

# 有限斜面における雨滴土壌侵食の理論的研究

南 信弘・小椋 正澄

(農学部・土地保全学研究室)

## Theoretical Analysis of Raindrop Erosion on the Simple Slope

Nobuhiro MINAMI and Masazumi OGURA

Laboratory of Land Conservation, Faculty of Agriculture

**Abstract:** It is necessary to calculate the rainfall energy and to know the relationship between rainfall intensity ( $R$ ) and distribution of raindrops.

In this paper, we expressed analytically that the rainfall energy ( $E$ ) is proportional to the rainfall intensity ( $R$ ) to the (1.222~1.233) power by using the relationship between the raindrop number, density function in a space ( $N_D$ ) and rainfall intensity ( $R$ ).

Then, it assume that soil grain size accumulation curve on the slope surface layer can be expressed the function of relative grain size ( $\phi/\phi_{max}$ ), we obtain non dimensional accumulative soil erosion function contained following factors, length and gradient of slope, weight of unit volume and thickness of soil layer, distribution factor of soil grains, and total rainfall.

### ま え が き

雨滴侵食の機構解明には、まず降雨エネルギーの算定が必要であり、降雨の雨滴粒径度数分布と降雨強度および降雨エネルギーの関係を知らることが要求される。

降雨エネルギーは降雨強度の指数関数で表わされることはすでに知られているが、筆者らは降雨の空間雨滴数密度関数から降雨強度と降雨エネルギーの関係を理論的に導びいた。

さらに雨滴作用をうける地表土層の単位体積当りの土粒子数を基にして、粒径加積曲線を相対粒径の関数で表わし、積算土壌侵食量を無次元表示した。この関数に含まれる因子は斜面長、傾斜角、土層の単位体積重、厚さ、土粒子の最大径、粒径分布係数、積算降雨量などである。

### 雨 滴 落 下 速 度

降雨エネルギーの要因である直径  $D$  の雨滴の落下速度は、粘性流体中の球体自由落下を扱った Stokes の理論で論じられるが、雨滴径が 1 mm 以上になると実測値がかなり小さくなる。したがって近似式として次式を採用した。

$$v = v_0 \left( \frac{D}{D_0} \right)^z \quad (1)$$

$D$	: 雨滴直径	[L]
$D_0$	: 雨滴基準径	[L]
$v$	: 雨滴落下速度	[L T <sup>-1</sup> ]
$v_0$	: 基準雨滴速度	[L T <sup>-1</sup> ]
$z$	: 定数	

$D_0$  は雨滴径を無次元化するための定数と考えてもよい。三原<sup>1)</sup> の測定値から  $v_0$ ,  $z$  を推定してみると  $v_0 = 6.00$  m/sec,  $z = 0.5$  で Fig. 1 のように  $D < 2.5$  mm ではかなり適合しているが  $D$  が

大きくなると相等ずれてくる。適合度から言えば (2) 式の方が良いが、まず (1) 式を採用した場合を考えた。

$$v = v_0 \left[ 1 - \text{Exp.} \left( -1.1 \frac{D}{D_0} \right) \right] \quad (2)$$

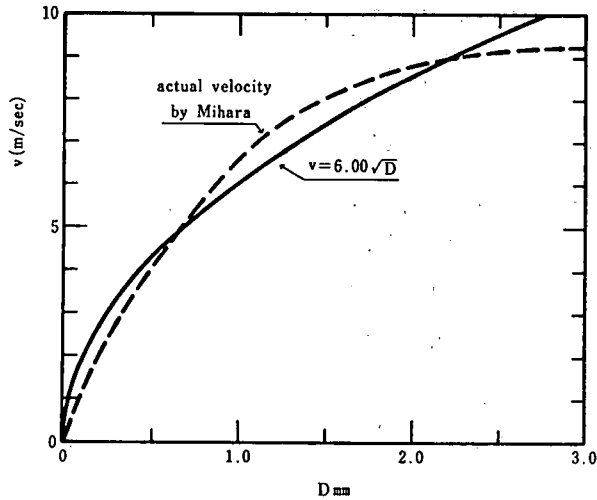


Fig. 1 Raindrop velocity  $v$  and raindrop diameter  $D$  relations

#### 空間雨滴数と空間含水量

降雨の最中を考えると、空中にある直径  $D + \Delta D$  の範囲の雨滴のうち、最初の一滴が面積  $s$  の地表に到達し、 $\Delta t$  時間後には第  $N_s$  番目の雨滴が地表に到達したとする。このとき第  $N_s$  番目の雨滴は地表到達の  $\Delta t$  時間前には  $v \Delta t$  の上空にあり、 $\Delta t$  時間内に  $N_s$  個の雨滴が順次落下して地表に雨滴痕を作ったと考えれば、 $N_D$ 、 $N_s$  が定義される。

