

論文

光導波路内部を伝搬する微弱光の波形解析

A waveform analysis of weak optical fields propagating in a waveguide

北川 晃 (高知大学教育学部)
和久井 健太郎 (情報通信研究機構)

KITAGAWA Akira¹ and WAKUI Kentaro²

1 Faculty of Education, Kochi University

2 National Institute of Information and Communications Technology

ABSTRACT

We theoretically study quantum optical representation for electromagnetic fields of TE modes in the step-index optical waveguides. Our scheme gives propagation properties of a weak optical signal at a single-photon level in the waveguides assuming that the optical fields are in the coherent state with a small amplitude, while expectation values for electromagnetic fields in the larger amplitude coherent state correspond to those obtained using classical electromagnetism. By applying the beam propagation method, we also investigate numerically how waveforms of such weak optical fields propagate in a straight or tapered waveguide under multimode and/or single-mode conditions. Our method not only helps to understand propagation properties of non-classical light in the waveguides, but also to design a practical interface device for such non-classical light enabling to efficiently couple waveguides with different core sizes.

1 はじめに

現代の情報化社会は、この世で最も速く伝搬する光を信号として通信を行うことで成り立っている。現在最も広く使われている光通信路は高純度の石英（ガラス）を用いて実現されており、コア領域の屈折率をその周りのクラッド領域よりわずかに高くすることで（ステップ型構造）、光信号を全反射により閉じ込めて伝搬させる。光とは、狭義では400nm～800nm程度の波長を持つ可視光を指すが、本稿ではより一般的にとらえて、電磁波と同じ意味で用いている。光通信路はこうした電磁波を伝搬させる装置であるため、光導波路とも呼ばれているが、特に円対称の構造を持つものを光ファイバと呼ぶ。

高純度の石英を用いた長距離通信用の光導波路では、通信波長帯（波長1.55 μm ）の電磁波に対して、その損失特性が理論限界である0.2dB/km（100km伝搬して信号強度が1/100）に達しつつある段階まで開発が進められてきた。また信号が失われないために、途中で増幅過程を用いることで、精度の高い光情報通信網が構築されている。こうした通常の光通信で用いられる電磁波は、一定強度をもつことが想定されており、古典電磁気学を用いてよく説明できている [1, 2]。

一方、光の強度を弱めていくと、波動としての性質に加えて、粒子すなわち光子としての性質が顕著になる。こうした微弱な光のふるまいは量子光学を用いて記述できる [3]。近年では、このような光の量子性を利用した量子通信技術の研究が精力的に行われており、量子暗号（量子鍵配送）のような量子情報プロトコルが提案されている [4]。

このような量子情報プロトコルの実証では、空間光学系に加えて、石英系光導波路がしばしば用いられる。ここで、光信号には光子一個程度の微弱光が用いられるため [5]、光導波路のコアからクラッドにわたって分布する光電場（波動関数）の平均光子数も一個以下となる。これは、光子がコアまたはクラッドに確率的に分布していると解釈することができる [6]。なお、こうした量子情報プロトコルでは、光の量子的な性質（量子情報）が失われてしまうため増幅過程を用いることができないなど、通常の光通信とは大きく異なる特徴が知られている [7]。

ステップ型屈折率分布を持つ光導波路は、長手方向については一様な構造が想定されており、内部を伝搬する電磁波の伝搬特性の解析では、その波形が定常状態であることを前提に行われることが一般的である。こうした場合については、古典電磁気学の範囲内では解析的な手法を用いて詳細に調べられており [1, 2]、また量子光学的な取り扱いについては、文献 [6] で扱われている。

これに対して、光導波路内部の電磁波が定常状態とな

らない場合には、解析的な手法を適用することが困難となる。具体的には、

- 光導波路が電磁波の伝搬方向に一様でない
- 導波路内部に不規則な欠陥が存在する
- 一つの導波路が分岐する
- 二つの導波路が結合する際、コアの中心がずれている
- コア幅が一定のテーパ角で変化する（テーパ光導波路）

などといったケースが考えられる。またその他に、長手方向の導波路構造が一様であっても、入射電磁波の分布が定常状態から大きくずれている場合もこれに含まれる。電磁波を古典的に扱う場合については、様々な数値的な方法を用いて解析が行われている [8, 9]。

本稿では、光導波路内部における微弱な電磁波について、非定常状態も取り扱える量子論的な表現を与え、物理的な意味との対応を議論する。特に電磁波がコヒーレント状態にある場合について、今回与えた電磁場の表現が古典的な表現と矛盾のないことを示す。また電磁波が満たすべき方程式を数値的な手法で解析することにより、光導波路における電磁波がどのように発展していくかを調べる。光導波路の形状については、長手方向に一様な構造の他に、一様なテーパ角でコア径が変化するテーパ（逆テーパ）構造についても調べる。また電磁波波形の発展の様子がテーパ角に依存して影響を受けることについても言及する。

2 電磁波の量子論的表現

最初に、一様な構造の誘電体中を伝搬する電磁波の量子論的な表現 [3] について、まとめる。光導波路内部を伝搬する電磁波の様子については、次節で考察する。電磁波を構成する電場 $\hat{\mathbf{E}}$ 、磁場 $\hat{\mathbf{H}}$ に対応するベクトルポテンシャルを $\hat{\mathbf{A}}$ とおけば、電磁場はクーロンゲージの下で

$$\hat{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \hat{\mathbf{A}}}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\hat{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \hat{\mathbf{A}} \quad (2)$$

