

論 文

科学技術教育へのカオスシミュレーションの導入

Introduction of a Chaos Simulation to the Science and Technology Education

道法 浩孝 (高知大学教育学部)

橋本 広之 (高知大学教育学部)

Hiroataka DOHO and Hiroyuki Hashimoto

Faculty of Education, Kochi University

ABSTRACT

The chaos is known as a factor causing complex phenomena familiar to us such as weather changes and neuronal actions in the cerebral nervous system. The chaos is defined as a phenomenon that follows deterministic rules but cannot be expected since it exhibits complex and irregular behavior due to the unstable system. In this paper, we developed teaching materials that account for the concept and the characteristic of the chaos by using computer simulation that is a major means of Computational Science. The purpose of this study is to introduce the chaos simulation to the science and technology education. The teaching materials simulate complex behavior exhibited by the logistic mapping that is a typical chaos by using a two-dimensional graphic indication. Furthermore the logistic mapping can apply to drawing function graphs in mathematics and to indicating the trajectory of a tennis ball during the rally. By using those simulations, the teaching materials enable learners to deepen their understanding of the concept of the chaos.

Key words : Computer Simulation, Chaos, Logistic Mapping, Teaching Material, Science and Technology Education

1. はじめに

解析的に解くことが困難な多自由度系の物理・工学モデルや非線形応答等に基づく現象を、コンピュータを駆使して数値的に解明する研究分野に計算科学(Computational Science)がある。コンピュータシミュレーションを主要な手法とし、非線形、複雑系等、従来の手法では解析困難であった現象の解明に絶大なパワーを発揮している¹⁾。

計算科学は、数理モデルの振る舞いをコンピュータで計算し、その出力を実験データのように帰納的に分析して何らかの法則性を見だしそれを探求する。一般に、モデルは多くの自由度を含む非線形複雑系であり、要素間の基礎方程式は単純でも、系全体の振る舞いは計算してみなければわからない。すなわち、系の振る舞いを知るには、計算結果を実験データを分析するのと同様な手続きで分析することが必要である。以上のように計算科学は、モデルに基づく点で理論に類似し、データを帰納的に分析する点で実験に近い。実験・理論に並ぶ第3の科学と呼ばれている^{1), 2)}。

計算科学は物理学や化学に始まり、天文学、地球科学などにおいても大きな成果を上げ、生物科学にまで広がっている。また先端的な科学研究だけでなく、工学の諸分野でも、ものづくり産業の現場においても発展しつつある。

上記の計算科学を教育へ適用すると、従来の学習環境及び学習者の適時性等を考慮すると実現不可能であった詳細かつ高精度な数値計算や、実地によるアプローチが極めて困難だった事象・現象の観察等が容易に実現可能になり、学習者の思考力・問題解決能力の高揚、知識・理解の深化等多大な教育効果が期待できる。しかし、現在学校教育現場において上記のような視点でコンピュータを活用した実践事例はあまり見られない。これまで、コンピュータシミュレーションの科学技術教育への導入例は報告されているが、従来から存在しているテーマへの導入がほとんどであり^{3), 4), 5)}、計算科学のパワーを生かした非線形問題や複雑系への適用事例は少ない⁶⁾。

その原因として、計算科学で扱われる現象が、一部の専門的な研究者の対象として考えられる傾向にあることが考えられる。しなしながら、非線形、複雑系等の現象は一般の日常生活の中にも存在する。具体例として、カオスがあげられる。川を流れる木の葉のゆらぎ、天候の変動及び脳神経系におけるニューロンの挙動等カオスは我々の身近に存在しており、従来の科学(決定論的世界観)では説明できない現象の誘因となっている。

そこで本研究では、身近に存在する複雑な現象の誘因であるカオスに対し、コンピュータシミュレーションの特徴を生かしたソフトウェアを開発し⁷⁾、科学技術教育における教材化について検討を行う。科学技術の発達によって新たに生まれた研究分野に対し、最先端の科学技術研究手法

の一端を学習者に体験させる学習活動を展開することを通して、若者の理科離れ、科学技術離れへの対応に一定の成果を得ることを視野に入れている。

2. カオスとその挙動シミュレーション

「カオス」という言葉は一般的には「混沌」という意味で用いられるが、科学技術の分野では、「決定論的法則に従いながらも、初期値敏感性に起因するシステムの不安定性により複雑で不規則な振る舞いを呈し、予測不能性を有する現象」と定義される^{8), 9), 10)}。カオスにおいては、初期値取得時以外に、系の時間発展に対し、確率的要素が注入される余地は全くない。しかしながら、その規則が作り出す挙動が非常に複雑であり予測不能性を有する。その原因は、システムの非線形性と測定誤差による初期値同定の不確実性及びそれに対する鋭敏な応答性にある。本来、運動は決定論に従って、過去により未来は一意的に定まる。しかし、具体的に過去の一時点での系の状態を決めようとすると必然的に誤差が生じる。この測定精度の問題のため、カオスの結果が得られる。このような立場を決定論のカオス論という。また一方で、カオスの存在は、複雑な現象の背後に簡単な規則があることを示すものでもある。