$$N_D = \frac{N_s}{v \cdot s \cdot \Delta t \cdot \Delta D} \quad (3)$$

$$N_s = \frac{N_s}{s \cdot \Delta t \cdot \Delta D} = v_0 \left( \frac{D}{D_0} \right)^n N_L \quad (4)$$

$N_D$  : 空間雨滴数密度  $[L^{-4}]$

$N_s$  : 地表雨滴痕数密度  $[L^{-3}T^{-1}]$

$N_D$  については既に M—P 式<sup>2)</sup> として (5) 式、塩月の式<sup>3)</sup> として (6) 式が発表されているが、一般的な式として (7) 式のように書くことにする。

$$N_D = N_0 e^{-\lambda D} \quad (5)$$

$$N_D = N_0 e^{-\lambda D^2} \quad (6)$$

$$N_D = N_0 e^{-ax^n}, \quad x = \frac{D}{D_0} \quad (7)$$

$a$  は雨滴の粒径分布に関する係数である。 $N_0$  は  $D=0$  のときの空間雨滴数密度であるが、 $N$  を

単位空間における全雨滴数  $[L^{-3}]$  とすれば (9) 式で示される。

$$N = \int_0^{\infty} N_D dD = N_0 D_0 \int_0^{\infty} e^{-ax^n} dx = N_0 D_0 \frac{1}{n} \Gamma_{\frac{1}{n}} a^{-\frac{1}{n}} \quad (8)$$

$$\therefore N_0 = \frac{n}{\Gamma_{\frac{1}{n}}} a^{\frac{1}{n}} \frac{N}{D_0} \quad (9)$$

したがって空間雨滴数密度関数  $f_{DN}$  は (10) 式となる。

$$f_{DN} = \frac{N_D D_0}{N} = \frac{n}{\Gamma_{\frac{1}{n}}} a^{\frac{1}{n}} e^{-ax^n} \quad (10)$$

このことから単位空間の雨滴全質量  $M [ML^{-3}]$ , および空間含水量密度関数  $f_{DM}$  は (11), (12) 式となる。

$$M = r_w \frac{\pi}{6} D_0^3 N \frac{\Gamma_{\frac{4}{n}}}{\Gamma_{\frac{1}{n}}} a^{-\frac{3}{n}} \quad (11)$$

$$f_{DM} = \frac{n}{\Gamma_{\frac{4}{n}}} a^{\frac{4}{n}} x^3 e^{-ax^n} \quad (12)$$

#### 地表雨滴痕数と降雨強度

単位時間, 単位面積に地表に落下してきた全雨滴痕数  $N_G [L^{-2}T^{-1}]$ , および雨滴痕数密度関数  $f_G$  を求めると

$$N_G = \int_0^{\infty} N_s dD = v_0 N \frac{\Gamma_{\frac{s+1}{n}}}{\Gamma_{\frac{1}{n}}} a^{-\frac{s}{n}} \quad (13)$$

$$f_G = \frac{n}{\Gamma_{\frac{s+1}{n}}} a^{\frac{s+1}{n}} x^s e^{-ax^n} \quad (14)$$

となり,  $N_0$ ,  $N$ ,  $N_G$  の関係は (9), (13) 式から次のようになる。

$$N_0 = \frac{n}{\Gamma_{\frac{1}{n}}} \left( \frac{N}{D_0} \right) a^{\frac{1}{n}} = \frac{n}{\Gamma_{\frac{s+1}{n}}} \left( \frac{N_G}{D_0 v_0} \right) a^{\frac{s+1}{n}} \quad (15)$$

また地表に落下した雨滴の単位時間, 単位面積当りの全雨滴体積は降雨強度  $R [LT^{-1}]$  と同義であり (10) 式で示される。

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{\pi}{6} \int_0^{\infty} D^3 N_s dD = \frac{\pi}{6} \left( \frac{\Gamma \frac{s+4}{n}}{n} \right) D_0^4 v_0 N_0 a^{-\frac{s+4}{n}} \\
 &= \frac{\pi}{6} \left( \frac{\Gamma \frac{s+4}{n}}{\Gamma \frac{1}{n}} \right) D_0^3 v_0 N a^{-\frac{s+3}{n}} \\
 &= \frac{\pi}{6} \left( \frac{\Gamma \frac{s+4}{n}}{\Gamma \frac{s+1}{n}} \right) D_0^3 N_G a^{-\frac{3}{n}} \tag{16}
 \end{aligned}$$

