

# 20次元以下のホモトピー階数型とコホモロジーシンプレクティック構造

中村 治・山口 俊博

論文

## 20次元以下のホモトピー階数型とコホモロジーシンプレクティック構造

Homotopy rank types with dimensions less than or equal to 20  
and their cohomologically symplectic structures

中村 治 (高知大学教育学部)

山口 俊博 (高知大学教育学部)

Osamu NAKAMURA and Toshihiro YAMAGUCHI

Kochi University (tyamag@kochi-u.ac.jp)

Abstract

We give the table of homotopy rank types (h.r.t) of simply connected elliptic spaces. with dimensions less than or equal to 20 Also we consider the rational c-symplectic structures in them.

単連結楕円空間 (elliptic space)  $X$  のホモトピー階数型 (以後、h.r.t と略す。例えば、 $S^2$  の h.r.t は (2:3)、 $S^3$  の h.r.t は (:3) である。) は、形式的次元を決めさえすれば、Friedlander-Halperin の定理からコンピューターによる計算で全て記述できる [NY]。それをもとに、20次元以下のコホモロジー-シンプレクティック [FOT] (c-symplectic: 形式的次元が  $2n$  の有理コホモロジー代数が  $\deg(t)=2$ ,  $t^n \neq 0$  なる元  $t$  を持つとき) なものは、 $F_0$ -空間 (オイラー数が正の空間  $\Rightarrow p=0$ ) 以外にどんな h.r.t があるか、空間  $X$  の Sullivan の極小モデル  $M(X) = (\Lambda(t, V), d)$ ,  $\dim V < \infty$  [M] で調べた。その結果、以下の①~⑥のパターンがあった。20次元で、やっと formal (コホモロジーからモデルがわかる) [FOT] でない空間が登場する (⑥のモデルのみ)。

- ①  $M(X) = \Lambda(t, x, y, z)$ ,  $d(z) = xyt^m + t^n$  の形の h.r.t は、(2:3,3,5), (2:3,3,7), (2:3,3,9), (2:3,3,11), (2:3,3,13), (2:3,3,15), (2:3,5,7), (2:3,5,9), (2:3,5,11), (2:3,5,13)。  
 ②  $M(X) = \Lambda(t, u, x, y, z, v)$ ,  $d(z) = xyf(t, u) + t^n$ ,  $d(v) = g(t, u)$  の形の h.r.t は、(2,2:3,3,3,5), (2,2:3,3,5,5), (2,2:3,3,5,7), (2,2:3,3,5,5), (2,2:3,3,5,7), (2,2:3,3,5,9), (2,2:3,3,5,11), (2,4:3,3,7,9), (2,4:3,3,7,11)。  
 ③  $M(X) = \Lambda(t, u, u', x, y, z, v, v')$ ,  $d(z) = xyf(t, u, u') + t^n$ ,  $d(v) = g(t, u, u')$ ,  $d(v') = h(t, u, u')$  の形の h.r.t は、(2,2:3,3,3,3,9), (2,2:3,3,3,3,11)。  
 ④  $M(X) = \Lambda(t, u, x, y, v, w, z)$ ,  $d(z) = xyt^l + vwt^m + t^n$ ,  $d(v) = d(w) = 0$  の形の h.r.t は、(2:3,3,3,3,5), (2:3,3,3,3,7),

(2:3,3,3,3,9), (2:3,3,3,5,7)。

- ⑤  $M(X) = \Lambda(t, u, x, y, v, w, z, v')$ ,  $d(z) = xyf(t, u) + vwg(t, u) + t^n$ ,  $d(v) = d(w) = 0$ ,  $d(v') = g(t, u)$  の形の h.r.t は、(2,2:3,3,3,3,3,7)。

- ⑥  $M(X) = \Lambda(t, x, y, v, w, z)$ ,  $d(z) = xyt + vw + t^l$ ,  $d(v) = 0$ ,  $d(w) = xv$ ,  $\deg(w) = 5$  の h.r.t は、(2:3,3,3,5,7)。

ここで  $\deg(t) = 2$ ,  $\deg(x)$ ,  $\deg(y)$ ,  $\deg(z)$ ,  $\deg(v)$ ,  $\deg(v')$ ,  $\deg(w)$  は奇数,  $\deg(u)$ ,  $\deg(u')$  は偶数,  $d(x) = d(y) = d(u) = d(u') = 0$ , そして  $f, g, h$  はカッコ内の文字を変数とする有理係数多項式。

参考文献: [FOT] Y. Felix, J. Oprea and D. Tanre, Algebraic models in geometry, Oxford G.T.M. 17 [2008]

[NY] O. Nakamura and T. Yamaguchi, Lower bounds of Betti numbers of elliptic spaces with certain formal dimensions, Kochi Journal of Math. (2011) 9-28

[SY] J. Sato and T. Yamaguchi, Pre-c-symplectic condition for the product of odd-spheres, preprint

[F] 深谷賢治「シンプレクティック幾何学」岩波書店

[M] 森田茂之「特性類と幾何学」岩波書店

h.r.t の表: [NY] で 16 次元までの単連結楕円空間の h.r.t があるので、残りの 17~20 次元を以下に掲載する。p は奇数次の元の個数から偶数次の元の個数を引いた数。