カオスを呈する一例としてロジスティック写像がある。その時間発展方程式は、

$$x_{t+1} = \lambda x_t (1 - x_t) \quad (1)$$

という式で表せる⁸⁾。ここで、 λ : コントロールパラメータ、 x_t は $0 \leq x_t \leq 1$ で定式化されている。

(1)式は、簡単な2次の時間発展方程式であるが、初期値 x_0 に対する x_t の値は t の増加に伴い非常に複雑な式になる。例えば、

$$x_2 = \lambda \cdot \lambda x_0 (1 - x_0) \{1 - \lambda x_0 (1 - x_0)\} \quad (2)$$

となり、 x_3 を求めるには、この x_2 を(1)式に代入する必要がある。すなわち、時間発展に伴う x_t の値を解析的に求めることは不可能である。

このロジスティック写像が呈する複雑な挙動は、コントロールパラメータ λ のチューニングによって特徴づけられる。表1は、 $\lambda = 2$ 、 $\lambda = 3.1$ 、 $\lambda = 3.9$ の設定に対し、初期値を $x_0 = 0.2$ としたときの x_t の値を、 $t = 15$ まで計算した結果である。 $\lambda = 2$ の場合、 x_t の値は5ステップ後に $x_t = 0.5$ になり、以後は変化しない(収束)。 $\lambda = 3.1$ の場合、 x_t の値は2ステップ以降、0.76近傍と0.56近傍の値を交互にとっている。実際小数点以下6けたの精度で x_t の値を求めると、 $t = 56$ 以降 $x_t = 0.558014$ と $x_t = 0.764567$ の値を交互にとるようになる(周期)。

$\lambda = 3.9$ に設定した場合、 x_t の値には前者のような規則性はみられない。実際にあらゆる t に対する x_t の値を高い

表1 異なる λ に対する x_t の値

t	$\lambda=2$	$\lambda=3.1$	$\lambda=3.9$
0	0.200000	0.200000	0.200000
1	0.320000	0.496000	0.624000
2	0.435200	0.774950	0.915034
3	0.491602	0.540647	0.303214
4	0.499859	0.769878	0.823973
5	0.500000	0.549214	0.565661
6	0.500000	0.767492	0.958185
7	0.500000	0.553189	0.156258
8	0.500000	0.766230	0.514181
9	0.500000	0.555277	0.974216
10	0.500000	0.765528	0.097966
11	0.500000	0.556435	0.344638
12	0.500000	0.765127	0.880864
13	0.500000	0.557094	0.409276
14	0.500000	0.764895	0.942900
15	0.500000	0.557475	0.209975

精度で求めた場合、 x_t は同じ値をとることなく0から1の範囲の実数値をとる。すなわち、非常に簡単な式で定義されているにもかかわらず、 x_t は複雑な挙動を呈する。これがカオスである。

表2は、カオスを呈する λ 値の設定($\lambda=3.9$)に対し、初期値 x_0 の値に微小な差を与え、 x_t の値を計算した結果である。時間発展後の x_t の値は、その差がきわめて小さいことからほぼ同じ値をとることが予想される。しかし、各初期値に対する挙動は時間発展とともに全く異なる様相を呈する。すなわち、0.001(0.5%)の違いが時間発展とともに増大する。 $t=15$ における x_t の値は小数点以下がすべて異なっている。これは、予測できない事態であり、これがカオスの特徴である初期値敏感性である。

以下において、上記のロジスティック写像が呈する挙動を、本研究で開発したシミュレーションを通して提示する。開発したシミュレーションは、(1)式に示す発展方程式で定義されるロジスティック写像が呈する複雑な挙動を、グ

表2 初期値の差に対する x_t の値

t	$x_0=0.199$	$x_0=0.2$	$x_0=0.201$
0	0.199000	0.200000	0.201000
1	0.621656	0.624000	0.626336
2	0.917279	0.915034	0.912753
3	0.295924	0.303214	0.310577
4	0.812577	0.823973	0.835064
5	0.593952	0.565661	0.537156
6	0.940575	0.958185	0.969616
7	0.217986	0.156258	0.114898
8	0.664825	0.514181	0.396617
9	0.869048	0.974216	0.933317
10	0.443835	0.097966	0.242723
11	0.962698	0.344638	0.716854
12	0.140053	0.880864	0.791600
13	0.469709	0.409276	0.643382
14	0.971422	0.942900	0.894823
15	0.108271	0.209975	0.367049