降水量の密度分布関数  $f_R$  は雨滴径別の寄与率を示すものとして (17) 式で示されることになる。

$$f_R = \frac{n}{\Gamma \frac{s+4}{n}} a^{\frac{s+4}{n}} x^{s+3} e^{-ax^n} \tag{17}$$

このとき降雨強度  $R$  の測定値があり、 $N_0$ 、 $N$ 、 $N_G$  のいずれかが判明すれば、雨滴径分布係数  $a$  は (18) 式で求まることになる。

$$\begin{aligned}
 a &= \left[ \left( \frac{\pi}{6} \frac{\Gamma \frac{s+4}{n}}{n} \right) (D_0^4 N_0) \left( \frac{v_0}{R} \right) \right]^{\frac{n}{s+4}} \\
 &= \left[ \left( \frac{\pi}{6} \frac{\Gamma \frac{s+4}{n}}{\Gamma \frac{1}{n}} \right) (D_0^3 N) \left( \frac{v_0}{R} \right) \right]^{\frac{n}{s+3}} \\
 &= \left[ \left( \frac{\pi}{6} \frac{\Gamma \frac{s+4}{n}}{\Gamma \frac{s+1}{n}} \right) \left( \frac{D_0^3 N_G}{R} \right) \right]^{\frac{n}{3}} \tag{18}
 \end{aligned}$$

#### 降雨エネルギーと降雨強度

雨滴が地表に与える単位時間；単位面積当りの降雨エネルギー  $E$  [ $MT^{-3}$ ] は

$$\begin{aligned}
 E &= \int \frac{1}{2} \tau_w \frac{\pi}{6} D^3 v^2 N_s dD \\
 &= \frac{1}{2} \tau_w \frac{\pi}{6} D_0^4 v_0^3 N_0 \frac{\Gamma \frac{3s+4}{n}}{n} a^{-\frac{3s+4}{n}} \\
 &= \frac{1}{2} \tau_w \frac{\pi}{6} D_0^3 v_0^3 N \frac{\Gamma \frac{3s+4}{n}}{\Gamma \frac{1}{n}} a^{-\frac{3s+3}{n}} \\
 &= \frac{1}{2} \tau_w \frac{\pi}{6} D_0^3 v_0^2 N_G \frac{\Gamma \frac{3s+4}{n}}{\Gamma \frac{s+1}{n}} a^{-\frac{2s+3}{n}} \tag{19}
 \end{aligned}$$

(18), (19) 式から  $N_0$ ,  $N$ ,  $N_G$  を消去すれば

$$\frac{E}{r_w v_0^3} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma \frac{3s+4}{n}}{\Gamma \frac{s+4}{n}} a^{-\frac{2s}{n}} \left( \frac{R}{v_0} \right) \quad (20)$$

となり降雨エネルギーは  $V_0$  を一定とすると雨滴分布係数  $a$  の  $2s/n$  乗に反比例し、降雨強度  $R$  に比例することになる。

一方  $a$  を消去すれば、 $C_0 = \Gamma \frac{3s+4}{n} / \Gamma \frac{s+4}{n}$  とおいて

$$\begin{aligned} \frac{E}{r_w v_0^3} &= \frac{1}{2} c_0 \left( \frac{6}{\pi} \frac{n}{\Gamma \frac{s+4}{n}} \frac{1}{D_0^4 N_0} \right)^{\frac{2s}{s+4}} \left( \frac{R}{v_0} \right)^{1 + \frac{2s}{s+4}} \\ &= \frac{1}{2} c_0 \left( \frac{6}{\pi} \frac{\Gamma \frac{1}{n}}{\Gamma \frac{s+4}{n}} \frac{1}{D_0^3 N} \right)^{\frac{2s}{s+3}} \left( \frac{R}{v_0} \right)^{1 + \frac{2s}{s+3}} \\ &= \frac{1}{2} c_0 \left( \frac{6}{\pi} \frac{\Gamma \frac{s+1}{n}}{\Gamma \frac{s+4}{n}} \frac{v_0}{D_0^3 N_G} \right)^{\frac{2s}{3}} \left( \frac{R}{v_0} \right)^{1 + \frac{2s}{3}} \end{aligned} \quad (21)$$

