

# 層流域の管内非定常流圧力損失に関する近似式について

山崎堯右・宮地豊房・松岡孝尚・森田南海男・佐藤和徳\*

(農学部機械工学研究室)

## ON the APPROXIMATE IMPEDANCE of the LAMINAR UN-STEADY FLOW through a PIPE

T. YAMASAKI, T. MIYAJI, T. MATUOKA, N. MORITA, K. SATO  
(Laboratory of Mechanical Engineering, Faculty of Agriculture)

In oil-hydraulic controls, the impedance of the un-steady fluid line is very importance. In the first part of this paper, Kusama's exact solution on the Navier Stokes equation, was treated as a approximate transfer function ( $K/(TS+1)$ ).

The experimental results show that the treatment can be applied to the system of the slow unsteady flow of fluid line.

### 1. 緒 言

最近の油圧機器の発展にともない、管路系の圧力流量間の動特性を把握することは、制御設計に不可欠な問題となってきた。当然ながら、圧油主管内の多くの流れは層流域であるので、Navier Stokes の運動方程式からの多くの解析例は比較的解析が容易な主流方向のみに限られてはいるものの、油圧技術上の実用上有意義である。

ここでは圧縮性の項を考えない草間によって解かれた Step 状圧力変動による流量変化の厳密な解について、簡略化を行ない、実用の緩慢な圧力変動の範囲では略一次比例要素で示されることを示し、緩慢な脈動流についても適用されることがわかったので、ここに報告する。

### 2. 計 算 式

以下使用する記号をここに定義する。

$\alpha_j$  :  $J_0(\alpha_j) = 0$  なるベッセル関数の根  
roots of Bessel's function of zero order

$D$  : 管の直径  
pipe diameter

$l$  : 圧力差をとる流れの方向の距離  
the length of stream line direction

$\nu$  : 作動流体の動粘性係数  
kinematic viscosity of fluid

$P$  :  $l$  間の管壁の静圧差  
pressure drop between  $l$

$P(s)$  :  $P$  の像関数  
Laplace transform of  $P(t)$

\* 荒谷建設株式会社勤務

- $Q$  : 管全断面瞬間流量  
flow through a cross section of pipe
- $Q(s)$  :  $Q$  の像関数  
Laplace transform of  $Q(t)$
- $R$  : 管の半径  
pipe inner radius
- $r$  : 管壁から管中心にむかっての距離  
the variable distance from the pipe wall
- $Re \equiv D \cdot u / \nu$   
Reynold's number
- $\rho$  : 作動流体の密度  
fluid density
- $S$  : ラプラス変換における演算子  
Laplace variable
- $T$  : 時定数  $\equiv R^2 / (\alpha_t \nu)$   
time constant
- $t$  : 時間  
time
- $u$  : 管全断面の平均瞬間流速  
average velocity
- $x$  : 管の流れの方向の距離  
axial pipe coordinate
- $w$  : 管壁から  $r$  の距離における瞬間流速  
the point velocity at any radius  $r$

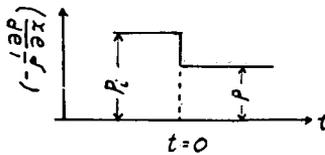


Fig. 1 Step input of the pressure drop into fluid line

第1図に示すようなステップ状入力に対する、ある断面の壁から  $r$  だけはなれた点の瞬間流速は草間<sup>(1)</sup>により Navier-Stokes の運動方程式で  $\frac{\partial P}{\partial z}$  を入力関数として次式で与えられる。

すなわち

$$W = P_1 \frac{R^2 - r^2}{4\nu} - (P_1 - P_2) \left\{ \frac{R^2 - r^2}{4\nu} - \frac{2R^2}{\nu} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_j \theta) e^{-\frac{\nu}{R^2} \alpha_j^2 t}}{\alpha_j^3 J_1(\alpha_j)} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