17次元 103個

p=1 : ( : 17), (2 : 3,15), (2 : 5,13), (2 : 7,11), (2 : 9,9), (4 : 5,15), (4 : 7,13), (4 : 9,11), (6 : 5,17), (6 : 11,11), (8 : 9,15), (10 : 7,19), (12 : 5,23), (14 : 3,27), (2,2 : 3,3,13), (2,2 : 3,5,11), (2,2 : 3,7,9), (2,2 : 5,5,9), (2,2 : 5,7,7), (2,4 : 3,3,15), (2,4 : 3,7,11), (2,4 : 5,5,11), (2,4 : 5,7,9), (2,4 : 7,7,7), (2,6 : 3,3,17), (2,6 : 3,9,11), (2,6 : 5,7,11), (2,8 : 3,7,15), (2,8 : 5,5,15), (2,10 : 3,5,19), (2,12 : 3,3,23), (4,4 : 5,7,11), (4,4 : 7,7,9), (4,6 : 3,11,11), (4,6 : 5,9,11), (4,6 : 7,7,11), (4,8 : 5,7,15), (4,10 : 3,7,19), (6,6 : 5,11,11), (6,8 : 3,11,15), (2,2,2 : 3,3,3,11), (2,2,2 : 3,3,5,9), (2,2,2 : 3,3,7,7), (2,2,2 : 3,5,5,7), (2,2,2 : 5,5,5,5), (2,2,4 : 3,3,5,11), (2,2,4 : 3,3,7,9), (2,2,4 : 3,5,7,7), (2,2,4 : 5,5,5,7), (2,2,6 : 3,3,7,11), (2,2,6 : 3,5,5,11), (2,2,8 : 3,3,5,15), (2,2,10 : 3,3,3,19), (2,4,4 : 3,3,7,11), (2,4,4 : 3,7,7,7), (2,4,4 : 5,5,7,7), (2,4,6 : 3,3,9,11), (2,4,6 : 3,5,7,11), (2,4,8 : 3,3,7,15), (2,6,6 : 3,3,11,11), (4,4,4 : 5,7,7,7), (4,4,6 : 3,7,7,11), (2,2,2,2 : 3,3,3,3,9), (2,2,2,2 : 3,3,3,5,7), (2,2,2,2 : 3,3,5,5,5), (2,2,2,4 : 3,3,3,3,11), (2,2,2,4 : 3,3,3,7,7), (2,2,2,4 : 3,3,5,5,7), (2,2,2,6 : 3,3,3,5,11), (2,2,2,8 : 3,3,3,3,15), (2,2,4,4 : 3,3,5,7,7), (2,2,4,6 : 3,3,3,7,11), (2,4,4,4 : 3,3,7,7,7), (2,2,2,2,2 : 3,3,3,3,3,7), (2,2,2,2,2 : 3,3,3,3,5,5), (2,2,2,2,4 : 3,3,3,3,5,7), (2,2,2,2,6 : 3,3,3,3,3,11), (2,2,2,4,4 : 3,3,3,3,7,7), (2,2,2,2,2,2 : 3,3,3,3,3,3,5), (2,2,2,2,2,4 : 3,3,3,3,3,3,7), (2,2,2,2,2,2,2 : 3,3,3,3,3,3,3,3), (2,2,4 : 3,9,11), (2,2,4 : 5,7,11), (2,2,4 : 7,7,9), (2,2,6 : 3,5,17), (2,2,6 : 3,11,11), (2,2,6 : 5,9,11), (2,2,6 : 7,7,11), (2,2,8 : 3,9,15), (2,2,8 : 5,7,15), (2,2,10 : 3,7,19), (2,2,10 : 5,5,19), (2,2,12 : 3,5,23), (2,2,14 : 3,3,27), (2,4,4 : 3,7,15), (2,4,4 : 3,11,11), (2,4,4 : 7,7,11), (2,4,6 : 3,7,17), (2,4,6 : 3,11,13), (2,4,6 : 5,11,11), (2,4,6 : 7,9,11), (2,4,8 : 3,11,15), (2,4,8 : 7,7,15), (2,4,10 : 5,7,19), (2,4,12 : 3,7,23), (2,6,6 : 7,11,11), (2,6,8 : 5,11,15), (2,6,10 : 3,11,19), (2,8,8 : 3,15,15), (4,4,6 : 7,11,11), (4,4,10 : 7,7,19), (4,6,6 : 9,11,11), (4,6,8 : 7,11,15), (6,6,6 : 11,11,11), (2,2,2,2 : 3,3,3,13), (2,2,2,2 : 3,3,5,11), (2,2,2,2 : 3,3,7,9), (2,2,2,2 : 3,5,5,9), (2,2,2,2 : 3,5,7,7), (2,2,2,2 : 5,5,5,7), (2,2,2,4 : 3,3,3,15), (2,2,2,4 : 3,3,7,11), (2,2,2,4 : 3,5,5,11), (2,2,2,4 : 3,5,7,9), (2,2,2,4 : 3,7,7,7), (2,2,2,4 : 5,5,7,7), (2,2,2,6 : 3,3,3,17), (2,2,2,6 : 3,3,9,11), (2,2,2,6 : 3,5,7,11), (2,2,2,6 : 5,5,5,11), (2,2,2,8 : 3,3,7,15), (2,2,2,8 : 3,5,5,15), (2,2,2,10 : 3,3,5,19), (2,2,2,12 : 3,3,3,23), (2,2,4,4 : 3,5,7,11), (2,2,4,4 : 3,7,7,9), (2,2,4,4 : 5,7,7,7), (2,2,4,6 : 3,3,11,11), (2,2,4,6 : 3,5,9,11), (2,2,4,6 : 3,7,7,11), (2,2,4,6 : 5,5,7,11), (2,2,4,8 : 3,5,7,15), (2,2,4,10 : 3,3,7,19), (2,2,6,6 : 3,5,11,11), (2,2,6,8 : 3,3,11,15), (2,4,4,4 : 3,7,7,11), (2,4,4,4 : 7,7,7,7), (2,4,4,6 : 3,7,9,11), (2,4,4,6 : 5,7,7,11), (2,4,4,8 : 3,7,7,15), (2,4,6,6 : 3,7,11,11), (4,4,4,6 : 7,7,7,11), (2,2,2,2,2 : 3,3,3,3,11), (2,2,2,2,2 : 3,3,3,5,9), (2,2,2,2,2 : 3,3,3,7,7), (2,2,2,2,2 : 3,3,5,5,7), (2,2,2,2,2 : 3,5,5,5,5), (2,2,2,2,4 : 3,3,3,5,11), (2,2,2,2,4 : 3,3,3,7,9), (2,2,2,2,4 : 3,3,5,7,7), (2,2,2,2,4 : 3,5,5,5,7), (2,2,2,2,6 : 3,3,3,7,11), (2,2,2,2,6 : 3,3,5,5,11), (2,2,2,2,8 : 3,3,3,5,15), (2,2,2,2,10 : 3,3,3,3,19), (2,2,2,4,4 : 3,3,3,7,11), (2,2,2,4,4 : 3,3,3,5,7,7), (2,2,2,4,4 : 3,5,5,7,7), (2,2,2,4,6 : 3,3,3,9,11), (2,2,2,4,6 : 3,3,5,7,11), (2,2,2,4,8 : 3,3,3,7,15), (2,2,2,6,6 : 3,3,3,11,11), (2,2,4,4,4 : 3,5,7,7,7), (2,2,4,4,6 : 3,3,7,7,11), (2,4,4,4,4 : 3,7,7,7,7), (2,2,2,2,2 : 3,3,3,3,3,9), (2,2,2,2,2,2 : 3,3,3,3,5,7), (2,2,2,2,2,2 : 3,3,3,5,5,5), (2,2,2,2,2,4 : 3,3,3,3,3,11), (2,2,2,2,2,4 : 3,3,3,3,7,7), (2,2,2,2,2,4 : 3,3,3,5,5,7), (2,2,2,2,2,6 : 3,3,3,3,3,11), (2,2,2,2,2,4,4 : 3,3,3,3,3,7,7), (2,2,2,2,2,2,2,2 : 3,3,3,3,3,3,3,5), (2,2,2,2,2,2,2,4 : 3,3,3,3,3,3,5,7), (2,2,2,2,2,2,6 : 3,3,3,3,3,3,11), (2,2,2,2,2,4,4 : 3,3,3,3,3,7,7), (2,2,2,2,2,2,2,2 : 3,3,3,3,3,3,3,5), (2,2,2,2,2,2,2,4 : 3,3,3,3,3,3,3,7), (2,2,2,2,2,2,2,2,2 : 3,3,3,3,3,3,3,3,3),

