論　文

多角形の閉擬曲面へのグラフの埋め込み

The Embeddings of Graphs into the Pseudo Surfaces of Polygons

後藤　真孝（高知大学教育学部）
寒葉　友樹（高知大学教育学部）
小野　起奈（高知大学教育学部）
山口　俊博（高知大学教育学部）

Masataka GOTO, Yuuki KANBA, Yukina ONO, Toshihiro YAMAGUCHI

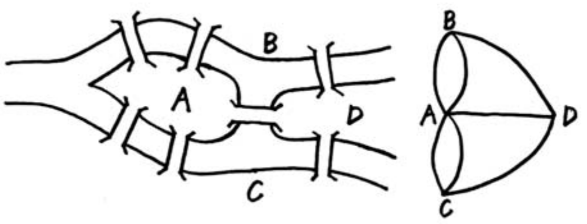
Faculty of Education, Kochi University, Kochi, Japan (tyamag@kochi-u.ac.jp)

ABSTRACT

We will give some examples of the embeddings of complete graphs into closed pseudo surfaces of polygon, which is made by glueing the edges of the polygon to other edges [IMY].

はじめに

グラフとは、いくつかの点と、その何組みかを線で結んで得られる図形のことで、その点を「頂点」、線を「辺」と言う。グラフが登場したのは、１７３６年、オイラーによって、ケーニヒスベルグの（橋を一回のみ渡る）問題を次のようにグラフに置き換えて考えたのが最初だと言われている。

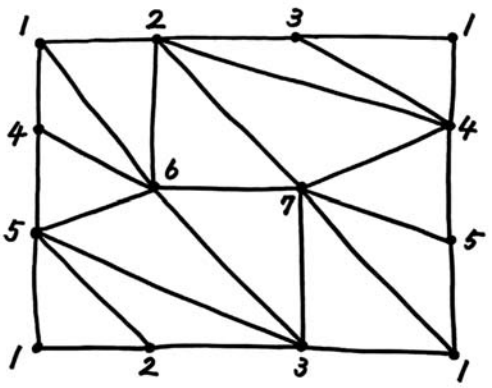


これは頂点がA、B，C，Dの４個で辺が７本のグラフである。彼は、このグラフが一筆書きできないことを証明し、ケーニヒスベルクの問題を否定的に解決した[Se]。以来、グラフの日常生活を含む諸分野への影響は多大なものがある（たとえば[MN]）。また、グラフは小中学校での教材としても格好のものになることが期待されている。例えば、子供達も容易に興味をもつことのできる問題として、四色問題「任意の平面地図は高々４色で色分けできるか？」がある[Ro]。５色で色分けできることはヒーウッドによって１００年以上も前から知られていたが，四色問題が肯定的に解決されたのは１９７０年代後半のことで，アペルとハーケンはコンピュータを使ってこの証明を成し遂げた。５次の完全グラフＫ５（５個の全ての２頂点どうしが辺で結ばれているグラフ）を平面上へ描く（埋め込む）ことができるならば、その頂点を国とし辺を国境とする、色分けに５色必要な地図が存在するが、それは不可能である。2008年７月に大学院教育学研究科２年の増岡資介君は、実践研究IIにおいて、附属中学校の２年生のあるクラスを対象に、その視点から四色問題を扱い、生徒からおおむね好評だったようだ。一般に、Ｘを平面とは限らない曲面としたときも、ｎ次完全グラフＫｎ（ｎ個の全ての２頂点どうしが辺で結ばれているグラフ）がＸに埋め込めるなら、Ｘ上に描かれた地図を色分けるには少なくともｎ色必要である。次のことはよく知られている。（１）全てのグラフは３次元空間に埋め込める。（２）平面上の地図色分け（グラフの埋め込み）は、球面上のそれと同じ。（３）閉曲面、例えば種数ｇのトーラス（ｇ人乗り浮き輪）では、ｍをn次完全グラフＫｎが埋め込める上限としたとき（ｇ,ｍ）と書くとすると、(1,7)（2,8)（3,9)（4,10)（5,11)（6,12)（7,12）… となっている[R]（[N],[N2]）。 本稿では、い