ただし  $\theta = r/R$

これを管断面について積分し流量を求めると

$$\begin{aligned}
 Q &= \int_0^R 2\pi w r \cdot dr \\
 &= \int_0^R P_t \frac{(R^2-r^2)}{4\nu} r \cdot 2\pi \cdot dr - (P_t - P) 2\pi \int_0^R \frac{(R^2-r^2)}{4\nu} r dr \\
 &\quad + (P_t - P) \frac{2R^2}{\nu} \int_0^r r \sum_{j=1}^n \frac{J_0(\alpha_j \theta) e^{-\frac{\nu}{R^2} \alpha_j^2 t}}{\alpha_j^3 \cdot J_1(\alpha_j)} dr \\
 &= 2\pi \int_0^R \frac{(R^2-r^2)}{4\nu} dr + \frac{(P_t - P) 2R^2}{\nu} 2\pi \int_0^R r \cdot \sum_{j=1}^n \frac{J_0(\alpha_j \theta) e^{-\frac{\nu}{R^2} \alpha_j^2 t}}{\alpha_j^3 \cdot J_1(\alpha_j)} dr \\
 &= \frac{\pi P R^4}{8\nu} + \left[ \frac{(P_t - P) 4\pi R^2}{\nu} \int_0^R \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j \frac{1}{R} r J_0\left(\alpha_j \frac{r}{R}\right) e^{-\frac{\nu}{R^2} \alpha_j^2 t}}{\alpha_j^3 J_1(\alpha_j)} \cdot \frac{d\left(\alpha_j \frac{r}{R}\right)}{\left(\alpha_j \frac{1}{R}\right)^2} \right] \\
 &= \frac{\pi P R^4}{8\nu} + \frac{(P_t - P) 32\pi R^2}{8\nu} \sum_{j=1}^n \frac{R^2 J_1\left(\alpha_j \frac{R}{R}\right) e^{-\frac{\nu}{R^2} \alpha_j^2 t}}{\alpha_j^4 \cdot J_1(\alpha_j)} \\
 &= \frac{\pi P R^4}{8\nu} + \frac{(P_t - P) 32\pi R^4}{8\nu} \sum_{j=1}^n \frac{e^{-\frac{\nu}{R^2} \alpha_j^2 t}}{\alpha_j^4} \\
 &= \frac{\pi P R^4}{8\nu} + \frac{(P_t - P) 32\pi R^4}{8\nu} \left\{ \frac{e^{-\frac{\nu}{R^2} \alpha_1^2 t}}{\alpha_1^4} + \frac{e^{-\frac{\nu}{R^2} \alpha_2^2 t}}{\alpha_2^4} + \dots \right\} \dots \dots \dots (2)
 \end{aligned}$$

ところで  $t \rightarrow \infty$  でないかぎり

$$0 < e^{-\frac{\nu}{R^2} \alpha_j^2 t} \leq 1$$

$$\alpha_1^4 < \alpha_2^4 < \alpha_3^4 < \dots$$

で、 $\alpha_1^4 = 33,443$ ,  $\alpha_2^4 = 928,445$  となり、(2) 式の第 2 項のカッコの中の第 2 項目以下は実用上の油圧に用いられる  $R$  と  $\nu$  については無視してさしつかえないとすれば、(2) 式は近似的に

$$Q = \frac{\pi P R^4}{8\nu} + \frac{(P_t - P)}{8\nu} \pi R^4 \cdot \frac{32}{\alpha_1^4} \cdot e^{-\frac{\nu}{R^2} \alpha_1^2 t} \dots \dots \dots (3)$$

となる。

ところでいま  $32/\alpha_1^4 \approx 1$  とみるとそのちがいは約  $-0.0431 e^{-\frac{\nu}{R^2} \alpha_1^2 t}$  であるから最大約 4% の誤差を許すとすれば上式は

$$Q = \frac{\pi P R^4}{8\nu} + \frac{\pi R^4}{8\nu} (P_t - P) e^{-\frac{\nu}{R^2} \alpha_1^2 t} \dots \dots \dots (4)$$

となる。

いま  $P_t=0, P=P_0 \cdot 1$  とすれば

$$Q = \frac{\pi R^4 P_0}{8\nu} \left( 1 - e^{-\frac{\nu}{R^2} \alpha_1^2 t} \right) \dots\dots\dots (5)$$