ラフィカルに提示するものである。すなわち、任意のコントロールパラメータ λ 及び初期値 x_0 の設定値に対する各ステップ t ごとの x_t の値を2次元グラフ(横軸： t 及び λ 、縦軸： x_t)として表示する。横軸・縦軸の目盛単位は任意に設定可能であり、様々な条件におけるロジスティック写像の挙動を即座に容易にシミュレート可能になっている。シミュレーション開発に使用した言語は、Visual Basic 2010である。

図1から図4に、(1)式における x_t の時系列変化を、初期値を $x_0=0.2$ に設定し、 λ をパラメータとしてそれぞれシミュレートした結果を掲げる。

図1は、 $\lambda=2$ に設定したときの x_t の時系列変化である。 t の増加に伴い x_t が0.5の値に収束している。 $t=5$ で $x_t=0.5$ になり、それ以降は0.5以外の値が現れることはない。

図2は、 $\lambda=3.1$ に設定したときの x_t の時系列変化である。 t が一定値を越えると、0.56付近と0.76付近を往復し、周期の挙動を呈している。 t の値を増加させても2周期は変わらず、他の値が現れることはない。

図3は、 $\lambda=3.5$ に設定したときの x_t の時系列変化である。 t が一定値を越えると、4つの値を繰り返す4周期の挙動を呈している。

図4は、 $\lambda=3.9$ に設定したときの x_t の時系列変化である。図1から図3で現れた挙動とは異なり、一定値をとったり周期的な挙動は見られない。すなわちカオスの挙動を呈している。 x_t は同じ値をとることなく0から1の間をゆらいている。

図5は、カオスの特徴である初期値敏感性をシミュレーションを通して提示したものである。 $\lambda=3.9$ に対し、初期値を $x_0=0.2$ 及び $x_0=0.199$ に設定した場合のシミュレーション結果である。初期値のわずかなずれ($\Delta x_0=0.001$)が時間発展とともに拡大される様子を視覚を通して容易に把握することが可能である。 $t=10$ 以降の両者の挙動は全く異なるものになっている。

図6は、上記の時系列データを λ ごとに取得し、横軸に λ 縦軸に x_t 、すなわち各 λ の設定値に対する x_t のとりうる全ての値をプロットすることにより、ロジスティック写像における x_t の振る舞いを表示したものである。時系列データに対応させて考察を行うと、 λ の値が1から3付近の範囲に設定されている場合は1本の線しか得られない。これは、 $\lambda=2$ における時系列データにみられた収束を表している。 λ の値が3を超えると、1本の線が2本に分岐しさらに4本に分岐している。これは周期の状態を表しており、2本の部分は2周期に、4本の部分は4周期に対応している。 λ が3.5付近を越えると x_t が0から1の無数の値をとっており、カオスに対応している。周期からカオスに移行する境界の λ 値は $\lambda=3.569$ である。

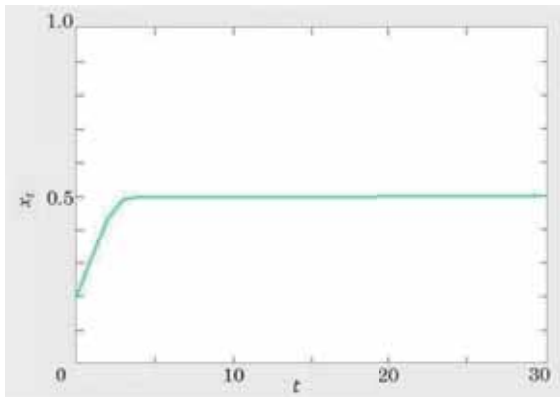


図1 ロジスティック写像の時系列変化 ($\lambda = 2$)

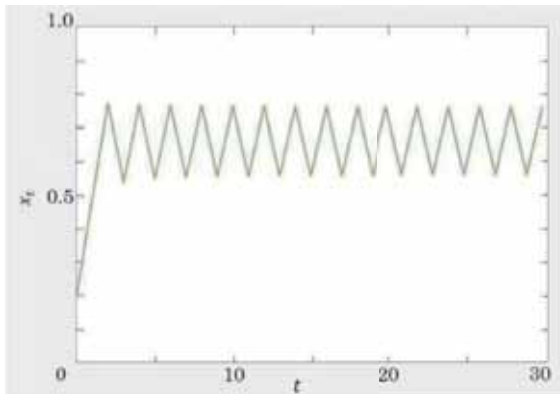


図2 ロジスティック写像の時系列変化 ($\lambda = 3.1$)

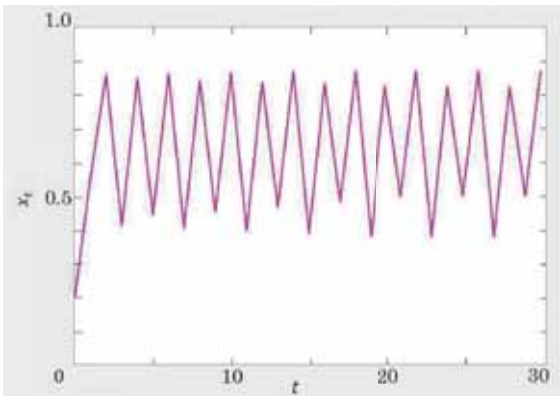


図3 ロジスティック写像の時系列変化 ($\lambda = 3.5$)