のように記述できる。ここで μ_0 は真空中の透磁率である。また $\hat{}$ (ハット) 記号は量子論的な演算子を表すが、物理量と対応づけられるためにベクトルポテンシャルはエルミート演算子でなければならない。

ベクトル解析の公式を用いることにより、媒質中に電荷分布や電流がない場合の Maxwell 方程式のうち、

$$\nabla \times \hat{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \hat{\mathbf{B}}}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{B}} = 0, \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{D}} = 0 \quad (5)$$

が成り立つことは明らかである。ここで $\hat{\mathbf{D}} = \varepsilon \hat{\mathbf{E}}$ は電束密度を表す演算子であり、 ε は媒質中における誘電率である。また $\hat{\mathbf{B}} = \mu_0 \hat{\mathbf{H}}$ は磁束密度に対応する演算子を表す。誘電体中での透磁率は、真空中の値とほぼ等しいとみなす ($\mu = \mu_0$) ものとする。

残りの Maxwell 方程式

$$\nabla \times \hat{\mathbf{H}} = \frac{\partial \hat{\mathbf{D}}}{\partial t} \quad (6)$$

より、ベクトルポテンシャルが満たすべき方程式が導かれる。

$$\nabla^2 \hat{\mathbf{A}} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \hat{\mathbf{A}}}{\partial t^2} = 0, \quad (7)$$

ここで n は屈折率であり、元々電磁波と誘電体の相互作用を巨視的な視点から特徴付ける量として導入されたものであるが、量子論的な視点からも矛盾なく記述できる [6]。 c を真空中の光速とすると、

$$\sqrt{\varepsilon \mu_0} = \frac{n}{c} \quad (8)$$

の関係が成り立つ。

ベクトルポテンシャルが $\hat{\mathbf{A}} \propto T(t) \hat{\Psi}(\mathbf{r})$ のように時間と空間に依存する部分に分離できると仮定すると、

$$\frac{1}{n^2} \frac{\hat{\Psi}(\mathbf{r})}{|\hat{\Psi}(\mathbf{r})|^2} \cdot \nabla^2 \hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c^2} \frac{1}{T(t)} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}. \quad (9)$$

左辺は空間 \mathbf{r} のみの関数、右辺は時刻 t のみの関数であるから、この等式が成り立つためには、両辺が定数に等しいことが必要である。この定数を $-k_0^2 < 0$ とおくと、

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} = -\omega^2 T(t), \quad (10)$$

$$\nabla^2 \hat{\Psi}(\mathbf{r}) = -n^2 k_0^2 \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \quad (11)$$

のように時間依存部分と空間依存部分を分離することができる。ここで k_0 を電磁波の真空中における波数であると考えれば、 $\omega = ck_0$ は角振動数に対応している。これらのパラメータは、電磁波が通過する媒質により変化しない [10] ので、電磁波を普遍的に特徴付けていると考えられる。時間依存部分については、(10) 式より

$$T(t) \propto \exp(\pm i\omega t) \quad (12)$$

であることがわかる。また空間依存部分については、媒質中に損失がないと仮定すれば、屈折率 n および波数 k_0 は実数で表される。(11) 式のエルミート共役をとると、

$$\nabla^2 \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) = -n^2 k_0^2 \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \quad (13)$$

が成り立ち、 $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ と $\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})$ は同じ微分方程式を満たすことがわかる。これらより、ベクトルポテンシャルがエルミート演算子になるように構成すれば、

$$\hat{\mathbf{A}} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}} \left[\exp(i\omega t) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) + \exp(-i\omega t) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \right] \quad (14)$$

と書くことができる。ここで \mathcal{N} は規格化因子であり、後に適切に定める。このベクトルポテンシャルを (1) 式および (2) 式に代入することで、電磁場の演算子 $\hat{\mathbf{E}}$ および $\hat{\mathbf{H}}$ が得られる。

$$\hat{\mathbf{E}} = -i \frac{\omega}{\sqrt{\mathcal{N}}} \left[\exp(i\omega t) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) - \exp(-i\omega t) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \right], \quad (15)$$

$$\hat{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu_0 \sqrt{\mathcal{N}}} \left\{ \exp(i\omega t) \left[\nabla \times \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \right] + \exp(-i\omega t) \left[\nabla \times \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \right] \right\}. \quad (16)$$

次に演算子 $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ の表現について考える。電磁波と物質の相互作用は、電磁場の一次に比例する効果が支配的である [3]。これは電磁波の基本構成単位である光子が一個ずつ生成される、もしくは消滅する過程に対応する。ここでは非線形効果を考えないものとする、演算子 $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ は光子の生成・消滅演算子に比例すると考えるのが適当である。

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \hat{a}, \quad \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) = \mathbf{F}^*(\mathbf{r}) \hat{a}^\dagger, \quad (17)$$

ここで $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ は複素数を成分に持つ三次元ベクトルであり、また生成・消滅演算子は交換関係

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] \equiv \hat{a} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a} = 1 \quad (18)$$

を満たす。関数 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ は電磁波が伝搬する領域の構造により決まる。本節で考えている一様な構造の場合は解析的に解くことができ、直進する電磁波に対応する表現が得られる。