18次元 217個

p=0 : (2 : 19), (6 : 23), (18 : 35), (2,2 : 3,17), (2,2 : 5,15), (2,2 : 7,13), (2,2 : 9,11), (2,4 : 3,19), (2,4 : 7,15), (2,4 : 11,11), (2,6 : 7,17), (2,6 : 11,13), (2,8 : 3,23), (2,8 : 11,15), (2,10 : 9,19), (2,12 : 7,23), (2,14 : 5,27), (2,16 : 3,31), (4,6 : 11,15), (4,10 : 11,19), (4,14 : 7,27), (6,6 : 11,17), (6,12 : 11,23), (8,10 : 15,19), (2,2,2 : 3,3,15), (2,2,2 : 3,5,13), (2,2,2 : 3,7,11), (2,2,2 : 3,9,9), (2,2,2 : 5,5,11), (2,2,2 : 5,7,9), (2,2,2 : 7,7,7), (2,2,4 : 3,5,15), (2,2,4 : 3,7,13),

(2,2,4 : 3,9,11), (2,2,4 : 5,7,11), (2,2,4 : 7,7,9), (2,2,6 : 3,5,17), (2,2,6 : 3,11,11), (2,2,6 : 5,9,11), (2,2,6 : 7,7,11), (2,2,8 : 3,9,15), (2,2,8 : 5,7,15), (2,2,10 : 3,7,19), (2,2,10 : 5,5,19), (2,2,12 : 3,5,23), (2,2,14 : 3,3,27), (2,4,4 : 3,7,15), (2,4,4 : 3,11,11), (2,4,4 : 7,7,11), (2,4,6 : 3,7,17), (2,4,6 : 3,11,13), (2,4,6 : 5,11,11), (2,4,6 : 7,9,11), (2,4,8 : 3,11,15), (2,4,8 : 7,7,15), (2,4,10 : 5,7,19), (2,4,12 : 3,7,23), (2,6,6 : 7,11,11), (2,6,8 : 5,11,15), (2,6,10 : 3,11,19), (2,8,8 : 3,15,15), (4,4,6 : 7,11,11), (4,4,10 : 7,7,19), (4,6,6 : 9,11,11), (4,6,8 : 7,11,15), (6,6,6 : 11,11,11), (2,2,2,2 : 3,3,3,13), (2,2,2,2 : 3,3,5,11), (2,2,2,2 : 3,3,7,9), (2,2,2,2 : 3,5,5,9), (2,2,2,2 : 3,5,7,7), (2,2,2,2 : 5,5,5,7), (2,2,2,4 : 3,3,3,15), (2,2,2,4 : 3,3,7,11), (2,2,2,4 : 3,5,5,11), (2,2,2,4 : 3,5,7,9), (2,2,2,4 : 3,7,7,7), (2,2,2,4 : 5,5,7,7), (2,2,2,6 : 3,3,3,17), (2,2,2,6 : 3,3,9,11), (2,2,2,6 : 3,5,7,11), (2,2,2,6 : 5,5,5,11), (2,2,2,8 : 3,3,7,15), (2,2,2,8 : 3,5,5,15), (2,2,2,10 : 3,3,5,19), (2,2,2,12 : 3,3,3,23), (2,2,4,4 : 3,5,7,11), (2,2,4,4 : 3,7,7,9), (2,2,4,4 : 5,7,7,7), (2,2,4,6 : 3,3,11,11), (2,2,4,6 : 3,5,9,11), (2,2,4,6 : 3,7,7,11), (2,2,4,6 : 5,5,7,11), (2,2,4,8 : 3,5,7,15), (2,2,4,10 : 3,3,7,19), (2,2,6,6 : 3,5,11,11), (2,2,6,8 : 3,3,11,15), (2,4,4,4 : 3,7,7,11), (2,4,4,4 : 7,7,7,7), (2,4,4,6 : 3,7,9,11), (2,4,4,6 : 5,7,7,11), (2,4,4,8 : 3,7,7,15), (2,4,6,6 : 3,7,11,11), (4,4,4,6 : 7,7,7,11), (2,2,2,2,2 : 3,3,3,3,11), (2,2,2,2,2 : 3,3,3,5,9), (2,2,2,2,2 : 3,3,3,7,7), (2,2,2,2,2 : 3,3,5,5,7), (2,2,2,2,2 : 3,5,5,5,5), (2,2,2,2,4 : 3,3,3,5,11), (2,2,2,2,4 : 3,3,3,7,9), (2,2,2,2,4 : 3,3,5,7,7), (2,2,2,2,4 : 3,5,5,5,7), (2,2,2,2,6 : 3,3,3,7,11), (2,2,2,2,6 : 3,3,5,5,11), (2,2,2,2,8 : 3,3,3,5,15), (2,2,2,2,10 : 3,3,3,3,19), (2,2,2,4,4 : 3,3,3,7,11), (2,2,2,4,4 : 3,3,3,5,7,7), (2,2,2,4,4 : 3,5,5,7,7), (2,2,2,4,6 : 3,3,3,9,11), (2,2,2,4,6 : 3,3,5,7,11), (2,2,2,4,8 : 3,3,3,7,15), (2,2,2,6,6 : 3,3,3,11,11), (2,2,4,4,4 : 3,5,7,7,7), (2,2,4,4,6 : 3,3,7,7,11), (2,4,4,4,4 : 3,7,7,7,7), (2,2,2,2,2 : 3,3,3,3,3,9), (2,2,2,2,2,2 : 3,3,3,3,5,7), (2,2,2,2,2,2 : 3,3,3,5,5,5), (2,2,2,2,2,4 : 3,3,3,3,3,11), (2,2,2,2,2,4 : 3,3,3,3,7,7), (2,2,2,2,2,4 : 3,3,3,5,5,7), (2,2,2,2,2,6 : 3,3,3,3,3,11), (2,2,2,2,2,4,4 : 3,3,3,3,3,7,7), (2,2,2,2,2,2,2,2 : 3,3,3,3,3,3,3,5), (2,2,2,2,2,2,2,4 : 3,3,3,3,3,3,5,7), (2,2,2,2,2,2,6 : 3,3,3,3,3,3,11), (2,2,2,2,2,4,4 : 3,3,3,3,3,7,7), (2,2,2,2,2,2,2,2 : 3,3,3,3,3,3,3,5), (2,2,2,2,2,2,2,4 : 3,3,3,3,3,3,3,7), (2,2,2,2,2,2,2,2,2 : 3,3,3,3,3,3,3,3,3),

