二次線型リスク・プログラミングによる収穫規整の基礎

坂　本　　格
（農学部森林計測学研究室）

Fundamentals of Forest Regulation by Quadratic Linear Risk Programing

Tadashi SAKAMOTO
Laboratory of Forest Bio- and Econo-metrics, Faculty of Agriculture

Abstract : This study is related to the multistage risk programming techniques for forest regulation. The basic programming model by Sakamoto contains a target function as (5), where the utility of expected revenue is expressed by the summention of exponential functions. Therefore, the calculation of this programming is considerably complicated. In order to overcome this difficulty, the basic model is converted into a quadratic linear one, where constraints are (9) and minimand (11). Because this target function is simplified and composed of the sum of expected revenue variances, the facility of programming is far advanced.

緒　　言

坂本は，林業経営における意志決定のために，不確実性，保続性および収益性を統一評価する，自己完結的なリスク・プログラミングの方法を提示した[1]。その中で，輪伐期決定問題をとりあつかったモデルのように，単一期間の決定にかかわるものとして擬制できる場合においては，Freund のモデル[2]と同様にして，かなり容易にプログラミングの解を求めることができる。しかしながら，各期の経営の情況が等しくないという，一般的な多期間にわたる収穫規整の問題をとりあつかったモデルにおいては，リスク・プログラミングの目的関数がかなり複雑な指数関数になる関係上，解を求めることが必ずしも容易であるとはいえない。

そこで，この論文においては，収穫規整問題をとりあつかう坂本のリスク・プログラミングの方法に，解法上の容易さを与えることを目的として，このモデルをいわゆる二次線型の形に変換することを試る。

問　題　点

ここにとりあげる収穫規整のリスク・プログラミング・モデルにおける解法上の問題点が，具体的にどこにあるかということをまず明らかにしておかなければならない。したがって，ここでは既報の坂本のモデル[3]の概要について記述することから始めよう。

この方法は，プログラミングの過程に最終的な最適計画の選好手続きまでを含んでいることを大きな特色としている。そこでは，経営の追求する収益を確率変量としてとらえ，収益の変動が大きいほど，それによってもたらされる主体的効用が割引いて評価される。すなわち，収益の保続不安定性および不確実性はリスク——危険として統一され，さらに収益性とともに主体的効用を形成するのである。

さて，問題とする多期間の収穫規整モデルの目的関数を，さきのような考え方のもとに導いてみる。

いま，計画期間が T 期にまでわたるものとし，経営全体の林分のとりあつかいにかかわる任意の一方式に対応する各期の収益が，それぞれ正規分布する確率変量であるとする。

計 画 期：1，2，……，t，……，T

方式収益：r_1，r_2，……，r_t，……，r_T

ただし，r_t の期待値 μ_t，分散 σ_t として，　$N(\mu_t,\ \sigma_t^2)$

ここにおいて，t 期の収益の実現する確率は，

$$Y_t=\frac{1}{\sigma_t\sqrt{2\pi}}\,e^{-(r_t-\mu_t)^2/2\sigma_t^2} \tag{1}$$

である。それゆえ，r_t によってもたらされる主体的効用 $U(r_t)$ の実現する確率もまた(1)式によって定まる。この効用は，収益の水準につれててい減するものとしており，つぎの式によって表わすことにしている。

$$U(r_t)=1-e^{-\alpha r_t} \tag{2}$$

ただし，α は経営主体ごとに定まる危険忌避定数

この $U(r_1)$，$U(r_2)$，……，$U(r_t)$，……，$U(r_T)$ という一連の各期別方式効用については，それらの確率変動が期ごとに独立的であり，完全に自由に組合わせることができるものとしている。経営の追求する目的量は，いうまでもなくこれら各期の効用の合計値にほかならず，

$$\sum_{t=1}^{T}U(r_t)$$

によって表わすことになる。したがって，各期の収益の任意の組合せによってもたらされるところの，確率重みつき総平均効用値 U_M は，つぎの式によって与えられる。

$$U_M=Y_1Y_2\cdots\cdots Y_t\cdots\cdots Y_T\left\{\sum_{t=1}^{T}U(r_t)\right\} \tag{3}$$

それゆえ，最大化をはからなければならない計画期間全体の総効用の期待値 $E_T(u)$ は，(3)式について r_t に関する多重確率積分を行なうことによりえられることになる。その結果はつぎのとおりである。

$$E_T(u)=T-\sum_{t=1}^{T}e^{\alpha(\alpha\sigma_t^2/2-\mu_t)}\longrightarrow \max \tag{4}$$

ところで，(4)式において T は定数であるから，この式の値を最大化することは，その第2項を最小化することを意味する。したがって，問題の多期間収穫規整リスク・プログラミングの目的関数は，つぎのようになる。

$$E_T(u^+)=\sum_{t=1}^{T}e^{\alpha(\alpha\sigma_t^2/2-\mu_t)}\longrightarrow \min \tag{5}$$