3 光導波路内部の電磁波

本節では、全反射によりコア領域に閉じ込められながら伝搬する電磁波を考える。ここでは、コア・クラッドの境界面が平面構成されるようなスラブ（方形）導波路を考える（図 1）。光導波路は誘電体によるステップ型屈折率分布を持つ構造である場合を考え、コア・クラッド

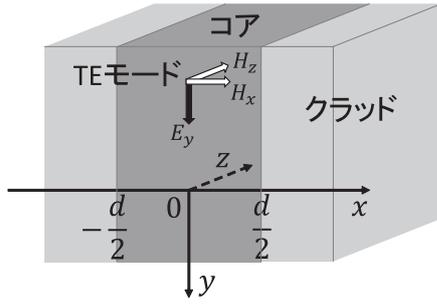


図 1: スラブ (方形) 導波路とその内部を伝搬する TE モードの電磁波の概念図.

ドの各領域において誘電率は一定であると仮定する。コア・クラッドの境界面に垂直な方向に x 軸，電磁波の伝搬方向に z 軸を取り，これらの軸に垂直となるように y 軸を取る。コアの幅 d は，一般に z 軸に沿って変化するものの， y 軸方向の構造は一樣であるとする。

光導波路内部を伝搬する電磁波のうち，電場の z 軸方向の成分がゼロである場合を考える。これは TE モードと呼ばれ，電磁場の成分について， $E_x = H_y = E_z = 0$ が成り立つ。ここで (1) 式より $\hat{\mathbf{A}} \parallel \hat{\mathbf{E}}$ であることを考慮すれば，ベクトルポテンシャルを表す演算子は

$$\hat{\mathbf{A}} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}} \left[\exp(i\omega t) F_y^*(x, z) \hat{a}^\dagger + \exp(-i\omega t) F_y(x, z) \hat{a} \right] \mathbf{e}_y \quad (19)$$

とおくことができる。ここで $F_y(x, z)$ はベクトル $\mathbf{F}(x, z)$ の y 成分， \mathbf{e}_y は y 軸方向の単位ベクトルを表す。また y 軸方向の一樣性より， y に関する依存性がないことに注意されたい。以降，混乱のない限り， $F_y(x, z)$ の引数を省略することがある。

(19) 式を (1), (2) の両式に代入すれば，TE モードの電磁場に対応する演算子が

$$\hat{\mathbf{E}} = -i \frac{\omega}{\sqrt{\mathcal{N}}} \left[\exp(i\omega t) F_y^* \hat{a}^\dagger - \exp(-i\omega t) F_y \hat{a} \right] \mathbf{e}_y, \quad (20)$$

$$\hat{\mathbf{H}} = -\frac{1}{\mu_0 \sqrt{\mathcal{N}}} \times \left\{ \left[\exp(i\omega t) \frac{\partial F_y^*}{\partial z} \hat{a}^\dagger + \exp(-i\omega t) \frac{\partial F_y}{\partial z} \hat{a} \right] \mathbf{e}_x - \left[\exp(i\omega t) \frac{\partial F_y^*}{\partial x} \hat{a}^\dagger + \exp(-i\omega t) \frac{\partial F_y}{\partial x} \hat{a} \right] \mathbf{e}_z \right\} \quad (21)$$

のように得られる。これらを用いて，光導波路内部の電磁波のハミルトニアンは

$$\hat{\mathcal{H}} = \int_V \left[\frac{n^2 \epsilon_0}{2} |\hat{\mathbf{E}}_y|^2 + \frac{\mu_0}{2} (|\hat{H}_x|^2 + |\hat{H}_z|^2) \right] dV \quad (22)$$

と与えられる。回転波近似 [3] を用いて微小項を無視し，

$$\mathcal{N} = \frac{1}{\hbar \omega} \int_V \left[n^2 \omega^2 \epsilon_0 |F_y|^2 + \frac{1}{\mu_0} \left(\left| \frac{\partial F_y}{\partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial F_y}{\partial x} \right|^2 \right) \right] dV \quad (23)$$

となるように規格化すれば，

$$\hat{\mathcal{H}} = \hbar \omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \quad (24)$$

が得られる。ここでの変形で，(18) 式を用いた。 \hbar はプランク定数であり， $\hbar \omega$ は光子一個のエネルギーを表す。 $\hat{a}^\dagger \hat{a} \equiv \hat{n}$ は体積 V 中に含まれる光子数に対応する演算子であるから，(24) 式は光導波路内部に存在する光子の持つエネルギーの総量に対応する演算子であることがわかる。

電磁波の状態として，特にコヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ を考える。コヒーレント状態で (20) 式および (21) 式の期待値を取れば，電磁場は

$$\mathbf{E} = -i \frac{\omega}{\sqrt{\mathcal{N}}} \left[\exp(i\omega t) F_y^* \alpha^* + \exp(-i\omega t) F_y \alpha \right] \mathbf{e}_y, \quad (25)$$

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{\mu_0 \sqrt{\mathcal{N}}} \times \left\{ \left[\exp(i\omega t) \frac{\partial F_y^*}{\partial z} \alpha^* + \exp(-i\omega t) \frac{\partial F_y}{\partial z} \alpha \right] \mathbf{e}_x - \left[\exp(i\omega t) \frac{\partial F_y^*}{\partial x} \alpha^* + \exp(-i\omega t) \frac{\partial F_y}{\partial x} \alpha \right] \mathbf{e}_z \right\} \quad (26)$$