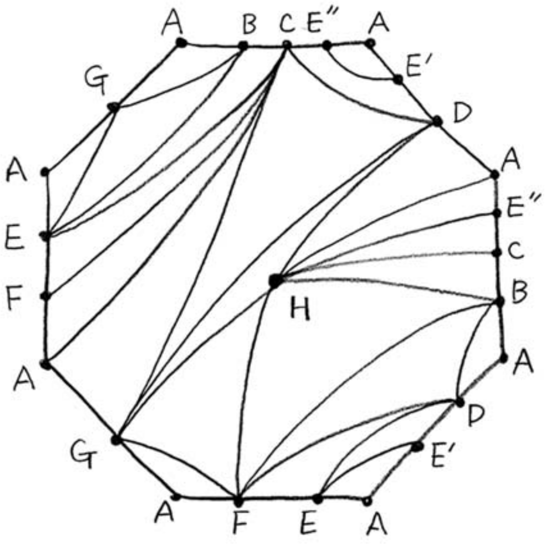
くつかの多角形の閉擬曲面（多角形の辺をくっつけてできる曲面もどきのことで、いわゆる閉曲面とは異なるもの[IMY]）への完全グラフＫｎと完全２部グラフＫm.n（頂点集合をm個とn個のクラスに分割してどの辺の頂点も異なるクラスに属し、異なるクラスに属する全ての頂点の組が辺で結ばれているもの）の埋め込み例を与える。このnと（m,n）の上限についてはまだよくわかっていないようである。　その前に閉曲面（トーラス）の場合の埋め込み例を少し描いておこう。

閉曲面の場合

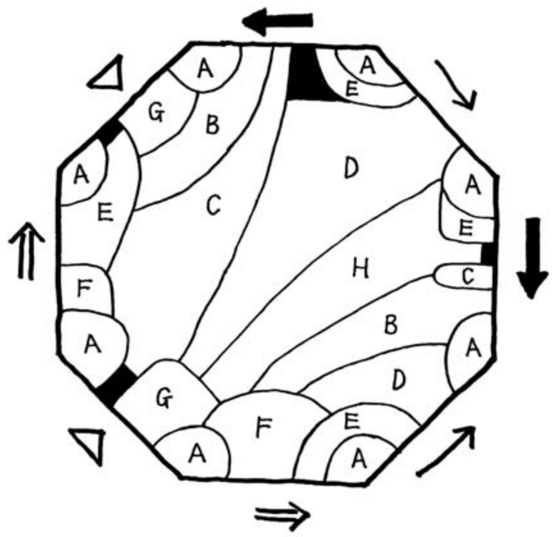
種数１のトーラス（浮き輪）へのK7の埋め込み例として、



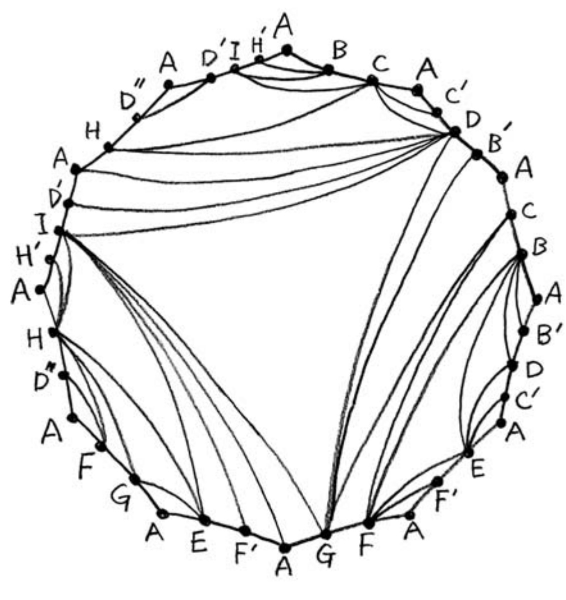
がある。これは展開図であり、長方形の向いあう辺どうしはくっつく。実際の曲面上のグラフは非常に見にくい（し、描きずらい）ので、以下、図はこのような展開図とする。種数２のトーラス（２人乗り浮き輪）にはK8が埋め込み可能で、例えば