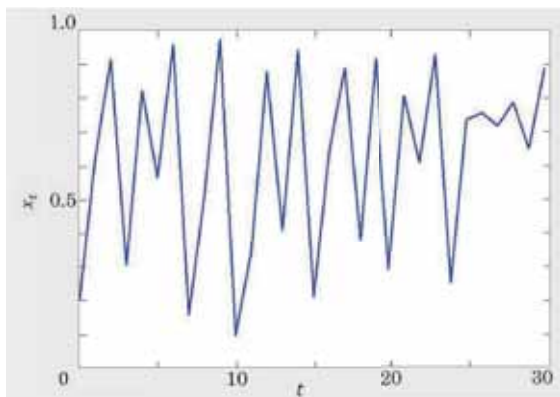


図4 ロジスティック写像の時系列変化 ($\lambda = 3.9$)

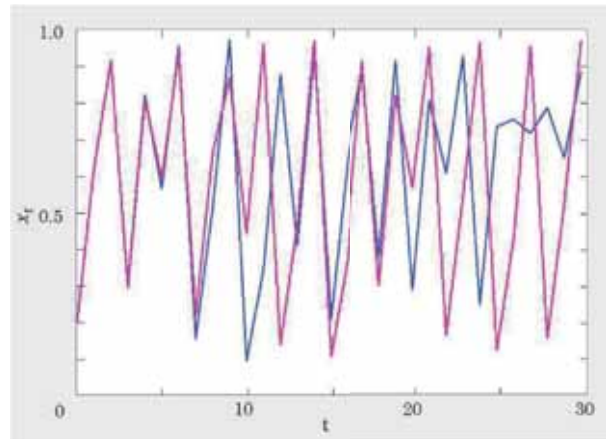


図5 カオスが呈する初期値敏感性 ($\lambda = 3.9, \Delta x_0 = 0.001$)

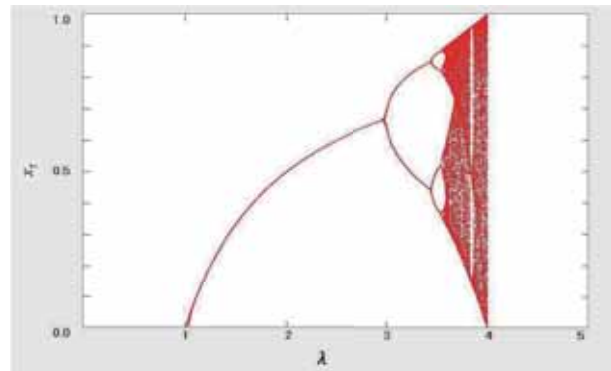


図6 ロジスティック写像の分岐図 ($\lambda = 1$ から $\lambda = 4$)

従来はカオスを上記のように提示することは容易ではなかったが、コンピュータの発達すなわち第3の科学といわれる計算科学の確立により、複雑な挙動の解析が可能になった。

図6において、 $\lambda = 3.8$ から $\lambda = 4$ の部分を拡大したものが図7である。カオス状態に移行後も周期的な挙動を示す部分があることがわかる。

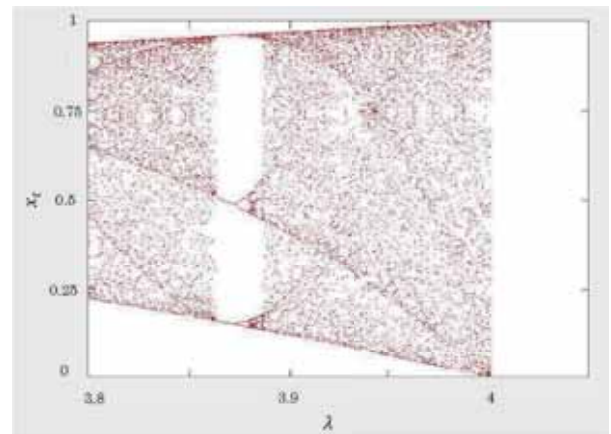


図7 ロジスティック写像の分岐図 ($\lambda = 3.8$ から $\lambda = 4$)

3. カオスシミュレーションの教材化

カオスを中学校及び高等学校の科学技術教育へ導入することを目的として、ロジスティック写像を既存の教材や身近な具体的事象に応用したシミュレーションを開発し、教材化を図った。応用対象としては、数学科における関数グラフの描画及びテニスのラリーにおけるボールの軌跡を取り上げた。教材化にあたっては、前章で提示したシミュレーションとの関連付けを図り、以下のように教材構成を行った。すなわち、カオスの概念を前章で提示したシミュレーションを通して把握させたのち、ロジスティック写像を具体的教材及び事象に応用して、学習者のカオスに関する理解の深化を図る構成になっている。以下に、開発したシミュレーションについて詳述する。