もし  $N_0$ ,  $N$ ,  $N_G$  などが一定ならば降雨エネルギーは降雨強度の指数関数となることを示している。

### 土粒子の粒度分布、粒径加積曲線

粒径加積曲線を相対粒径の関数で表現するため、粒径の対数変換を次のようにした。

$$x = \left[ \frac{1}{c} \ln \left( \frac{\phi_{max}}{\phi} \right) \right]^{\frac{1}{k}} \quad (22)$$

$c, \kappa$  : 土粒子数分布係数

$\phi$  : 土粒子直径 [L]

$\phi_{max}$  : 土粒子最大径 [L]

$N_r$  を単位体積中の全土粒子数 [ $L^{-3}$ ] として土粒子数密度  $N_\phi$  [ $L^{-4}$ ] が (23) 式で表わされると仮定すれば

$$\begin{aligned} N_\phi d\phi &= N_r \kappa \frac{c \frac{\frac{m+k}{k} - 1}{\Gamma \frac{m+k}{k}}}{\Gamma \frac{m+k}{k}} x^m d\phi \\ &= -N_r \kappa \frac{c \frac{\frac{m+k}{k}}{\Gamma \frac{m+k}{k}}}{\Gamma \frac{m+k}{k}} x^{m+k-1} e^{-c\omega^k} dx \end{aligned} \quad (23)$$

土粒子数の密度関数  $f_{\phi N}$  は次式となる。

$$f_{\phi N} = \kappa \frac{c^{\frac{m+k}{k}}}{\Gamma_{\frac{m+k}{k}}} x^{m+k-1} e^{-cx^k} \quad (24)$$

単位体積当りの全土粒子質量は乾燥単位体積重  $\gamma_d$  [ $M L^{-3}$ ] と同義であり, その質量密度  $M_\phi$  [ $M L^{-4}$ ] は (25), (26) 式で示される。

$$M_\phi d\phi = \frac{\pi}{6} G_s \gamma_w \phi^3 N_\phi d\phi = \frac{\pi}{6} G_s \gamma_w \phi^3 m_{av} N_r \kappa \frac{c^{\frac{m+k}{k}}}{\Gamma_{\frac{m+k}{k}}} x^{m+k-1} e^{-4cx^k} dx \quad (25)$$

$$\gamma_d = \int_0^{\phi_{max}} M_\phi d\phi = \frac{\pi}{6} G_s \gamma_w \phi^3 m_{av} \frac{N_r}{4^{\frac{m+k}{k}}} \quad (26)$$

したがって  $N_r$  は  $K=m/k$  を正の整数にとれば

$$N_r = \frac{24}{\pi} \frac{\gamma_d}{G_s \gamma_w \phi^3 m_{av}} 4^K \quad (27)$$

また土粒子質量の分布関数  $f_{\phi M}$  および粒径加積曲線  $F_M$  は (28), (29) 式となる。

$$f_{\phi M} = \kappa \frac{(4c)^{K+1}}{\Gamma_{K+1}} x^{m+k-1} e^{-4cx^k} \quad (28)$$

$$F_M = \int_0^\phi \frac{M_\phi}{\gamma_d} d\phi = \kappa \frac{(4c)^{K+1}}{\Gamma_{K+1}} \int_x^\infty x^{m+k-1} e^{-4cx^k} dx \quad (29)$$

ここで

$$X = 4cx^k = 4 \ln \frac{\phi_{max}}{\phi} \quad (30)$$

とおくと  $\kappa$  が正の整数であるから

$$\begin{aligned} F_M &= \frac{1}{\Gamma_{K+1}} \int_x^\infty X^K e^{-X} dX \\ &= e^{-X} \sum_{r=0}^K \frac{X^r}{r!} = \left( \frac{\phi}{\phi_{max}} \right)^4 \sum_{r=0}^K \frac{[4 \ln \left( \frac{\phi_{max}}{\phi} \right)]^r}{r!} \end{aligned} \quad (31)$$

(31) 式をみると  $\sum_{r=0}^K \frac{X^r}{r!}$  は  $e^X$  の  $\kappa$  項までの級数展開であり, 粒径加積曲線はこの値と  $e^X$  の値との比で示されることになった。