p=2 : ( : 3,15), ( : 5,13), ( : 7,11), ( : 9,9), (2 : 3,13), (2 : 3,5,11), (2 : 3,7,9), (2 : 5,5,9), (2 : 5,7,

7), (4 : 3,3,15), (4 : 3,7,11), (4 : 5,5,11), (4 : 5,7,9),  
 (4 : 7,7,7), (6 : 3,3,17), (6 : 3,9,11), (6 : 5,7,11),  
 (8 : 3,7,15), (8 : 5,5,15), (10 : 3,5,19), (12 : 3,3,23),  
 (2,2 : 3,3,3,11), (2,2 : 3,3,5,9), (2,2 : 3,3,7,7), (2,2 :  
 3,5,5,7), (2,2 : 5,5,5,5), (2,4 : 3,3,5,11), (2,4 : 3,3,7,  
 9), (2,4 : 3,5,7,7), (2,4 : 5,5,5,7), (2,6 : 3,3,7,11),  
 (2,6 : 3,5,5,11), (2,8 : 3,3,5,15), (2,10 : 3,3,3,19), (4,  
 4 : 3,3,7,11), (4,4 : 3,7,7,7), (4,4 : 5,5,7,7), (4,6 : 3,  
 3,9,11), (4,6 : 3,5,7,11), (4,8 : 3,3,7,15), (6,6 : 3,3,  
 11,11), (2,2,2 : 3,3,3,3,9), (2,2,2 : 3,3,3,5,7), (2,2,2 :  
 3,3,5,5,5), (2,2,4 : 3,3,3,3,11), (2,2,4 : 3,3,3,7,7), (2,  
 2,4 : 3,3,5,5,7), (2,2,6 : 3,3,3,5,11), (2,2,8 : 3,3,3,3,  
 15), (2,4,4 : 3,3,5,7,7), (2,4,6 : 3,3,3,7,11), (4,4,4 : 3,  
 3,7,7,7), (2,2,2,2 : 3,3,3,3,3,7), (2,2,2,2 : 3,3,3,3,5,5),  
 (2,2,2,4 : 3,3,3,3,5,7), (2,2,2,6 : 3,3,3,3,3,11), (2,2,4,4  
 : 3,3,3,3,7,7), (2,2,2,2,2 : 3,3,3,3,3,3,5), (2,2,2,2,4 :  
 3,3,3,3,3,3,7), (2,2,2,2,2,2 : 3,3,3,3,3,3,3,3),  
 $p=4 : ( : 3,3,3,9), ( : 3,3,5,7), ( : 3,5,5,5), (2 : 3,3,$   
 $3,3,7), (2 : 3,3,3,5,5), (4 : 3,3,3,5,7), (6 : 3,3,3,3,11),$   
 $(2,2 : 3,3,3,3,3,5), (2,4 : 3,3,3,3,3,7), (2,2,2 : 3,3,3,3,$   
 $3,3,3),$   
 $p=6 : ( : 3,3,3,3,3,3),$