3.1 関数グラフの描画シミュレーション

関数グラフについての学習は、変数間の対応を表す表の作成、表の結果（対応する変数の組合せ）の座標上へのプロット、プロットした点の考察に基づく対象とする関数グラフの特徴の理解というプロセスで展開される。

ここで、グラフに対応する点を座標上にプロットする場合、一般的にはある値（例えば最小値）から順次プロットを行う。開発したシミュレーションでは、このプロットする点の x 座標の決定にカオスを導入する。これにより、カオスの特徴を関数グラフの描画を通して提示する。具体的には、前章で示したロジスティック写像を用いて 0 から 1 の実数をカオス的順序で発生させ、発生する実数の変域を描画する関数グラフの独立変数の変域に一致させることにより実現する。例えば、最初にプロットする点の x 座標を 4 とし、 $-10 \leq x \leq 10$ の変域で関数 $y = x$ のグラフを描画する場合、 $x_0 = 0.7$ 、 $\lambda = 4$ に設定した(1)式において x_t を発生させ、得られた x_t 値に対し、

$$X_t = 10(2x_t - 1) \quad (3)$$

の計算操作を行い、 t 番目にプロットする点の x 座標 X_t を決定する。

図 8 に、関数 $y = x$ のグラフに対し上記のシミュレーションを行った結果を掲げる。プロットした点の数は 20 である。プロットする点の数が少ないため、点の分布に偏りが見られる。図 9、図 10 に、プロットする点の数をそれぞれ 50、200 に設定した場合の描画結果を掲げる。プロット点数の増加に伴い、点の分布が一様になり、点の集合としての直線が現れる。一見複雑な挙動を示しながらも、最終的には従来の方法で描いたグラフと同様の結果を得ることができる。点の描画にあたっては、学習者がカオスが呈する複雑な挙動を把握しやすいように描画スピードを調節できるようになっており、学習者の実態や授業の目的に応じて、シミュレーションを行うことが可能になっている。また、上記のシミュレーションは、カオス状態に対応する