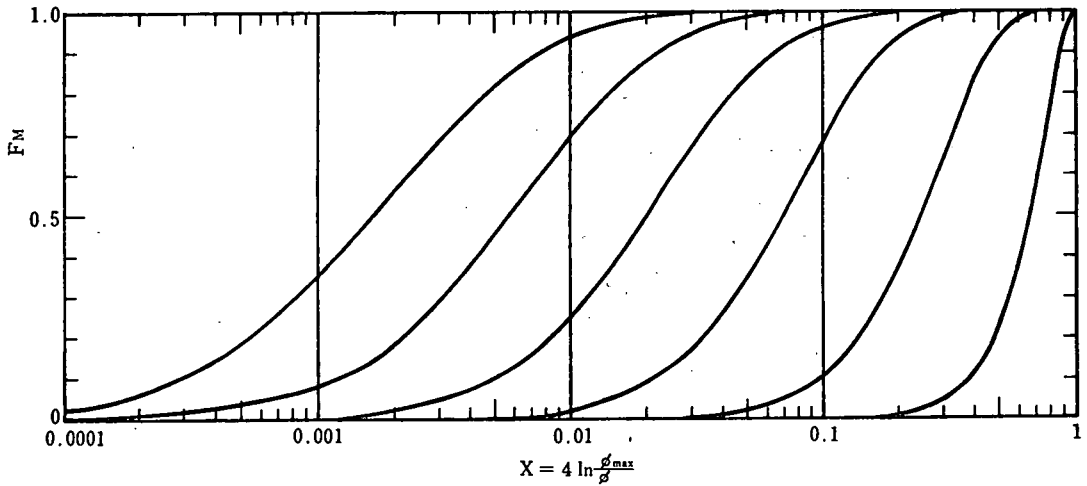


Fig. 2 Relative grain size accumulation curve

## 降雨エネルギーと地表粒子移動距離

斜面上の厚さ  $Z_0$  の土層中の土粒子 1 個当りに降雨が与えるエネルギー  $E_0$  [ $M L^2 T^{-2}$ ] は  $dt$  時間に

$$E_0 = \frac{E dt}{N_r Z_0} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma^{\frac{3s+4}{n}}}{\Gamma^{\frac{s+4}{n}}} \gamma_w v_0^3 a^{-\frac{2s}{n}} \left( \frac{R}{v_0} \right) \frac{\pi}{24} \frac{G_s \gamma_w \phi^3}{\gamma_a 4^K} \frac{dt}{Z_0} \quad (32)$$

このエネルギーは土粒子の運動エネルギーに変換され、初速  $V_0$  で土粒子が運動し始めると考えると、この運動エネルギー  $E_\phi$  [ $M L^2 T^{-2}$ ] は

$$E_\phi = \frac{1}{2} \frac{\pi}{6} G_s \gamma_w \phi^3 \left( \frac{\phi}{\phi_{max}} \right)^3 V_0^2 \quad (33)$$

エネルギーの変換効率を  $\xi$  とすると  $\xi E_0 = E_\phi$  であり、初速の 2 乗は

$$V_0^2 = v_0^2 \frac{\Gamma^{\frac{3s+4}{n}}}{\Gamma^{\frac{s+4}{n}}} \frac{\xi}{a^{\frac{2s}{n}} 4^{K+1}} \frac{\gamma_w}{\gamma_a} \left( \frac{\phi_{max}}{\phi} \right)^3 \left( \frac{R}{Z_0} \right) dt \quad (34)$$

傾斜角  $\theta$  の斜面上にある径  $\phi$  の土粒子が初速  $V_0$  で運動を始めるときの射出角を、斜面法線から  $\theta$ 、すなわち鉛直線と  $2\theta$  であると仮定すると、その着地点は (35) 式、着地速度は (36) 式で表わされる。(Fig. 3 参照)

$$X_0 = \frac{2}{g} V_0^2 \sin^2 \theta \left( \frac{V_{0Y}}{V_{0X}} + \tan \theta \right), \quad Y_0 = X_0 \tan \theta \quad (35)$$