と表される。ここでコヒーレント状態が消滅演算子の固有状態であること ($\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$) と，コヒーレント状態の規格化条件 ($\langle \alpha | \alpha \rangle = 1$) を考慮した。コヒーレント状態は最小不確定状態であり，実際には通常のレーザー光を単一光子レベルまで弱めることで生成できる，最も古典に近い光の量子状態である [3]。これより (25) および (26) の両式は，古典的な電磁場表現に対応しているといつてよい。

コヒーレント状態の光子数の期待値が $\langle \alpha | \hat{n} | \alpha \rangle = |\alpha|^2$ であることから，ハミルトニアン (24) 式の期待値は

$$\mathcal{E} = \langle \alpha | \hat{\mathcal{H}} | \alpha \rangle = \hbar \omega \left(|\alpha|^2 + \frac{1}{2} \right) \quad (27)$$

となる。この量は体積 V 中に含まれる光子が持つエネルギー総量の期待値に相当する。また $|F_y(x, z)|$ は，空間内に光子がどのような密度で分布しているかに関連する関数であると考えられる。もしコヒーレント状態の振幅

が十分小さい場合、例えば $|\alpha| \lesssim 1$ の場合、光導波路内部に存在する光子の数は一個未満でありながら、コアとクラッドにわたって分布することになる。光子は分割できない素粒子であるため、光子はコアもしくはクラッドのどちらかに存在するが、この場合 $|F_y(x, z)|$ は光子が存在する確率の空間分布に関する関数であると考えられる。この点については次節で検討する。

電磁場の様子は、関数 $F_y(x, z)$ を求めることで具体的に書き下せる。(11) 式より、 $F_y(x, z)$ は

$$\left(\frac{\partial^2 F_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial z^2} \right) = -n^2(x) k_0^2 F_y \quad (28)$$

なるヘルムホルツ方程式を満たす。ここで $n(x)$ は屈折率の空間分布を表す関数で、ステップ型の屈折率分布の場合は

$$n(x) = \begin{cases} n_1 & (|x| \leq \frac{d}{2}) \\ n_2 & (|x| > \frac{d}{2}) \end{cases} \quad (29)$$

と書ける。

電磁波が定常状態にある場合は、さらに変数 x と z の依存性を変数分離することで、解析的に解くことができる [2]。しかしながら、より一般的な非定常的な場合には、この手法を使うことができない。そこで数値的な手法により (28) 式を解くことを考える。光が全反射により導波されるためには、 z 軸方向の波数成分が $n_2 k_0 < \beta < n_1 k_0$ を満たす必要がある [2]。また今回はコア・クラッドにおける屈折率差が非常に小さい場合を考えているので、伝搬する電磁波の z 軸方向の波数（伝搬定数）は $\beta \simeq n_r k_0$ であると考えられる。ただしここで $n_r = \xi n_1 + (1-\xi) n_2$ ($0 < \xi < 1$) は参照屈折率（平均的な屈折率）を表す。

この伝搬定数を用いて、

$$F_y(x, z) = \exp(in_r k_0 z) \tilde{F}_y(x, z) \quad (30)$$

のように変数変換することを考える。関数 $F_y(x, z)$ の位相項は波長の大きさ程度の周期で激しく振動するが、振動部分を (30) 式のように分離することで、振動の包絡線に沿って緩やかに変化する $\tilde{F}_y(x, z)$ を取り出している。(30) 式を (28) 式に代入して微小項を無視すれば、

$$-2in_r k_0 \tilde{F}_y = \frac{\partial \tilde{F}_y}{\partial x^2} + [n^2(x) - n_r^2] k_0^2 \tilde{F}_y \quad (31)$$

が得られる。ここで用いた近似の結果、偏微分方程式が楕円型から放物型のものに変換されるため、効率よく解析を行うことができることが特長である。この手法はビーム伝搬法と呼ばれ、従来より古典的な手法において光導波路の断面構造が一定でない場合の解析に広く用いられているものである [8, 9]。

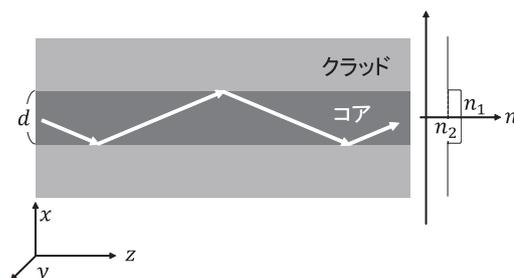


図 2: コア幅が一定のスラブ型導波路。 y 軸方向および z 軸方向には一様な構造であるとし、コア幅を d 、コアの屈折率を n_1 、クラッドの屈折率を $n_2 (< n_1)$ とする。