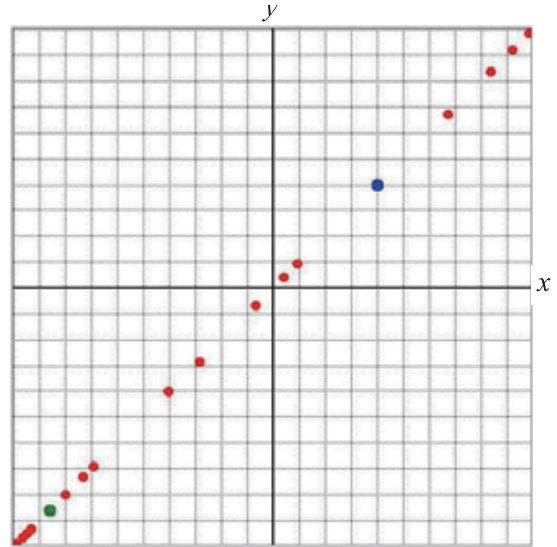


図 8 カオスを導入した関数グラフの描画（プロット点数：20）

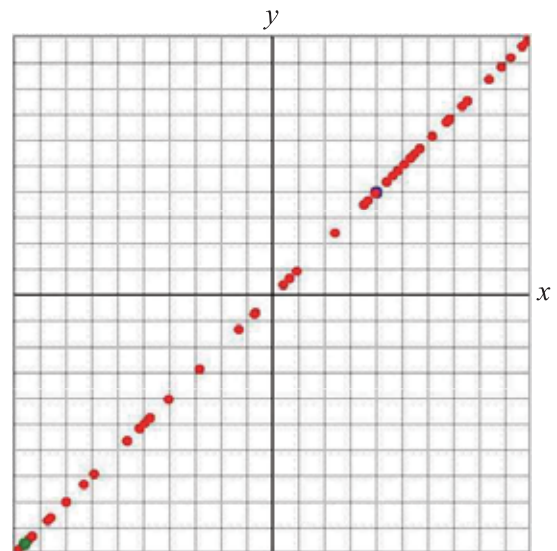


図 9 カオスを導入した関数グラフの描画（プロット点数：50）

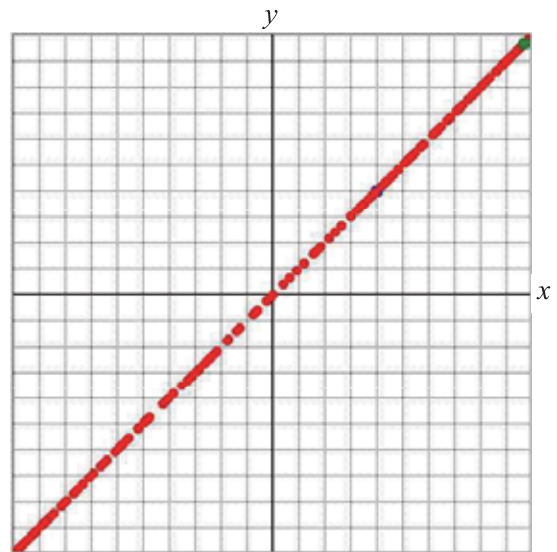
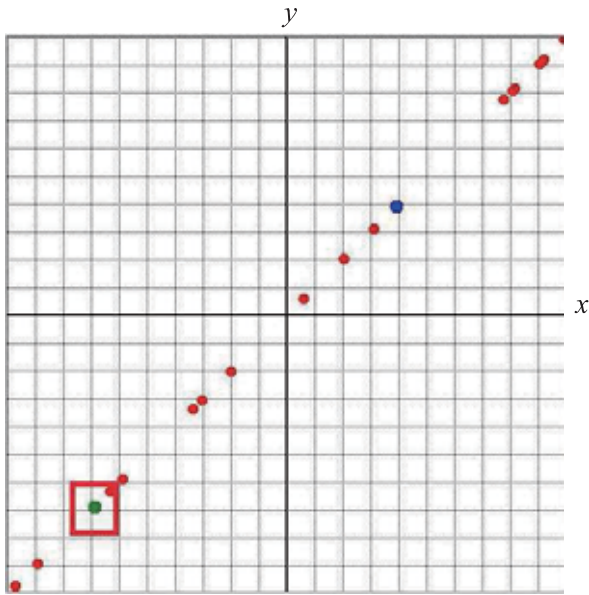


図 10 カオスを導入した関数グラフの描画（プロット点数：200）

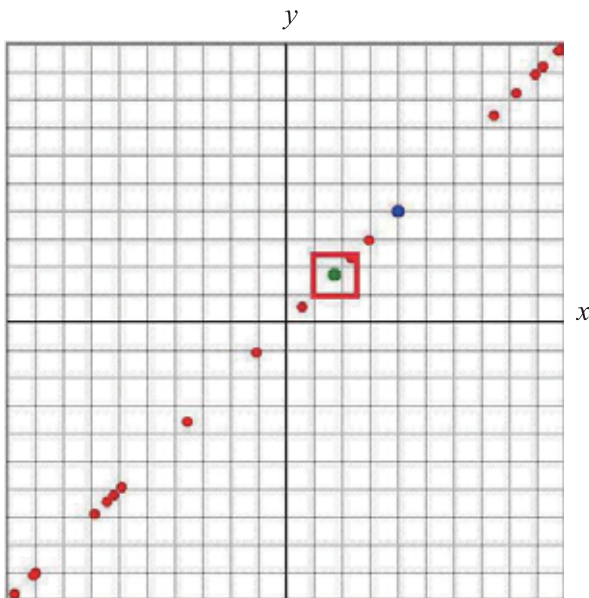
ものであるが、 λ のチューニングにより収束、周期に対応した結果を示すことも可能である。これらの場合、画面上には1点(収束), または数点(周期)しか描画されない。以上のように、本シミュレーションを活用すれば、関数グラフの学習過程のなかで、カオス及びその特徴を収束、周期との比較を通して学習させることが可能である。

図11は、初期値敏感性をグラフの描画を通して示すものである。初期値に対応する点を青色で、最終値に対応する点を緑色で表示するとともに赤い枠で囲んでいる。初期値の x 座標をそれぞれ $x=3.9$, $x=3.99$ と両者に微小な差(相対比: 2.3%)を与えているが、最終値に対応する点は全く異なっている。

図12から図14に、2次関数 $y=0.1x^2-2$ のグラフに対



(a) 初期値を3.9に設定した場合



(b) 初期値を3.99に設定した場合

図11 グラフの描画を通じた初期値敏感性の提示

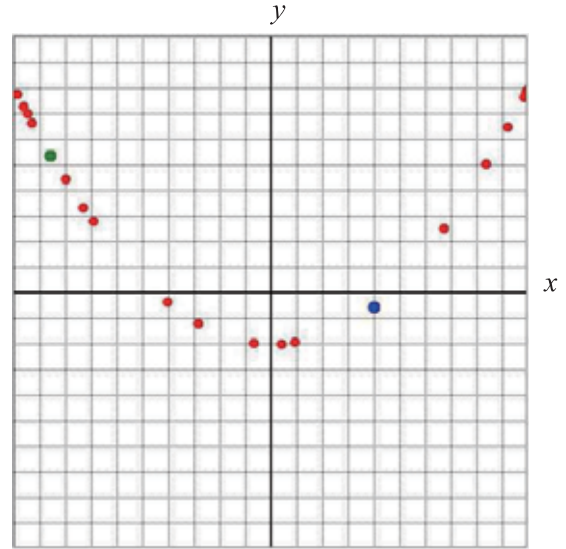


図12 2次関数グラフの描画(プロット点数: 20)