ただし  $V_{0X} = V_0 \sin 2\theta$ ,  $V_{0Y} = V_0 \cos 2\theta$

$$V_{01X} = V_{0X}, \quad V_{01Y} = -(V_{0Y} + 2V_{0X} \tan \theta) \quad (36)$$

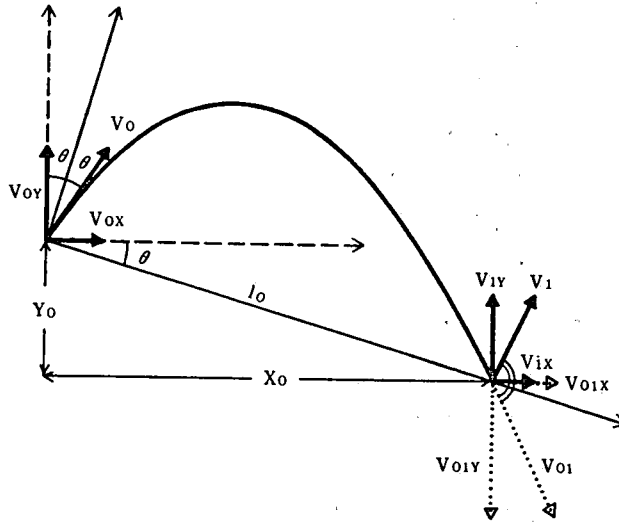


Fig. 3 Trajectory of a soil grain

このとき与えられたエネルギーよりも  $\frac{\pi}{6} \phi^3 G_s \gamma_{so} g Y_0$  だけエネルギーは増加していることになるが、着地衝突によるエネルギー損失率が  $(1 - \lambda)$  であるとし、次回の射出方向が水平から  $\tan^{-1}(-V_{01y}/V_{01x})$  であるとする、射出速度成分は (37) 式となる。

$$\left. \begin{aligned} V_{1y} &= -\sqrt{\lambda} V_{01y} = \sqrt{\lambda} (V_{0y} + V_{0x} \tan \theta) \\ V_{1x} &= \sqrt{\lambda} V_{01x} = \sqrt{\lambda} V_{0x} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

以下同様にして  $i$  回目の移動距離は

$$X_i = \frac{2}{g} V_{0x}^2 \left[ \frac{V_{0y}}{V_{0x}} + (2i+1) \tan \theta \right] \lambda^i \quad (38)$$

斜面距離に書き替えると

$$l_i = \frac{X_i}{\cos \theta} = \frac{4}{g} V_0^2 \sin \theta (1 + 4i \tan \theta) \lambda^i \quad (39)$$

すなわち  $dt$  時間に降雨が与えたエネルギーによって径  $\phi$  の土粒子は  $dl$  だけ移動することになる。

$$dl = \frac{4}{g} V_0^2 \sin \theta \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i (1 + 4i \sin^2 \theta) \quad (40)$$

ここで

$$S_\theta = \sin \theta \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i (1 + 4i \sin^2 \theta) \quad (41)$$

とおけば Fig. 4 のように斜面傾斜角の土粒子移動に対する影響度が求まる。

(34), (40), (41) 式を整理し

$$\beta = \xi S_\theta \frac{\Gamma_{\frac{3s+4}{n}}}{\Gamma_{\frac{s+4}{n}}} \frac{v_0^2}{gZ_0} \frac{\gamma_{so}}{\gamma_a} \quad (42)$$



とおくと

$$dl = \beta 4^{-\kappa} a^{-\frac{2\kappa}{n}} \left( \frac{\phi_{max}}{\phi} \right)^3 R dt \quad (43)$$

となり改めて

$$R_0 = \int_0^t \frac{R}{a^{\frac{2\kappa}{n}}} dt \quad (44)$$

とすると土粒子の  $t$  時間後の移動距離  $l$  は

$$l = \frac{\beta R_0}{4^\kappa} \left( \frac{\phi_{max}}{\phi} \right)^3 \quad (45)$$

$\phi = \phi_{max}$  の粒子は  $l_0 = \beta R_0 / 4^\kappa$  まで移動することになる。

#### 有限斜面の土壌侵食量

斜面長  $L$  の斜面を考えると、直径  $\phi$  の土粒子は降雨によって  $l$  だけ移動し、斜面下端の土粒子は斜面上から失われる。このことは、 $l > L$  となる土粒子はすべて姿を消すことを意味する。斜面上から外に出る土粒子質量を侵食量  $E_r$  [ $ML^{-1}$ ] とすると、Fig. 5 の斜線部分の土粒子質量がこれに当る。したがって

$$\begin{aligned} E_r &= \gamma_a Z_0 \left\{ l_0 + \int_{l_0}^L [f_{\phi M} dx] dl \right\} \\ &= \gamma_a Z_0 \left\{ l_0 + \int_{l_0}^L F_M dl \right\} \end{aligned} \quad (46)$$