19次元 173個

$p=1 : ( : 19), (2 : 3,17), (2 : 5,15), (2 : 7,13), (2 : 9,$   
 $11), (4 : 3,19), (4 : 7,15), (4 : 11,11), (6 : 7,17),$   
 $(6 : 11,13), (8 : 3,23), (8 : 11,15), (10 : 9,19), (12$   
 $: 7,23), (14 : 5,27), (16 : 3,31), (2,2 : 3,3,15), (2,2$   
 $: 3,5,13), (2,2 : 3,7,11), (2,2 : 3,9,9), (2,2 : 5,5,11),$   
 $(2,2 : 5,7,9), (2,2 : 7,7,7), (2,4 : 3,5,15), (2,4 : 3,7,$   
 $13), (2,4 : 3,9,11), (2,4 : 5,7,11), (2,4 : 7,7,9), (2,6$   
 $: 3,5,17), (2,6 : 3,11,11), (2,6 : 5,9,11), (2,6 : 7,7,$   
 $11), (2,8 : 3,9,15), (2,8 : 5,7,15), (2,10 : 3,7,19), (2,$   
 $10 : 5,5,19), (2,12 : 3,5,23), (2,14 : 3,3,27), (4,4 : 3,$   
 $7,15), (4,4 : 3,11,11), (4,4 : 7,7,11), (4,6 : 3,7,17),$   
 $(4,6 : 3,11,13), (4,6 : 5,11,11), (4,6 : 7,9,11), (4,8 : 3,$   
 $11,15), (4,8 : 7,7,15), (4,10 : 5,7,19), (4,12 : 3,7,$   
 $23), (6,6 : 7,11,11), (6,8 : 5,11,15), (6,10 : 3,11,19),$   
 $(8,8 : 3,15,15), (2,2,2 : 3,3,3,13), (2,2,2 : 3,3,5,11),$   
 $(2,2,2 : 3,3,7,9), (2,2,2 : 3,5,5,9), (2,2,2 : 3,5,7,7),$   
 $(2,2,2 : 5,5,5,7), (2,2,4 : 3,3,3,15), (2,2,4 : 3,3,7,11),$   
 $(2,2,4 : 3,5,5,11), (2,2,4 : 3,5,7,9), (2,2,4 : 3,7,7,7),$   
 $(2,2,4 : 5,5,7,7), (2,2,6 : 3,3,3,17), (2,2,6 : 3,3,9,11),$   
 $(2,2,6 : 3,5,7,11), (2,2,6 : 5,5,5,11), (2,2,8 : 3,3,7,15),$   
 $(2,2,8 : 3,5,5,15), (2,2,10 : 3,3,5,19), (2,2,12 : 3,3,3,$   
 $23), (2,4,4 : 3,5,7,11), (2,4,4 : 3,7,7,9), (2,4,4 : 5,7,7,$   
 $7), (2,4,6 : 3,3,11,11), (2,4,6 : 3,5,9,11), (2,4,6 : 3,7,$

7,11), (2,4,6 : 5,5,7,11), (2,4,8 : 3,5,7,15), (2,4,10 :  
 3,3,7,19), (2,6,6 : 3,5,11,11), (2,6,8 : 3,3,11,15), (4,4,  
 4 : 3,7,7,11), (4,4,4 : 7,7,7,7), (4,4,6 : 3,7,9,11), (4,4,  
 6 : 5,7,7,11), (4,4,8 : 3,7,7,15), (4,6,6 : 3,7,11,11),  
 (2,2,2,2 : 3,3,3,3,11), (2,2,2,2 : 3,3,3,5,9), (2,2,2,2 :  
 3,3,3,7,7), (2,2,2,2 : 3,3,5,5,7), (2,2,2,2 : 3,5,5,5,5),  
 (2,2,2,4 : 3,3,3,5,11), (2,2,2,4 : 3,3,3,7,9), (2,2,2,4 :  
 3,3,5,7,7), (2,2,2,4 : 3,5,5,5,7), (2,2,2,6 : 3,3,3,7,11),  
 (2,2,2,6 : 3,3,5,5,11), (2,2,2,8 : 3,3,3,5,15), (2,2,2,10 :  
 3,3,3,3,19), (2,2,4,4 : 3,3,3,7,11), (2,2,4,4 : 3,3,7,7,7),  
 (2,2,4,4 : 3,5,5,7,7), (2,2,4,6 : 3,3,3,9,11), (2,2,4,6 :  
 3,3,5,7,11), (2,2,4,8 : 3,3,3,7,15), (2,2,6,6 : 3,3,3,11,  
 11), (2,4,4,4 : 3,5,7,7,7), (2,4,4,6 : 3,3,7,7,11), (4,4,4,  
 4 : 3,7,7,7,7), (2,2,2,2,2 : 3,3,3,3,3,9), (2,2,2,2,2 : 3,3,  
 3,3,5,7), (2,2,2,2,2 : 3,3,3,5,5,5), (2,2,2,2,4 : 3,3,3,3,3,  
 11), (2,2,2,2,4 : 3,3,3,3,7,7), (2,2,2,2,4 : 3,3,3,5,5,7),  
 (2,2,2,2,6 : 3,3,3,3,5,11), (2,2,2,2,8 : 3,3,3,3,15), (2,  
 2,2,4,4 : 3,3,3,5,7,7), (2,2,2,4,6 : 3,3,3,3,7,11), (2,2,4,  
 4,4 : 3,3,3,7,7,7), (2,2,2,2,2,2 : 3,3,3,3,3,3,7), (2,2,2,2,  
 2,2 : 3,3,3,3,3,5,5), (2,2,2,2,2,4 : 3,3,3,3,3,5,7), (2,2,2,  
 2,2,6 : 3,3,3,3,3,3,11), (2,2,2,2,4,4 : 3,3,3,3,3,7,7), (2,  
 2,2,2,2,2,2 : 3,3,3,3,3,3,3,5), (2,2,2,2,2,2,4 : 3,3,3,3,3,3,  
 3,7), (2,2,2,2,2,2,2,2 : 3,3,3,3,3,3,3,3,3),  
 $p=3 : ( : 3,3,13), ( : 3,5,11), ( : 3,7,9), ( : 5,5,9),$   
 $( : 5,7,7), (2 : 3,3,3,11), (2 : 3,3,5,9), (2 : 3,3,7,7),$   
 $(2 : 3,5,5,7), (2 : 5,5,5,5), (4 : 3,3,5,11), (4 : 3,3,7,$   
 $9), (4 : 3,5,7,7), (4 : 5,5,5,7), (6 : 3,3,7,11), (6 : 3,$   
 $5,5,11), (8 : 3,3,5,15), (10 : 3,3,3,19), (2,2 : 3,3,3,3,$   
 $9), (2,2 : 3,3,3,5,7), (2,2 : 3,3,5,5,5), (2,4 : 3,3,3,3,$   
 $11), (2,4 : 3,3,3,7,7), (2,4 : 3,3,5,5,7), (2,6 : 3,3,3,5,$   
 $11), (2,8 : 3,3,3,3,15), (4,4 : 3,3,5,7,7), (4,6 : 3,3,3,7,$   
 $11), (2,2,2 : 3,3,3,3,3,7), (2,2,2 : 3,3,3,3,5,5), (2,2,4 :$   
 $3,3,3,3,5,7), (2,2,6 : 3,3,3,3,3,11), (2,4,4 : 3,3,3,3,7,7),$   
 $(2,2,2,2 : 3,3,3,3,3,3,5), (2,2,2,4 : 3,3,3,3,3,3,7), (2,2,$   
 $2,2,2 : 3,3,3,3,3,3,3,3),$   
 $p=5 : ( : 3,3,3,3,7), ( : 3,3,3,5,5), (2 : 3,3,3,3,3,5),$   
 $(4 : 3,3,3,3,3,7), (2,2 : 3,3,3,3,3,3,3,3),$