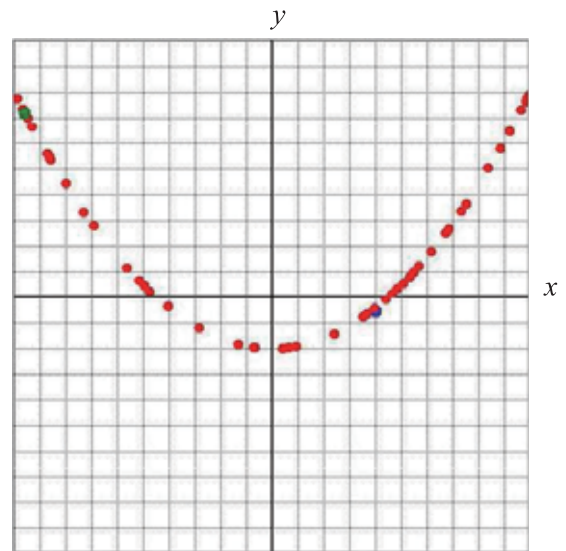


図13 2次関数グラフの描画(プロット点数: 50)

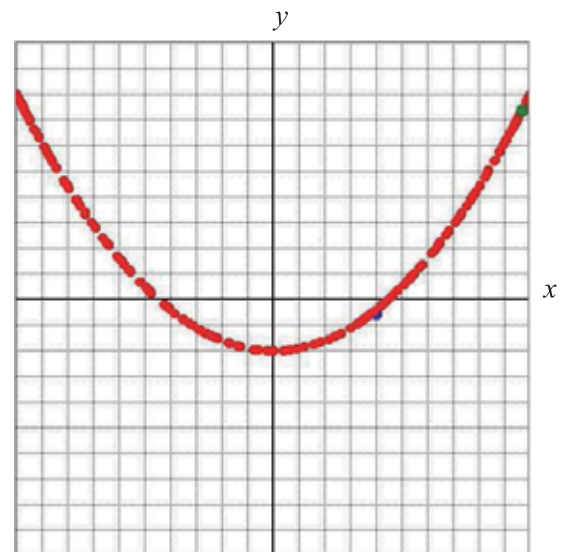


図14 2次関数グラフの描画(プロット点数: 200)

してシミュレーションを行った結果を掲げる。グラフ上の点がカオス状態で描画され、その結果としての放物線が現れる。

3.2 テニスのラリーシミュレーション

本シミュレーションは、テニスのラリーにおけるボールの軌跡の表示にロジスティック写像を応用し、カオスを教材化するものである。学習者にとって身近で興味・関心の高い内容を取り上げることを通して、カオスについての理解を深めることを目的として開発した。

ロジスティック写像を通して発生させた x_t の値を、以下の手順でボールの初速度 v_t の決定に適用し、カオスをボールの軌跡から視覚的に提示することを実現した。

$$|v_t| = (ax_t + b) \quad (4)$$

$$|v_t|_x = (ax_t + b) \cos\left(\frac{cx_t + d}{180} \pi\right) \quad (5)$$

$$|v_t|_y = (ax_t + b) \sin\left(\frac{cx_t + d}{180} \pi\right) \quad (6)$$

ここで、 $|v_t|_x$ はボールの初速度の x 成分、 $|v_t|_y$ はボールの初速度の y 成分、 a, b, c, d は、 $0 \leq x_t \leq 1$ で発生する x_t に基づいて決定する初速度 v_t を、設定したコートの長さやネットの高さに応じた変域に設定する際の係数である。なお、ボールのはね返り係数は 0.8 に設定している。

λ 値のチューニングにより、カオスだけでなく収束・周期もボールの軌跡に反映させることができる。ボールの軌跡を残すとともに、速度の変化に応じてボールの色を変え、ラリーの様子を容易に把握できるようになっている。 λ 値の設定のみで各種のラリーを表示できる点が、本シミュレーションの特徴である。

図 15 に、 $\lambda = 4$ 、 $x_0 = 0.4$ の設定に対するシミュレーションの結果を掲げる。一定の範囲のなか(テニスコート内)で同じ軌跡を繰り返すことなくラリーが続き、カオス状態にある x_t の挙動が、ボールの軌跡に反映されている。 x_0 にわずかな差を与え、シミュレーション結果を比較すれば、初期値敏感性もボールの軌跡に反映可能である。