(30), (45), 式から

$$X = \frac{4}{3} \ln \frac{4^{\kappa} l}{\beta R_0}, \quad dl = \frac{3}{4} \frac{\beta R_0}{4^\kappa} e^{\frac{3}{4} X} dX \quad (47)$$

$l = l_0 = \frac{\beta R_0}{4^\kappa}$  で  $X = 0$ ,  $l = L$  で  $X_L = \frac{4}{3} \ln \frac{4^\kappa L}{\beta R_0} = \frac{4}{3} \ln \left( \frac{L}{l_0} \right)$  であるから (46) 式は

$$\frac{E_r}{\gamma_a Z_0 L} = \frac{l_0}{L} \left\{ 1 + \int_0^{X_L} \frac{3}{4} e^{-\frac{3}{4} X} \sum_{r=0}^{\kappa} \frac{X^r}{r!} dX \right\} \quad (48)$$

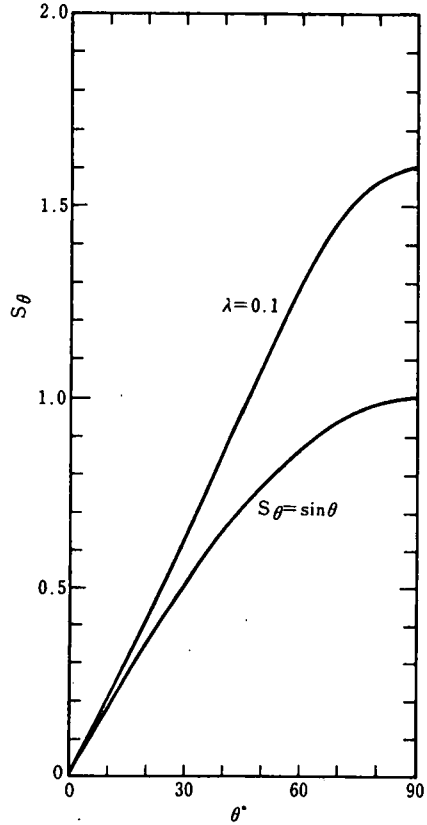


Fig. 4 Gradient factor  $S_\theta$  and slope gradient  $\theta$

$$\therefore \frac{E_r}{\tau_a Z_0 L} = \frac{l_0}{L} \left\{ 4^{K+1} - 3 \left( \frac{l_0}{L} \right)^{1/3} \sum_{r=0}^K 4^r \sum_{j=0}^r \frac{\left[ \frac{1}{3} \ln \left( \frac{L}{l_0} \right) \right]^j}{j!} \right\} \quad (49)$$