がある。これの（頂点Ａ～Ｈを国とし、辺を国境とする）地図を描くと次のようになる（黒いところは湖）。確かにこの地図は８色必要である。



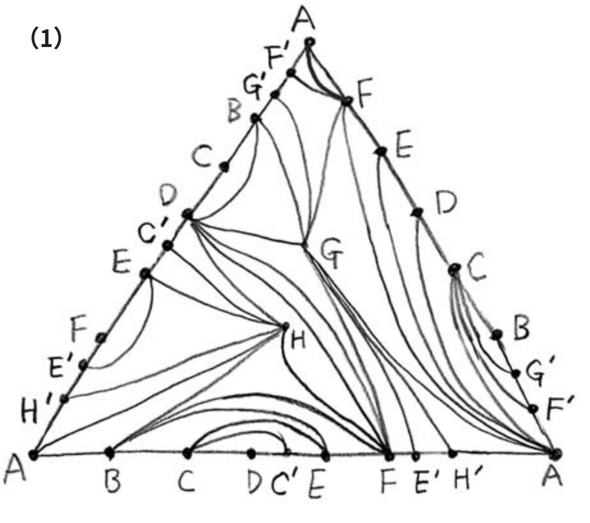
種数3のトーラス（3人乗り浮き輪）にはK9が埋め込み可能で、例えば次のようになる。



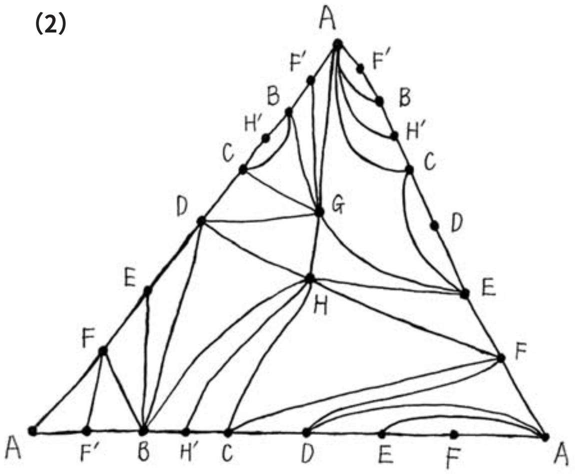
閉擬曲面の場合

まず、完全グラフの埋め込みを考える。次の図で見るように、三角形の擬曲面（１）aaaと（２）aaa^{-1}にはK8が埋め込み可能であり、四角形の擬曲面（３）aaaaにはK10が埋め込み可能である。ここで例えばaaaという記号は３辺を同じ向きにくっつけてできる（ニセの）曲面[IMY]。

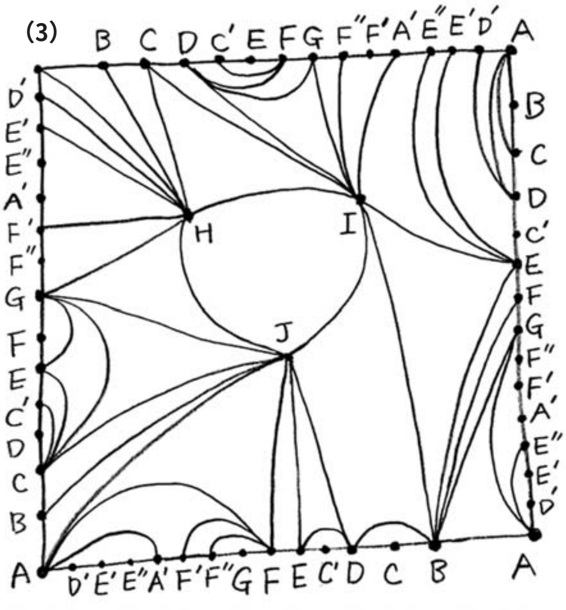
(1)