図 16 は、 $\lambda = 2$ の設定に対するシミュレーション結果である。 x_t の挙動が収束状態にあるため、同じ軌跡が繰り返される。

図 17 は、 $\lambda = 3.1$ の設定に対するシミュレーション結果である。2 周期のラリーを表している。2 種類の軌跡を繰り返しており、ラリーを繰り返すごとに軌跡が規則的に左に移動している。ラケットの画像が同じ高さで左に移動していることから軌跡の移動が把握できる。

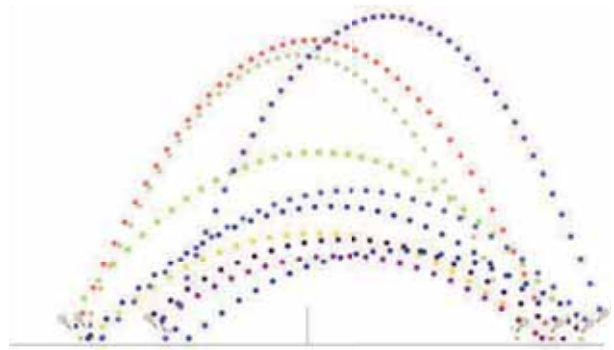


図 15 テニスのラリーシミュレーション（カオス）



図 16 テニスのラリーシミュレーション（収束）

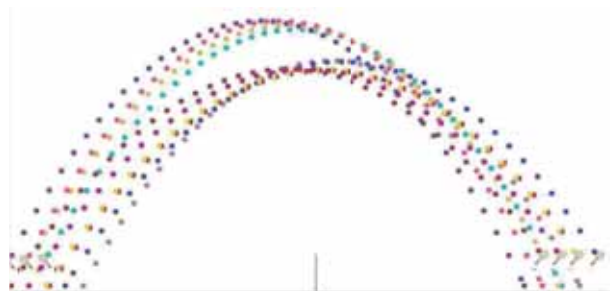


図 17 テニスのラリーシミュレーション（周期）

4. おわりに

本研究では、カオスの普通教育段階における科学技術教育への導入を目的として、カオスを計算科学の主要な手段であるコンピュータシミュレーションを通して提示する教材の開発を行った。開発した教材は、カオスの典型であるロジスティック写像を、2次元グラフ表示を通してシミュレートするとともに、それを関数グラフの描画及びテニスのラリーにおけるボールの軌跡の表示に応用するものである。

2次元グラフ表示シミュレーションは、任意のパラメータ設定に対するシミュレート機能を有しており、カオスが呈する複雑な挙動（非収束性、非周期性、非発散性）及び初期値敏感性に関する学習を、多数の具体例に基づいて展開することが可能である。また、グラフ描画シミュレーション

ョンを適用すれば、従来の関数グラフの学習過程のなかにカオスを導入可能である。さらに、テニスのラリーシミュレーションは、簡単な設定操作で各種のラリー表示が可能であり、学習者の興味・関心とカオスの関連付けを通して、カオスに関する理解が促進されるものと考えられる。

今後の課題としては、学習者の視点からのソフトウェアの改良、開発した教材を適用した学習指導法の検討及びそれに基づく検証授業とその評価があげられる。

文 献

- 1) 小柳義夫：ハイパフォーマンスコンピューティングによる計算科学の歴史・現状・展望, 応用物理, 第80巻, 第7号, pp. 557-559 (2007)
- 2) 小柳義夫, 中村 宏, 佐藤三久, 松岡 聡：スーパーコンピュータ (計算科学), 岩波書店 (2012)
- 3) 稲垣惇史, 原田二郎, 前原俊信：電位を3次元でイメージさせる電気回路シミュレーターの開発, 日本理科学教育学会全国大会発表論文集第3号, p. 364 (2005)
- 4) 久保田善彦, 山下淳, 奥村信太郎, 葛岡英明, 加藤浩：太陽系シミュレーションを利用した月の満ち欠け学習の実践と効果, 科学教育研究, Vol. 31, No. 4, pp. 248-256 (2007)
- 5) 林丈晴, 海老原理徳, 山本利一：引張試験の学習を支援するシミュレーション教材の開発と指導内容の検討, 日本産業技術教育学会誌, 第53巻, 第3号, pp. 187-194 (2010)
- 6) 新地辰朗, 西村治彦：科学教育のためのセルオートマトンを題材にした情報実験の考案, 科学教育研究, Vol. 23, No. 2, pp. 89-97 (1999)
- 7) 橋本広之, 道法浩孝：科学技術教育教材としてのカオスシミュレーションの開発, 日本産業技術教育学会第27回四国支部大会講演要旨集, p. 17 (2011)
- 8) ニーナ・ホール, 宮崎忠：カオスの素顔, 講談社 (1997)
- 9) 科学シミュレーション研究会：パソコンで見る複雑系・カオス・量子, 講談社 (1997)
- 10) 竹山協三：カオスー自然の乱れ方ー, 裳華房 (1998)