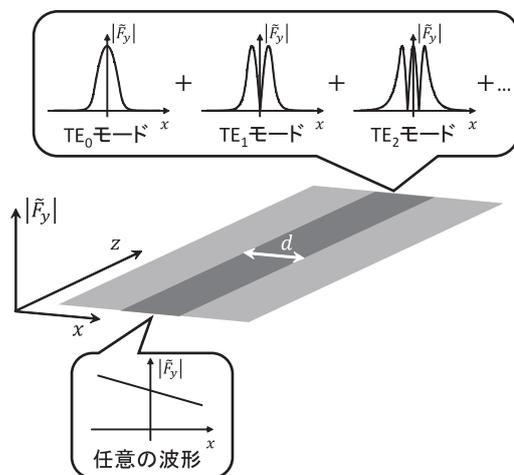


図 3: 導波路内部における導波モードの波形。

4 ビーム伝搬法による導波路解析

この節では、コア幅が不変の光導波路と、一定のテーパー角でコア幅が変化する光導波路について、(31) 式を数値的に評価することで、光導波路内部の電磁波の様子を調べる。なお数値解析では、フリーソフトウェアの Scilab 5.5.2 [11] を用いて計算コードを作成している。

4.1 コア幅が一定の光導波路

図 2 にコア幅が一定の光導波路の概念図を示す。コアとクラッドの屈折率境界面において、電磁波は全反射しながら伝搬する。ここで電磁波は図 1 と同様に z 軸方向に伝搬するものとし、屈折率境界面と垂直方向に x 軸を取る。またこれらの双方に垂直な y 軸方向には一様な構造であると仮定する。コアの幅を d とし、コアの中央に x 軸の原点を取る。

導波路内部においては、任意の波形の電磁波を入射させても、断面積上で適当な境界条件を満たす波形、すなわち $TE_0, TE_1, TE_2 \dots$ といった特定のモードのみが

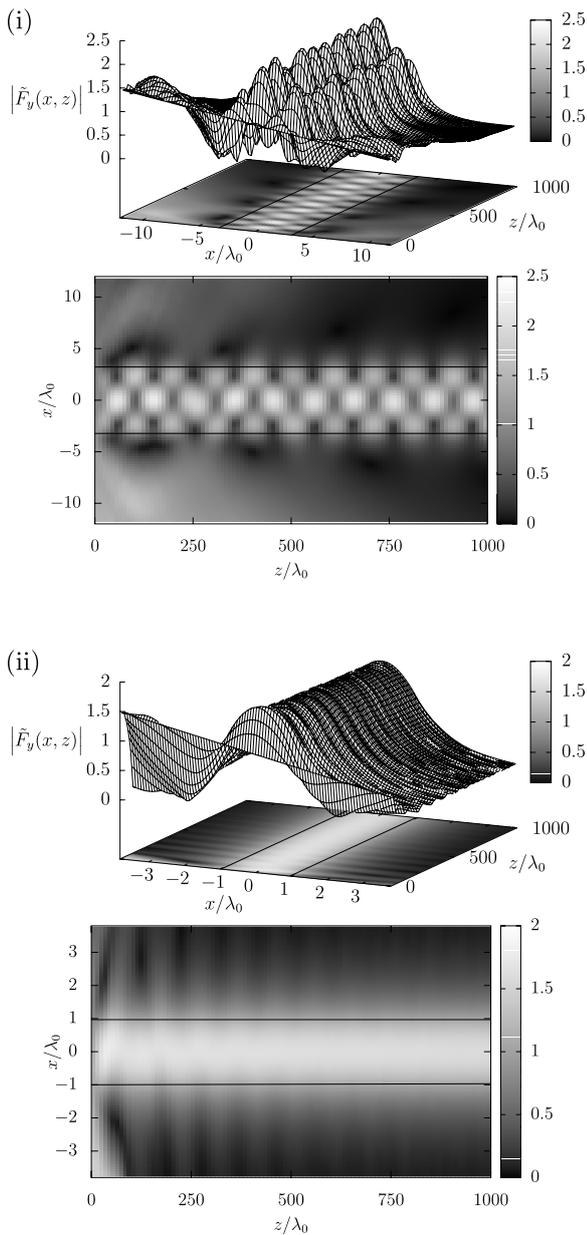


図 4: 伝搬方向に均一な構造の光導波路内部の電磁波の数値解析結果. (i) : $d = 10\mu\text{m}$, (ii) : $d = 3\mu\text{m}$.

存在することができる [2]. 最終的には最低次モードのみ、もしくはそれより高次のモードと混合した波形に収束する (図 3).

ビーム伝搬法を用いて、(31) 式を数値的に解析した結果を図 4 に示す. コア幅を $d = 10\mu\text{m}$ および $3\mu\text{m}$ とし、その他のパラメータは以下の通りである.

- 電磁波の波長 : $\lambda_0 = 1.55\mu\text{m}$
- コア屈折率 : $n_1 = 1.45$
- クラッド屈折率 : $n_2 = 1.4355$

入射波形は、 $|\tilde{F}_y(x, 0)|$ が x の一次関数となるように与

えており、空間的に非対称な分布の電磁場が入射する場合を考えている. このような初期波形を与えることにより、様々なモードが現れうる状況を考えることができる. また数値計算の便宜上、断面積方向の解析領域は $-2d \leq x \leq 2d$ としているが、この領域の端において生ずる反射を防ぐために、透過境界条件 [8, 9] を考慮している. なお、以降の結果では便宜的に垂直軸 $|\tilde{F}_y(x, z)|$ に数値を与えてあるが、電磁場は (23) 式により規格化されるべき量であることに注意されたい.