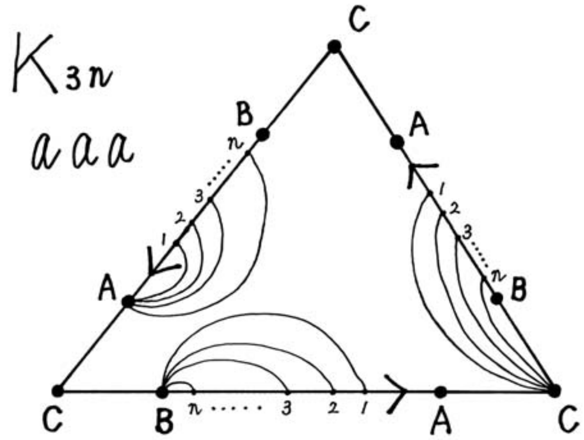
(2)

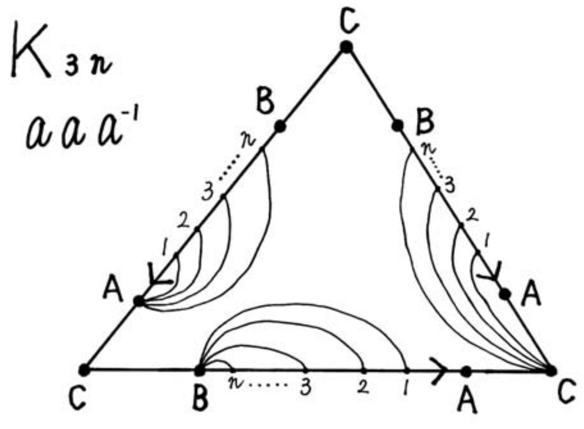


(3)



次に完全２部グラフKm.nの三角形の２つの擬曲面への埋め込みを考える。K3.nだと、次の図からわかるように、nはいくらでも大きくとれる。が、K4.nだとそうはいかない。次ページにある図はK4.8の埋め込み例。そして最後にまるで壊れかけの蜘蛛の巣にも見える（？）K5.7の埋め込み例を描く。

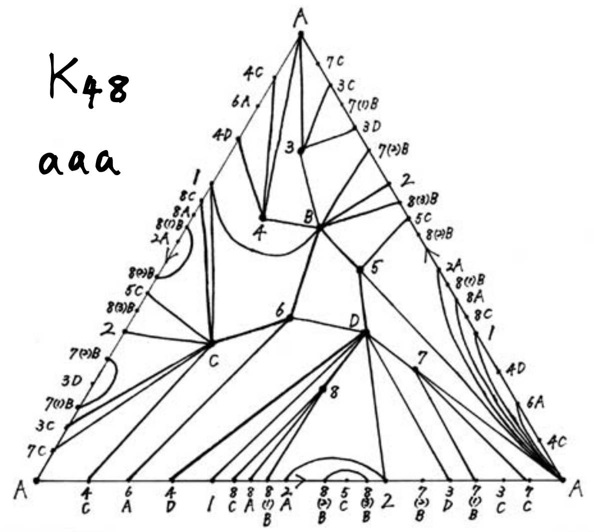




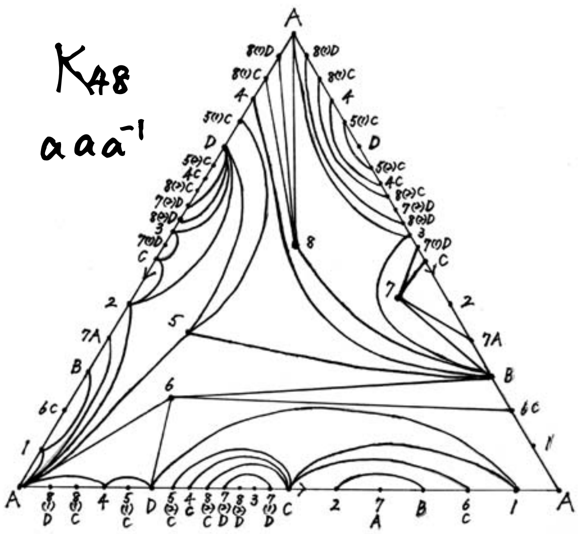
（註）トーラス、(1)（2)（3）は後藤。K4,8は小野。K3,nとK5,7は寒葉。それらのチェックを山口。と分担した。