となり Fig. 6 に示す結果が得られる。

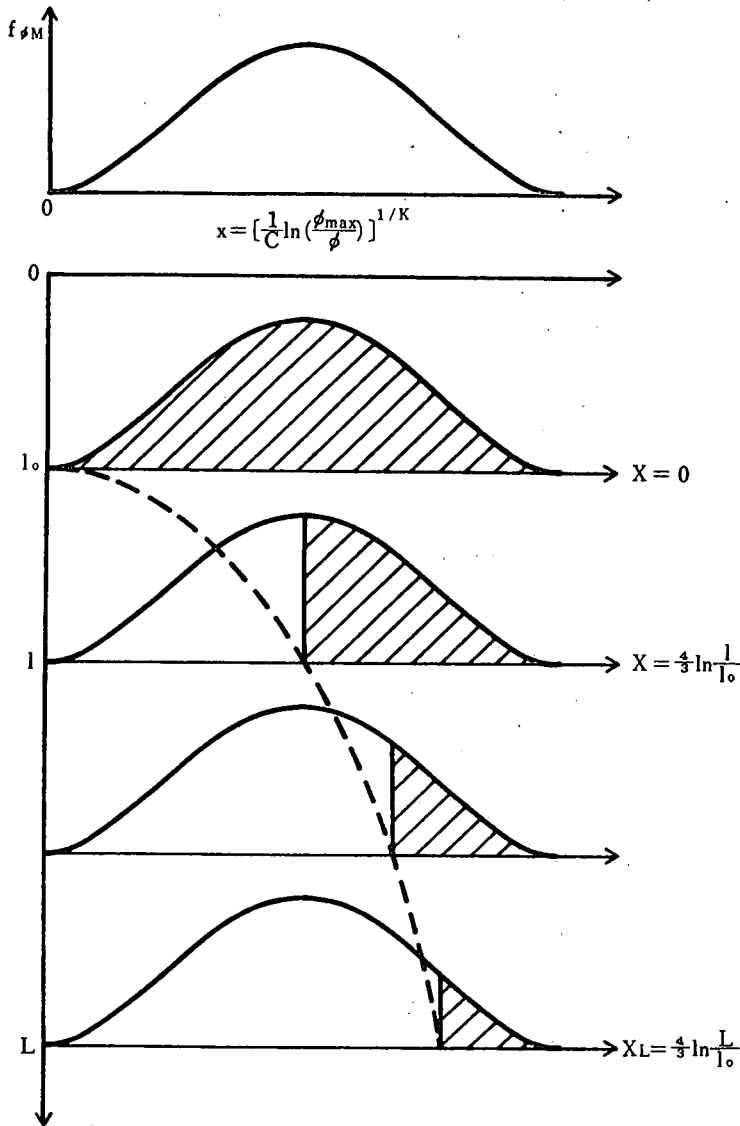
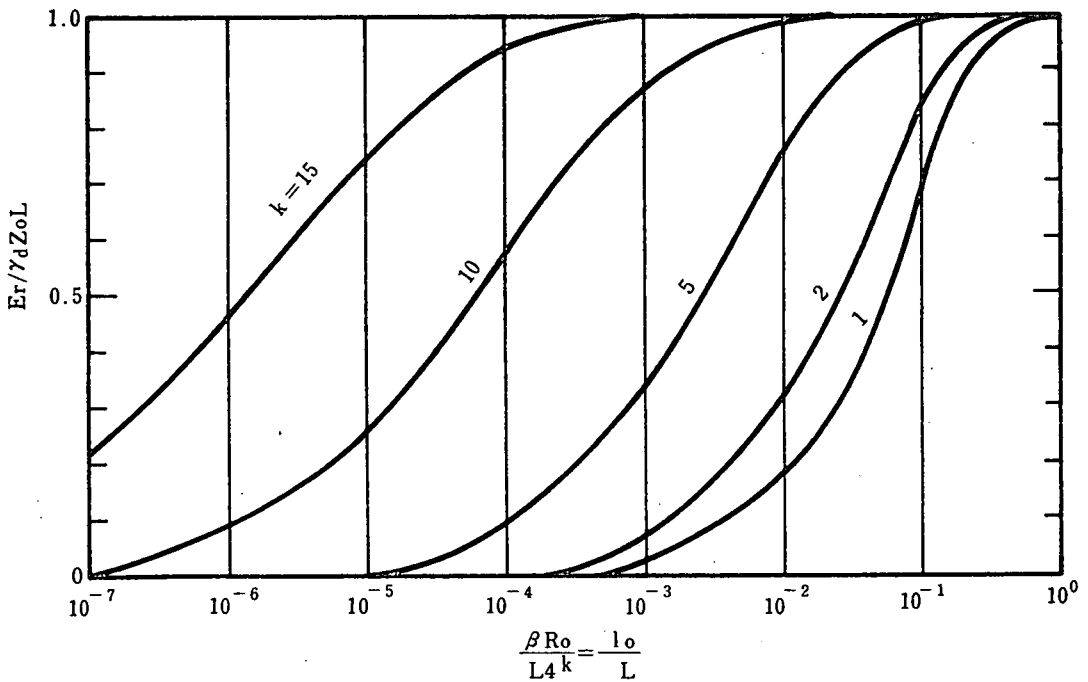


Fig 5. Explanation of grain size distribution and missing soil mass from a slope

Fig. 6 Relative soil erosion mass and  $l^0/L$  relations

## あ と が き

土壌侵食における理論的解析の試みとして、雨滴分布および土粒子の密度分布を考慮した土壌侵食量推定式を提案したが、雨滴分布係数、土粒子の分布係数および侵食土層厚さなどの問題があり、実測値と対比しながら改良してゆく予定である。

## 参 考 文 献

- 1) 三原義秋, 農業気象, 地人書館, 東京, p. 39, 1961
- 2) Marshall, J. S. and Parmer, W. M., The distribution of raindrops with size, J. Meteor., Vol. 5, pp. 165-166, 1948
- 3) Shiotsuki, Y., On the Flat size Distribution of Drops from Convection Rainfalls, Jur. of the Meteorological Society of Japan, Vol. 52, No.1, p. 49, 1974

(昭和54年9月28日受理)

(昭和55年3月7日発行)