図 4 において、 xz 平面の色の濃淡は $|\tilde{F}_y(x, z)|$ の分布に対応しており、実線はコア・クラッド境界を表している. それぞれの場合について、電場がコア内部に沿って伝搬されている様子が見られる. クラッド領域に見られる電磁場成分はエバネッセント場 (近接場) [2] と呼ばれるもので、おおよそ波長程度の距離まで浸透していることがわかる.

前述の通り、 $|\tilde{F}_y(x, z)|$ は光の空間分布に関連する関数であるが、ここで得られた結果はコヒーレント状態の振幅 α の値に寄らず成り立つものである. $|\alpha|$ が十分大きい場合は、コア部分に電磁波の大部分が局在しており、クラッドに電磁波の一部が浸みだしている状況に対応する. $|\alpha| \lesssim 1$ の場合は、導波路内部の光子数の期待値が一個未満となるが、内部において光子の測定ができたとすると、コアもしくはクラッドのどちらかに光子が一個検出されると考えられる. この場合は $|\tilde{F}_y(x, z)|$ が光子の存在する確率に関連した分布関数であると解釈できる. クラッド領域よりコア領域の方が $|\tilde{F}_y(x, z)|$ の値が大きいが、これは光子がクラッドよりもコアの領域に存在する確率が高いことを意味している. また $d = 10\mu\text{m}$ (図 4(i)) の場合において、 $|\tilde{F}_y(x, z)|$ の値が z 軸方向に周期的に変化しているが、これは光子の存在確率が空間的に振動しながら、伝搬する描像でとらえることができる.

導波されるモードの数は、コア幅によって制限される. コア幅 d が

$$\frac{m\pi}{2} \leq \frac{\pi d}{\lambda_0} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} < \frac{(m+1)\pi}{2} \quad (32)$$

を満たすとき、第 $0 \sim m$ 次のモードが存在しうる [2]. この条件より、 $d = 10\mu\text{m}$ (図 4(i)) の場合については、第 $0 \sim 2$ 次のモードが存在するが、数値計算結果より、これらのモード固有の波形が混在している様子が見られる. これは、 z 軸方向の振動数の違いにより、モード間で干渉 (うなり) が生ずることに起因する [1]. 一方 $d = 3\mu\text{m}$ (図 4(ii)) のときは第 0 次モードのみの場合に当たる. 今回得られた数値計算結果においても、波形が単一のモードに収束しており、シングルモード動作が実現されていることが確認できる.

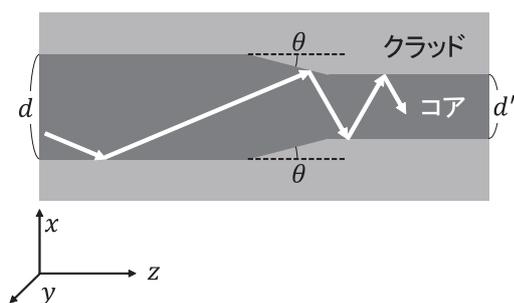


図 5: テーパー光導波路の構造. コア幅が d から一定のテーパー角 θ で変化し, 最終的に d' になる.

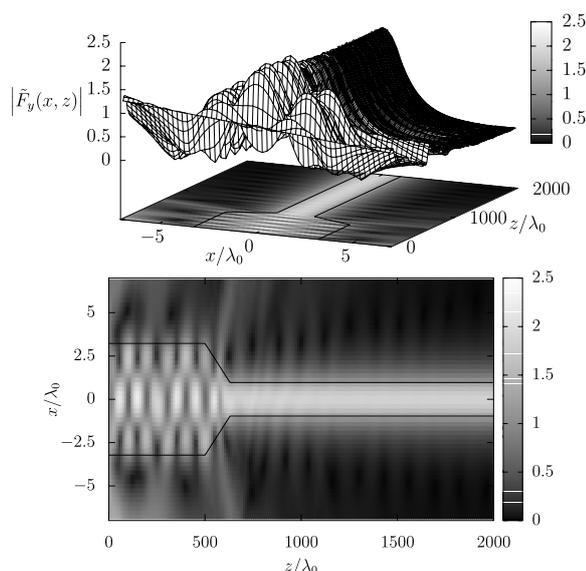


図 6: テーパー構造光導波路内部の電磁波の数値解析結果. コア幅 $d = 10\mu\text{m} \rightarrow d' = 3\mu\text{m}$, テーパー角 $\theta = 1^\circ$. xz 平面上の実線はコア・クラッド境界線を示す.

4.2 コア幅が変化する光導波路

次に, コア幅が一定でない場合について考察する. 図 5 にコア幅が一定のテーパー角 θ で変化する構造 (テーパー光導波路) を示す. テーパー角 $\theta > 0$ のとき, 電磁波が伝搬するに伴ってコア幅は狭くなり (テーパー構造), 逆に $\theta < 0$ のときはコア幅は広がる (逆テーパー構造). このようにコア幅が変化する場合には, ビーム伝搬法による解析が特に有効である [8, 9].