20次元 373個

$p=0 : (2 : 21), (4 : 23), (10 : 29), (20 : 39), (2,2 : 3,$   
 $19), (2,2 : 5,17), (2,2 : 7,15), (2,2 : 9,13), (2,2 :$   
 $11,11), (2,4 : 5,19), (2,4 : 7,17), (2,4 : 9,15), (2,4 :$   
 $11,13), (2,6 : 3,23), (2,6 : 9,17), (2,6 : 11,15), (2,8$   
 $: 5,23), (2,8 : 13,15), (2,10 : 11,19), (2,12 : 9,23),$   
 $(2,14 : 7,27), (2,16 : 5,31), (2,18 : 3,35), (4,4 : 7,$   
 $19), (4,4 : 11,15), (4,6 : 11,17), (4,8 : 7,23), (4,8 :$   
 $15,15), (4,10 : 13,19), (4,12 : 11,23), (4,16 : 7,31),$

(6,8 : 15,17), (6,14 : 11,27), (8,12 : 15,23), (10,10 : 19,19), (2,2,2 : 3,3,17), (2,2,2 : 3,5,15), (2,2,2 : 3,7,13), (2,2,2 : 3,9,11), (2,2,2 : 5,5,13), (2,2,2 : 5,7,11), (2,2,2 : 5,9,9), (2,2,2 : 7,7,9), (2,2,4 : 3,3,19), (2,2,4 : 3,7,15), (2,2,4 : 3,11,11), (2,2,4 : 5,5,15), (2,2,4 : 5,7,13), (2,2,4 : 5,9,11), (2,2,4 : 7,7,11), (2,2,4 : 7,9,9), (2,2,6 : 3,7,17), (2,2,6 : 3,11,13), (2,2,6 : 5,5,17), (2,2,6 : 5,11,11), (2,2,6 : 7,9,11), (2,2,8 : 3,3,23), (2,2,8 : 3,11,15), (2,2,8 : 5,9,15), (2,2,8 : 7,7,15), (2,2,10 : 3,9,19), (2,2,10 : 5,7,19), (2,2,12 : 3,7,23), (2,2,12 : 5,5,23), (2,2,14 : 3,5,27), (2,2,16 : 3,3,31), (2,4,4 : 5,7,15), (2,4,4 : 5,11,11), (2,4,4 : 7,7,13), (2,4,4 : 7,9,11), (2,4,6 : 3,11,15), (2,4,6 : 5,7,17), (2,4,6 : 5,11,13), (2,4,6 : 7,11,11), (2,4,6 : 9,9,11), (2,4,8 : 5,11,15), (2,4,8 : 7,9,15), (2,4,10 : 3,11,19), (2,4,10 : 7,7,19), (2,4,12 : 5,7,23), (2,4,14 : 3,7,27), (2,6,6 : 3,11,17), (2,6,6 : 9,11,11), (2,6,8 : 7,11,15), (2,6,10 : 5,11,19), (2,6,12 : 3,11,23), (2,8,8 : 5,15,15), (2,8,10 : 3,15,19), (4,4,4 : 7,7,15), (4,4,4 : 7,11,11), (4,4,6 : 7,7,17), (4,4,6 : 7,11,13), (4,4,6 : 9,11,11), (4,4,8 : 7,11,15), (4,4,12 : 7,7,23), (4,6,6 : 11,11,11), (4,6,8 : 9,11,15), (4,6,10 : 7,11,19), (4,8,8 : 7,15,15), (6,6,8 : 11,11,15), (2,2,2,2 : 3,3,3,15), (2,2,2,2 : 3,3,5,13), (2,2,2,2 : 3,3,7,11), (2,2,2,2 : 3,3,9,9), (2,2,2,2 : 3,5,5,11), (2,2,2,2 : 3,5,7,9), (2,2,2,2 : 3,7,7,7), (2,2,2,2 : 5,5,5,9), (2,2,2,2 : 5,5,7,7), (2,2,2,4 : 3,3,5,15), (2,2,2,4 : 3,3,7,13), (2,2,2,4 : 3,3,9,11), (2,2,2,4 : 3,5,7,11), (2,2,2,4 : 3,7,7,9), (2,2,2,4 : 5,5,5,11), (2,2,2,4 : 5,5,7,9), (2,2,2,4 : 5,7,7,7), (2,2,2,6 : 3,3,5,17), (2,2,2,6 : 3,3,11,11), (2,2,2,6 : 3,5,9,11), (2,2,2,6 : 3,7,7,11), (2,2,2,6 : 5,5,7,11), (2,2,2,8 : 3,3,9,15), (2,2,2,8 : 3,5,7,15), (2,2,2,8 : 5,5,5,15), (2,2,2,10 : 3,3,7,19), (2,2,2,10 : 3,5,5,19), (2,2,2,12 : 3,3,5,23), (2,2,2,14 : 3,3,3,27), (2,2,4,4 : 3,3,7,15), (2,2,4,4 : 3,3,11,11), (2,2,4,4 : 3,7,7,11), (2,2,4,4 : 5,5,7,11), (2,2,4,4 : 5,7,7,9), (2,2,4,4 : 7,7,7,7), (2,2,4,6 : 3,3,7,17), (2,2,4,6 : 3,3,11,13), (2,2,4,6 : 3,5,11,11), (2,2,4,6 : 3,7,9,11), (2,2,4,6 : 5,5,9,11), (2,2,4,6 : 5,7,7,11), (2,2,4,8 : 3,3,11,15), (2,2,4,8 : 3,7,7,15), (2,2,4,8 : 5,5,7,15), (2,2,4,10 : 3,5,7,19), (2,2,4,12 : 3,3,7,23), (2,2,6,6 : 3,7,11,11), (2,2,6,6 : 5,5,11,11), (2,2,6,8 : 3,5,11,15), (2,2,6,10 : 3,3,11,19), (2,2,8,8 : 3,3,15,15), (2,4,4,4 : 5,7,7,11), (2,4,4,4 : 7,7,7,9), (2,4,4,6 : 3,7,11,11), (2,4,4,6 : 5,7,9,11), (2,4,4,6 : 7,7,7,11), (2,4,4,8 : 5,7,7,15), (2,4,4,10 : 3,7,7,19), (2,4,6,6 : 3,9,11,11), (2,4,6,6 : 5,7,11,11), (2,4,6,8 : 3,7,11,15), (2,6,6,6 : 3,11,11,11), (4,4,4,4 : 7,7,7,11), (4,4,4,6 : 7,7,9,11), (4,4,4,8 : 7,7,7,15),