参考文献

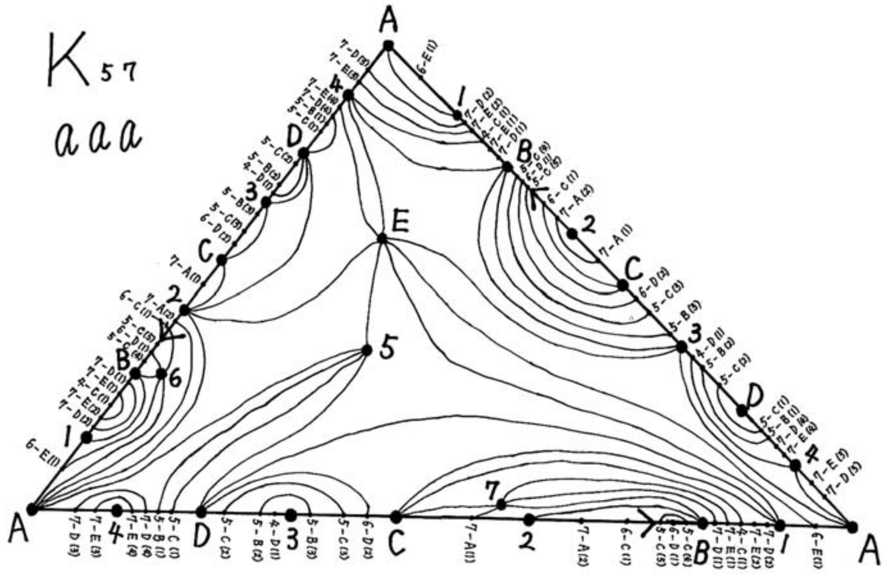
[IMY]井上朋久、宮本智之、山口俊博　「多角形の擬曲面の分類」高知大学教育学部研究報告　第６８号159-164（2008）　[N] 根上生也「グラフ理論３段階」遊星社　[N2] 根上生也　「位相幾何学的グラフ理論入門」横浜図書　[R]G.Ringel　「Map Color Theorem」 Springer　209　[Ro]ロビンウィルソン　「四色問題」新潮社　[Se]瀬山士郎　「点と線のひみつ」さえら書房　[MN] 松田裕之、難波利幸　「生物の群集構造とグラフ理論」生物科学　42（3）(1990)



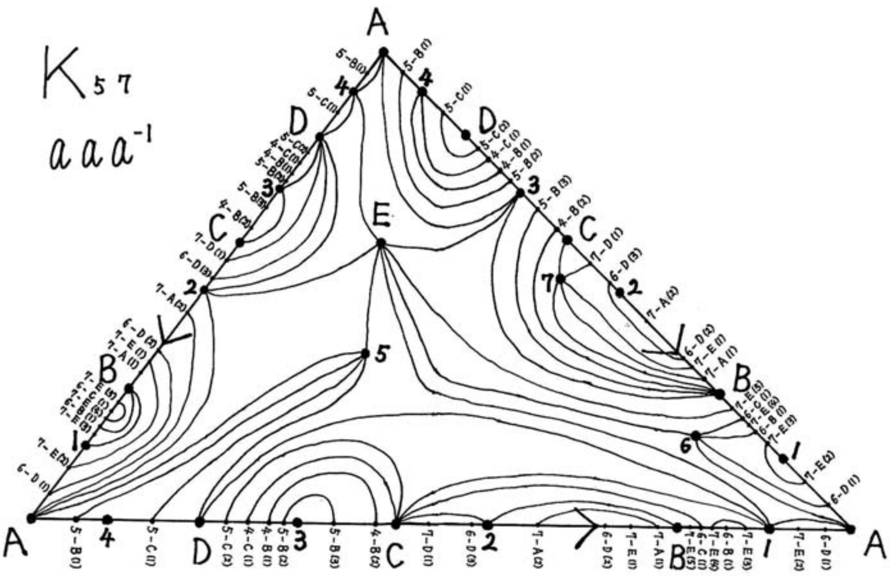
K48
aaa



K48
aaa-1



K57
aaa



K57
aaa-1