図 6 に, コアの初期幅 $d = 10\mu\text{m}$ からテーパー角 $\theta = 1^\circ$ でコア幅が $d' = 3\mu\text{m}$ まで狭くなる場合の結果を示す. 電磁波の波長, 屈折率はコア幅が一定の場合と同じものを想定している. また初期波形も前節と同様に, 空間的に非対称な波形を入射させることで, 様々なモードが発生しうる状況を考えている. そのためコア幅が $d = 10\mu\text{m}$ の領域においては, 複数のモードが存在することが確認できるが, コア幅が $d' = 3\mu\text{m}$ の領域ではシングルモー

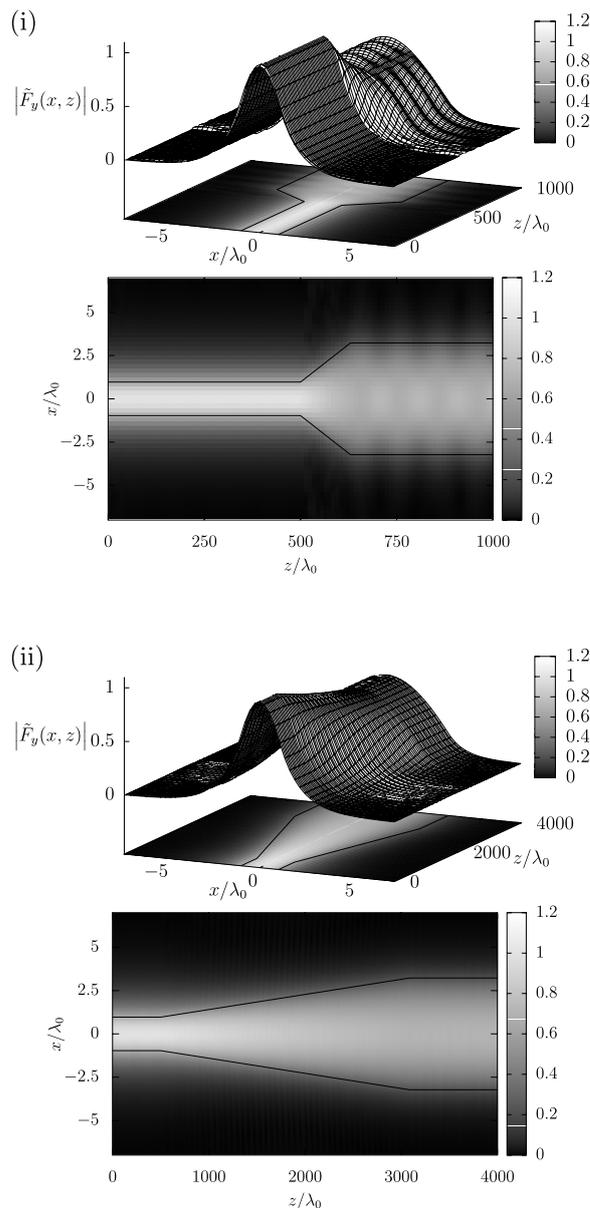


図 7: 逆テーパー構造光導波路内部の電磁波の数値解析結果. (i): コア幅 $d = 3\mu\text{m} \rightarrow d' = 10\mu\text{m}$, テーパー角 $\theta = -1^\circ$, (ii): コア幅 $d = 3\mu\text{m} \rightarrow d' = 10\mu\text{m}$, テーパー角 $\theta = -0.05^\circ$. xz 平面上の実線はコア・クラッド境界線を示す.

ド動作となるため, 最低次モードのみが伝搬する様子が見られる.

図 7(i) および (ii) に, それぞれテーパー角 $\theta = -1^\circ$ および $\theta = -0.05^\circ$ でコア幅が $d = 3\mu\text{m}$ から $d' = 10\mu\text{m}$ まで広がる場合についての結果を示す. 電磁波の波長, 屈折率は先の場合と同じである. 入射部分のコア幅 $d = 3\mu\text{m}$ の領域では, シングルモード動作をするため, 初期波形としては最低次モードの波形を入射している. $z/\lambda_0 \geq 500$ の領域において, コア幅が一定のテーパー角で $d' = 10\mu\text{m}$

まで広がるが、この領域において (i) の $\theta = -1^\circ$ 場合は複数のモードが混在している一方、(ii) の $\theta = -0.05^\circ$ の場合ではほぼ最低次モード単一の波形を保ったまま伝搬の様子が見られる。コア幅が広がることで、伝搬される電磁波モードの伝搬定数が変化を受けるため、より高次のモードが現れうる。ところがテーパ角を十分小さく取って、コア幅を断熱的に大きくすることにより、最低次の基本モードのみが存在する結果が得られている。実際には、ほんのわずかな擾乱（例えばコアにおける欠陥など）が存在するだけで高次モードに遷移しうるため、シングルモード動作領域より大きなコア幅において基本モードのみを導波させるのは、それほど容易ではない。

以上で見てきた結果において、テーパ角はコア幅が変化する領域での電磁波の損失の大きさに影響し、テーパ角が小さいほど損失が少なくなる。このふるまいは、テーパ角に対する断熱条件として知られている [12]。実際の実験では、光導波路（断面の一边がマイクロン～サブマイクロン）で生成した光子を、光ファイバ（直径 10 ミクロン程度）へ導波させたいケースがしばしば生ずる。通常、このようなケースでは光導波路-光ファイバ間にモード結合用の集光レンズを配置するが、高い導波効率を得るにはレンズ位置の精密調整が不可欠であり、熟練した技術を要する。また、当然ながらこの調整はコア幅が大きい方が容易となる。しかしながら図 4 で見たように、コア幅の広い導波路においては、様々なモードの電磁波が現れる。信号伝搬の観点から見た場合、異なるモードは信号の伝搬特性が異なる（モード分散）ため、可能ならばシングルモード動作が好ましい。そこで今回解析したテーパ構造を断熱的なモードコンバータとして用いることで、光導波路への導波効率の向上とシングルモード動作を両立する、高効率の導波機構が実現できると期待される。