(4,4,6,6 : 7,7,11,11), (2,2,2,2,2 : 3,3,3,3,13), (2,2,2,2,2 : 3,3,3,5,11), (2,2,2,2,2 : 3,3,3,7,9), (2,2,2,2,2 : 3,3,5,5,9), (2,2,2,2,2 : 3,3,5,7,7), (2,2,2,2,2 : 3,5,5,5,7), (2,2,2,2,2 : 5,5,5,5,5), (2,2,2,2,4 : 3,3,3,3,15), (2,2,2,2,4 : 3,3,3,7,11), (2,2,2,2,4 : 3,3,5,5,11), (2,2,2,2,4 : 3,3,5,7,9), (2,2,2,2,4 : 3,3,7,7,7), (2,2,2,2,4 : 3,5,5,7,7), (2,2,2,2,4 : 5,5,5,5,7), (2,2,2,2,6 : 3,3,3,3,17), (2,2,2,2,6 : 3,3,3,9,11), (2,2,2,2,6 : 3,3,5,7,11), (2,2,2,2,6 : 3,5,5,5,11), (2,2,2,2,8 : 3,3,3,7,15), (2,2,2,2,8 : 3,3,5,5,15), (2,2,2,2,10 : 3,3,3,5,19), (2,2,2,2,12 : 3,3,3,3,23), (2,2,2,4,4 : 3,3,5,7,11), (2,2,2,4,4 : 3,3,7,7,9), (2,2,2,4,4 : 3,5,7,7,7), (2,2,2,4,4 : 5,5,5,7,7), (2,2,2,4,6 : 3,3,3,11,11), (2,2,2,4,6 : 3,3,5,9,11), (2,2,2,4,6 : 3,3,7,7,11), (2,2,2,4,6 : 3,5,5,7,11), (2,2,2,4,8 : 3,3,5,7,15), (2,2,2,4,10 : 3,3,3,7,19), (2,2,2,6,6 : 3,3,5,11,11), (2,2,2,6,8 : 3,3,3,11,15), (2,2,4,4,4 : 3,3,7,7,11), (2,2,4,4,4 : 3,7,7,7,7), (2,2,4,4,4 : 5,5,7,7,7), (2,2,4,4,6 : 3,3,7,9,11), (2,2,4,4,6 : 3,5,7,7,11), (2,2,4,4,8 : 3,3,7,7,15), (2,2,4,6,6 : 3,3,7,11,11), (2,4,4,4,4 : 5,7,7,7,7), (2,4,4,4,6 : 3,7,7,7,11), (4,4,4,4,4 : 7,7,7,7,7), (2,2,2,2,2,2 : 3,3,3,3,3,11), (2,2,2,2,2,2 : 3,3,3,3,5,9), (2,2,2,2,2,2 : 3,3,3,3,7,7), (2,2,2,2,2,2 : 3,3,3,5,5,7), (2,2,2,2,2,2 : 3,3,5,5,5,5), (2,2,2,2,2,4 : 3,3,3,3,5,11), (2,2,2,2,2,4 : 3,3,3,3,7,9), (2,2,2,2,2,4 : 3,3,3,5,7,7), (2,2,2,2,2,4 : 3,3,5,5,5,7), (2,2,2,2,2,6 : 3,3,3,3,7,11), (2,2,2,2,2,6 : 3,3,3,5,5,11), (2,2,2,2,2,8 : 3,3,3,3,5,15), (2,2,2,2,2,10 : 3,3,3,3,3,19), (2,2,2,2,4,4 : 3,3,3,3,7,11), (2,2,2,2,4,4 : 3,3,3,7,7,7), (2,2,2,2,4,4 : 3,3,5,5,7,7), (2,2,2,2,4,6 : 3,3,3,3,9,11), (2,2,2,2,4,6 : 3,3,3,5,7,11), (2,2,2,2,4,8 : 3,3,3,3,7,15), (2,2,2,2,6,6 : 3,3,3,3,11,11), (2,2,2,4,4,4 : 3,3,5,7,7,7), (2,2,2,4,4,6 : 3,3,3,7,7,11), (2,2,4,4,4,4 : 3,3,7,7,7,7), (2,2,2,2,2,2,2 : 3,3,3,3,3,3,3,3,11), (2,2,2,2,2,2,2 : 3,3,3,3,5,5,7), (2,2,2,2,2,2,2 : 3,3,3,3,7,7,7), (2,2,2,2,2,2,2 : 3,3,3,3,5,5,5,5), (2,2,2,2,2,2,4 : 3,3,3,3,3,3,3,11), (2,2,2,2,2,2,4 : 3,3,3,3,3,7,7), (2,2,2,2,2,2,4 : 3,3,3,3,5,5,7), (2,2,2,2,2,2,6 : 3,3,3,3,3,5,11), (2,2,2,2,2,2,8 : 3,3,3,3,3,3,15), (2,2,2,2,2,4,4 : 3,3,3,3,5,7,7), (2,2,2,2,2,4,6 : 3,3,3,3,3,7,11), (2,2,2,2,4,4,4 : 3,3,3,3,7,7,7), (2,2,2,2,2,2,2,2 : 3,3,3,3,3,3,3,7), (2,2,2,2,2,2,2,2 : 3,3,3,3,3,3,3,5,5), (2,2,2,2,2,2,2,4 : 3,3,3,3,3,3,3,5,7), (2,2,2,2,2,2,2,6 : 3,3,3,3,3,3,3,11), (2,2,2,2,2,2,4,4 : 3,3,3,3,3,7,7), (2,2,2,2,2,2,2,2,2 : 3,3,3,3,3,3,3,3,5), (2,2,2,2,2,2,2,4 : 3,3,3,3,3,3,3,3,7), (2,2,2,2,2,2,2,2,2,2 : 3,3,3,3,3,3,3,3,3,3),  
 $p=2 : ( : 3,17), ( : 5,15), ( : 7,13), ( : 9,11), (2 : 3,3,15), (2 : 3,5,13), (2 : 3,7,11), (2 : 3,9,9), (2 : 5,5,11), (2 : 5,7,9), (2 : 7,7,7), (4 : 3,5,15), (4 : 3,7,13), (4 : 3,9,11), (4 : 5,7,11), (4 : 7,7,9), (6 : 3,5,$

