Combinatorial Group Theory」 London Mathematical Society No 197 Cambridge University Press (1993)

[I] 岩波数学入門辞典 岩波書店

[Ka] 川久保勝夫 「トポロジーの発想」講談社ブルーバックス

[Kj] 小島定吉 「多角形の現代幾何学」 牧野書店

[K] 小宮克弘 「位相幾何入門」 裳華房

[Ko] 小平邦彦 「幾何への誘い」岩波現代文庫

[M] 宮本智之 平成18年度高知大学教育学部修士論文「トポロジー (閉擬曲面の分類に向けて)」

[Mi] 三中信宏 「生物系統学」 東大出版会

[Ma] 松本幸夫 「トポロジー入門」岩波書店

[Mat] 松本幸夫 「多様体の基礎」東大出版会

[Mi] ミルナー 「微分位相幾何学」シュプリンガー東京

[N] 西田吾郎 「ホモトピー論」共立出版

[Na] 中村義作 「パズルでひらめく補助線の幾何学」講談社ブルーバックス

[Nak] 中村治 「囲碁の数学」高知大学教育学部アカデミックコアタイム2007 (No. 9)

[Ne] 根上生也 「トポロジカル宇宙」日本評論社

[No] 野口廣 「トポロジー 基礎と方法」ちくま学芸文庫

[O] 織田進 「文系脳を刺激する数理の世界の物語」エコノミスト社

[P] ポアンカレ 「トポロジー (位置解析)」 朝倉出版

[Se] 瀬山士郎 「トポロジー 柔らかい幾何学」 日本評論社

[Th] サーストン 「3次元幾何学とトポロジー」培風館

[T] 田村一郎 「トポロジー」岩波全書

The Classification of Closed Pseudo Surfaces of Polygons

Tomohisa INOUE, Tomoyuki MIYAMOTO, Toshihiro YAMAGUCHI

BULLETIN OF THE
FACULTY OF EDUCATION, KOCHI UNIVERSITY No.68 2008
KOCHI, JAPAN