5 まとめ

本稿では、誘電体中の電磁場に対する量子論的な表現について考察した。まず、ベクトルポテンシャルをエルミート演算子として与えることで、光導波路中の電磁場に対する量子論的な表現を導出した。次に、この表現をステップ型の屈折率分布を持つスラブ（方形）導波路構造に適用することで、導波路内を伝搬する電磁場表現を導出した。電磁場が振幅の大きなコヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ の場合には、期待値は古典的な電磁場表現に帰着する。一方コヒーレント振幅が小さい場合 ($|\alpha| \lesssim 1$) は導波路中の平均光子数が一個未満となり、光子は確率的にコアもしくはクラッドのいずれかにしか存在しないという非

古典的な状況が生ずる。これは、導波路内部の光子の非古典的なふるまいについて、さらなる考察を深める際の重要な手がかりとなる。

次に、導波路内部の電磁波の伝搬の様子を評価するため、ビーム伝搬法を用いて波形を数値的に解析した。ビーム伝搬法は古典的な導波路解析に用いられる手法であるが、微弱振幅を持つコヒーレント状態の場合についても適用可能である。電磁場の強度は導波路内部に存在する光子の数に比例するため、求めた波形は導波路内部に存在する光子の空間分布を与えているといえる。特に光が極端に微弱な場合、伝搬するのは単一光子であり、コア及びクラッドにおける単一光子の存在確率は空間的に振動する。コア幅が一定の構造の場合には、特定のモードの波形のみが定常状態に収束しながら伝搬する。コア幅に応じて存在しうるモードの数が決まるが、コア幅を特定の値より小さくすることで、単一のモードのみが伝搬するシングルモード動作が可能となる。

一方、コア幅が一定の角度で減少するテーパ構造の導波路においては、存在するモードの様子が変化しうる。入射領域のコア幅を比較的広くとると、最初は複数のモードが存在するが、テーパ構造によりコア幅をシングルモード動作領域まで減少させることで、最低次モードの単一波形のみを伝搬させることができる。光導波路を実際に制作することを考えた場合、このようなテーパ構造は、入射部分においては電磁波の導入を容易にしつつ、最終的にはシングルモード動作を実現させる装置として有効であると考えられる。逆に、コア幅が一定の角度で広がる逆テーパ構造の導波路においてはモードの数が増えうる。ただし、逆テーパ角を十分小さくとり、コア幅がシングルモード動作から十分ゆっくり広がる断熱的構造を考えた場合は、コア幅がシングルモード動作領域より広がった後も、光は最低次モードの波形を保ったまま伝搬される。しかしコア幅が広がった領域では、ほんのわずかな擾乱が高次のモードへの遷移を引き起こすため、非シングルモード領域における最低次モードのみの運用では、実装に際して注意が必要である。

本解析では、光導波路のコア幅が不変である場合と、コア幅が一定の角度で変化する場合を扱ったが、本手法は、より一般的にコア形状が変化する場合についても適用可能である。特に微弱光の伝搬では、光子が空間分布を確率的に変化させながら伝搬するという非古典的な状況が表出するため、近年開発された量子光学測定やイメージングと組み合わせることで、光子の伝搬特性や波動関数を自在に制御することも可能となる。このような観点から、本研究は導波路内部における非古典的な光のふるまいを理解し、制御するための重要な一歩であるといえる。

参考文献

- [1] A. W. Snyder and J. D. Love, “Optical Waveguide Theory,” Chapman and Hall (1983).
- [2] 左貝 潤一, 「導波光学」, 共立出版 (2004).
- [3] R. Loudon, “The Quantum Theory of Light 2nd Ed.,” Oxford (1983).
- [4] N. Gisin, G. Ribordy, W. Tittel and H. Zbinden, “Quantum cryptography,” Rev. Mod. Phys. **74**, 145 (2002).
- [5] 小芦 雅斗, 小柴 健史, 「量子暗号理論の展開」, サイエンス社 (2008).
- [6] A. Kitagawa, “Quantum description of electromagnetic fields in waveguides,” arXiv:1510.06836 (2015).
- [7] W. K. Wootters and W. H. Zurek, “A single quantum cannot be cloned,” Nature **299**, 802 (1982).
- [8] 山内 潤治, 藪 哲郎, 「光導波路解析入門」, 森北出版 (2007).
- [9] 左貝 潤一, 「光導波路の電磁界数値解析法」, 森北出版 (2015).
- [10] E. Hecht, “Optics 4th Ed.,” Pearson Education (2002).
- [11] Scilab の公式サイト : <http://www.scilab.org/>
- [12] S. Ravets, J. E. Hoffman, P. R. Kordell, J. D. Wong-campos, S. L. Rolston and L. A. Orozco, “Intermodal energy transfer in a tapered optical fiber: optimizing transmission,” J. Opt. Soc. Am. A **30**, 2361 (2013).