さて，この(5)式は，戦略によって変化する σ_t^2 および μ_t を指数部分の構成要素としており，かつ e の指数関数の和の形をとっている。これらの条件が，ともにプログラミングの解をえるうえでの，容易さのさまたげになっていることについては多言を要しないであろう。かりに，投入・産出の変動が林地面積に関して一次の関係において定まるという条件を設定しても，ほとんどこの事情に変りはないのである。

方　　法

以上において指摘した問題点を克服するためには，用いたリスク・プログラミングの方法に若干の改変を加えなければならない。そこで，坂本のモデルにおける制限条件式が一次形式によって表現されていることを生かして，類似性の高い二次線型プログラミングの方法を援用することを考えるのである。

いわゆる二次線型プログラミングは，制限条件式が一次形式，目的式が二次形式で定められる場合の方法であり，その解はシンプレックス法などによって比較的簡単に求めることができる。リスク・プログラミングの分野では Heady と Candler が単一期間モデルに応用[4] しているが，ここではその考え方を多期間モデルにふえんすることを含みとして，彼らの方法を通覧しておく。

その概略についていえば，まず，経営主体はリスク――危険を忌避し，最適計画の決定にあたってもこのことを考慮するという立場から，収益の変動状況をその分散の値によって計測し，与えられた資源制約のもとでの実現可能なあらゆる計画のなかから，一定の収益期待値に対して最小の収益分散を与える一連の計画群を見出していくという方法である。坂本の提示した方法との最大の相違点は，プログラミングの過程自体には最適計画を決定する手続きを含まないことであり，一連の最適解候補群を選抜するにとどまる。したがって，最適計画は，別に用意した収益期待値と分散を説明変量とする主体的効用関数によって最適解候補群のなかから，あらためて選ばれることになっている。そうした特性からして，この方法は自己完結的プログラミングではないとされる。

しかしながら，逆にいえば，自己完結性をもたないゆえに，プログラミングの目的関数として効用関数を用いる必要がなく，それだけ手法としては単純化されていることを意味しており，ここではその単純性を特長として生かすことを試みるわけである。ちなみに，その方法を一次制約条件下でプログラミングの定式化をすれば，つぎのように表わすことができよう。

単一期間モデルであるから，収益を r，それが正規分布確率変量であるとしてその期待値を μ とする。i 番目の要素制約量 b_i，その要素の消費にかかわる技術係数 a_{ij}，戦略変量 x_j とすれば，r したがって μ は x_j の線型結合により規定され，収益の分散 σ^2 はつぎのようになる。

$$\sigma^2=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sigma_{jk}x_jx_k \tag{6}$$

ただし，σ_{jk} は $j=k$ において分散，$j \neq k$ において共分散となるプロセす収益の変動値

したがって，最終的にはつぎの形となる。

目的式

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sigma_{jk}x_jx_k \longrightarrow \min \tag{7}$$

制約条件式

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \leqq b_i \quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m) \tag{8}$$

$$x_j \geqq 0$$

ここにおいて(7)式の構成をみると，戦略変量に関する二次形式が実現されており，また(8)式が一次形式であることから，このモデルは典型的な二次線型をなしていることが理解されるはずである。

結果と考察

この二次線型リスク・プログラミングの方法を多期間のものに改め，収穫規整に利用するわけであるが，そのためのモデルとして，前述の坂本の基本モデルを動学化したもの[5)] を用いることにする。その理由は，そこに定式化した制約条件式が一次形式で記述してある点にある。

この多期間収穫規整ダイナミック・リスク・プログラミング・モデルにおいては，各期の一つの林小班——最小分割した林分単位およびその他の一つの制約要素に対して，すべて一様に n 個のプロセスが対応するものとし，林小班数とその他の制約要素の種類の数の合計が各期ともに m 個であるとして，$1 \sim T$ にわたる計画期間を定めている。その制約条件式は，つぎのように展開される。

$$
\begin{array}{ll}
1\text{期}\left\{\begin{array}{ll}
\sum_{j=1}^{n} a_{oj}{}^{(1)} x_j{}^{(1)} & \leqq b_o{}^{(1)*} \\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij}{}^{(1)} x_j{}^{(1)} & \leqq b_i{}^{(1)}
\end{array}\right. \\
2\text{期}\left\{\begin{array}{ll}
\sum_{j=1}^{n} (-a_{m+1j}{}^{(1)}) x_j{}^{(1)} + \sum_{j=1}^{n} a_{oj}{}^{(2)} x_j{}^{(2)} & \leqq b_o{}^{(2)*} \\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij}{}^{(2)} x_j{}^{(2)} & \leqq b_i{}^{(2)}
\end{array}\right. \\
t\text{期}\left\{\begin{array}{ll}
\sum_{j=1}^{n} (-a_{m+1j}{}^{(t-1)}) x_j{}^{(t-1)} + \sum_{j=1}^{n} a_{oj}{}^{(t)} x_j{}^{(t)} & \leqq b_o{}^{(t)*} \\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij}{}^{(t)} x_j{}^{(t)} & \leqq b_i{}^{(t)}
\end{array}\right. \\
T\text{期}\left\{\begin{array}{ll}
\sum_{j=1}^{n} (-a_{m+1j}{}^{(T-1)}) x_j{}^{(T-1)} + \sum_{j=1}^{n} a_{oj}{}^{(T)} x_j{}^{(T)} & \leqq b_o{}^{(T)*} \\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij}{}^{(T)} x_j{}^{(T)} & \leqq b_i{}^{(T)}
\end{array}\right.
\end{array}
$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m)$$