17), (6 : 3,11,11), (6 : 5,9,11), (6 : 7,7,11), (8 : 3,9,15), (8 : 5,7,15), (10 : 3,7,19), (10 : 5,5,19), (12 : 3,5,23), (14 : 3,3,27), (2,2 : 3,3,3,13), (2,2 : 3,3,5,11), (2,2 : 3,3,7,9), (2,2 : 3,5,5,9), (2,2 : 3,5,7,7), (2,2 : 5,5,5,7), (2,4 : 3,3,3,15), (2,4 : 3,3,7,11), (2,4 : 3,5,5,11), (2,4 : 3,5,7,9), (2,4 : 3,7,7,7), (2,4 : 5,5,7,7), (2,6 : 3,3,3,17), (2,6 : 3,3,9,11), (2,6 : 3,5,7,11), (2,6 : 5,5,5,11), (2,8 : 3,3,7,15), (2,8 : 3,5,5,15), (2,10 : 3,3,5,19), (2,12 : 3,3,3,23), (4,4 : 3,5,7,11), (4,4 : 3,7,7,9), (4,4 : 5,7,7,7), (4,6 : 3,3,11,11), (4,6 : 3,5,9,11), (4,6 : 3,7,7,11), (4,6 : 5,5,7,11), (4,8 : 3,5,7,15), (4,10 : 3,3,7,19), (6,6 : 3,5,11,11), (6,8 : 3,3,11,15), (2,2,2 : 3,3,3,3,11), (2,2,2 : 3,3,3,5,9), (2,2,2 : 3,3,3,7,7), (2,2,2 : 3,3,5,5,7), (2,2,2 : 3,5,5,5,5), (2,2,4 : 3,3,3,5,11), (2,2,4 : 3,3,3,7,9), (2,2,4 : 3,3,5,7,7), (2,2,4 : 3,5,5,5,7), (2,2,6 : 3,3,3,7,11), (2,2,6 : 3,3,5,5,11), (2,2,8 : 3,3,3,5,15), (2,2,10 : 3,3,3,3,19), (2,4,4 : 3,3,3,7,11), (2,4,4 : 3,3,7,7,7), (2,4,4 : 3,5,5,7,7), (2,4,6 : 3,3,3,9,11), (2,4,6 : 3,3,5,7,11), (2,4,8 : 3,3,3,7,15),

(2,6,6 : 3,3,3,11,11), (4,4,4 : 3,5,7,7,7), (4,4,6 : 3,3,7,7,11), (2,2,2,2 : 3,3,3,3,3,9), (2,2,2,2 : 3,3,3,3,5,7), (2,2,2,2 : 3,3,3,5,5,5), (2,2,2,4 : 3,3,3,3,3,11), (2,2,2,4 : 3,3,3,3,7,7), (2,2,2,4 : 3,3,3,5,5,7), (2,2,2,6 : 3,3,3,3,5,11), (2,2,2,8 : 3,3,3,3,3,15), (2,2,4,4 : 3,3,3,5,7,7), (2,2,4,6 : 3,3,3,3,7,11), (2,4,4,4 : 3,3,3,7,7,7), (2,2,2,2,2 : 3,3,3,3,3,3,7), (2,2,2,2,2 : 3,3,3,3,3,5,5), (2,2,2,2,4 : 3,3,3,3,3,5,7), (2,2,2,2,6 : 3,3,3,3,3,3,11), (2,2,2,4,4 : 3,3,3,3,3,7,7), (2,2,2,2,2,2 : 3,3,3,3,3,3,3,5), (2,2,2,2,2,4 : 3,3,3,3,3,3,3,7), (2,2,2,2,2,2,2 : 3,3,3,3,3,3,3,3,3),  
 $p=4$  : ( : 3,3,3,11), ( : 3,3,5,9), ( : 3,3,7,7), ( : 3,5,5,7), ( : 5,5,5,5), (2 : 3,3,3,3,9), (2 : 3,3,3,5,7), (2 : 3,3,5,5,5), (4 : 3,3,3,3,11), (4 : 3,3,3,7,7), (4 : 3,3,5,5,7), (6 : 3,3,3,5,11), (8 : 3,3,3,3,15), (2,2 : 3,3,3,3,3,7), (2,2 : 3,3,3,3,5,5), (2,4 : 3,3,3,3,5,7), (2,6 : 3,3,3,3,3,11), (4,4 : 3,3,3,3,7,7), (2,2,2 : 3,3,3,3,3,3,5), (2,2,2,4 : 3,3,3,3,3,3,7), (2,2,2,2 : 3,3,3,3,3,3,3,3),  
 $p=6$  : ( : 3,3,3,3,3,5), (2 : 3,3,3,3,3,3,3) 以上

Homotopy rank types with dimensions less than or equal to 20  
and their cohomologically symplectic structures

Osamu NAKAMURA and Toshihiro YAMAGUCHI