$$x_j{}^{(t)} \geqq 0 \tag{9}$$

ただし，

$a_{ij}{}^{(t)}$　：t 期における j 番目のプロセス $P_j{}^{(t)}$ の i 番目の制約要素に関する技術係数

$a_{oj}{}^{(t)}$　：$t-1$ 期から t 期への繰越制約条件に関する $P_j{}^{(t)}$ の技術係数

$-a_{m+1j}{}^{(t)}$：t 期から $t+1$ 期への繰越制約条件に関する $P_j{}^{(t)}$ の技術係数

$b_i{}^{(t)}$　：t 期における i 番目の制約要素量

$b_o{}^{(t)*}$　：$t-1$ 期から t 期への繰越制約要素量

さて，ここにおいて，同一単位期間内においてだけ収益構成要素間の共変動を認めるというさきの基本モデルの考え方を踏襲すれば，任意の t 期の収益分散 $\sigma^{(t)2}$ については

$$\sigma^{(t)2} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sigma_{jk}{}^{(t)} x_j{}^{(t)} x_k{}^{(t)} \tag{10}$$

の関係が成り立つはずである。また，各期の収益の間ではそれらの変動がまったく独立的であるという認定があるから，総計画期間の収益合計の分散は，(10)式をもとにしてつぎのようにえられ，それが，とりもなおさず最小化されるべき目的関数となる。

$$\sum_{t=1}^{T}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sigma_{jk}{}^{(t)}x_j{}^{(t)}x_k{}^{(t)}\right) \longrightarrow \min \tag{11}$$

(11)式の構造は，任意の期の，任意のプロセスの分散・共分散を乗数とした戦略変量の二次形式の総和から成り立っている。したがって，(9)式を制約条件式とし，(11)式を目的式として定式化したモデルは，めざす多期間収穫規整の二次線型リスク・プログラミング・モデルにほかならない。

これにより，所期の二次線型化の目的は達成され，問題とした多期間問題が容易に解をえられることとなった。もちろん，プログラミングの直接の解としては最適計画候補群が与えられるにとどまり，別に経営主体ごとに用意した Heady・Candler 流の選好関数によって最終的な選択作業が行なわれるという手間は残している。しかし，その作業はさして困難なものではないといえる。さらに，坂本の基本モデルが経営主体ごとにすべて解かれなければならないのに対して，(9)，(11)式で与えられるモデルにおいては，経営主体を異にしても制約的条件が等しいものについてはプログラミングの解が相互に流用され，選好関数だけを別にすれば事たりるという利点の存在が指摘できる。この点は，たとえば地域計画などの場合に，とくに作業量を節約させることになると考えられる。

要　　約

坂本の提示した多期間の収穫規整をめざすリスク・プログラミングは，最適解を求めるにあたって完全に自己完結的であるゆえに，その目的式が戦略変量について指数関数の和の形となり，解法にいささかの難点を含んでいた。そこで，この問題点を克服するために，モデルを解が比較的容易にえられるところの二次線型のものに改変することを試みた。

そのために，Heady と Candler が示した単一期の二次線型リスク・プログラミングの方法を，多期間のものに改めるという手続きを通じて，たとえば(9)，(11)式のように，ダイナミック・リスク・プログラミングの形においてさえ，多期間収穫規整モデルの二次線型による定式化ができることを明らかにした。また，それによって所期の解の容易さが実現されるに至った。

文　　献

1) 坂本格，林業経営におけるリスク・プログラミングに関する研究，九大演習林報告， No. 40，186—202 (1966)
2) Freund, R. J., The introduction of risk into a programming model. *Econometrica*, 24, 253—263 (1956)
3) 坂本格，前掲
4) Heady, E. O. and Candler, W., "Linear Programming Methods" 5th ed., p. 554—560, Iowa State Univ. Press, Iowa (1966)
5) 木梨謙吉，関屋雄偉，西沢正久，高田和彦，栗屋仁志，坂本格，飯塚寛，長正道，森林測定，地球社，東京（未刊行）

（昭和49年9月27日受理）