となり、両辺を  $t$  についてラプラス変換して

$$Q(s) = \frac{\pi R^4 P_0}{8\nu} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{\nu}{R^2} \alpha_1^2} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

(6) 式からもとの  $t$  に関する微分方程式はステップ入力に対して

$$T \left( \frac{dQ}{dt} \right) + Q = \frac{\pi P_0 R^4}{8\nu} \cdot 1 \dots\dots\dots (7)$$

となり伝達関数は一次比例要素

$$G(s) = \frac{k}{TS + 1} \dots\dots\dots (8)$$

ただし  $T \equiv \frac{R^2}{\nu \alpha_1^2}$ ,  $k$  は比例常数  $\left( \frac{\pi R^4 P_0}{8\nu} \right)$  として表現出来る  $\dots\dots\dots (9)$

したがって、近似的に線型の (7) 式で取り扱うことができ、脈動流れについては、Bode 線図の折点周波数は  $\nu \alpha_1^2 / R^2$  である。

これを、従来の近似的な取り扱い式としての管全断面を一つの流管として取扱った場合と比較してみることにする。

すなわち、管断面全体の平均流速を一次元の流管とみて運動方程式を適用し、瞬間管摩擦損失係数も、定常状態と同様に瞬間平均流速についての  $Re$  数について  $64/Re$  が成立する<sup>(1)</sup> とすれば、Hagen-Poiseulle の法則より、

$$u = \frac{R^2}{8\rho\nu} \cdot \frac{P}{l} \dots\dots\dots (10)$$

一次元的に力の均合いより、 $P$  は下流から上流むけにとって

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} - \lambda \frac{1}{D} \frac{u^2}{2g\rho} \dots\dots\dots (11)$$

$$\therefore \frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} - \frac{8\nu}{R^2} u \dots\dots\dots (12)$$

変形して、 $\frac{dP}{ax} = \frac{P}{l}$  とおき

$$\therefore \left( \frac{R^2}{8\nu} \right) \frac{du}{dt} + u = \left( \frac{R^2}{8\nu\rho} \right) \cdot \frac{P}{l} \dots\dots\dots (13)$$

が成立する。

管全断面についての流量で考えれば (13) 式は

$$\left( \frac{R^2}{8\nu} \right) \pi R^2 \frac{du}{dt} + \pi R^2 u = \frac{\pi R^4}{8\nu\rho} \cdot \frac{P}{l}$$

$$\therefore \left( \frac{R^2}{8\nu} \right) \frac{dQ}{at} + Q = \left( \frac{\pi R^4}{8\nu\rho} \right) \frac{P}{l} \dots\dots\dots (14)$$

いま定常状態のときの流量を  $Q_\infty$ ,  $P/l$  を  $P_\infty$  として瞬間の  $Q, P$  を

$$Q = Q_\infty \beta \dots\dots\dots (15)$$

$$P = P_\infty \alpha \dots\dots\dots (16)$$

と表わすと、Hagen-Poiseulle の関係から

$$Q_{\infty} = \frac{\pi R^4}{8\mu} P_{\infty} \text{ 故 (14) 式は}$$

$$\left(\frac{R^2}{8\nu}\right) \frac{d\beta}{dt} + \beta = \alpha \quad \dots\dots\dots (17)$$

となる。

このことは前の (7) 式の関係から

$$\frac{R^2}{8\nu} \approx \frac{R^2}{\nu\alpha_1^2} \text{ だから } \frac{R^2}{8\nu} \xi = \frac{R^2}{\nu\alpha_1^2} \text{ とすれば } \xi \approx 1.38 \text{ だけ (14) 式を補正する必要がある。}$$

また (3) 式から伝達関数について考えると、

$$\frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{\pi R^4}{8\nu} \left\{ \frac{T}{23.19} \frac{S+1}{TS+1} \right\} \quad \dots\dots\dots (18)$$

故、最低の折点周波数は(8)式の場合と変わらない。

次に求められた (8) 式の伝達関数を使って、水平直管の末端を急に開いた場合の過渡現象について考えてみる。

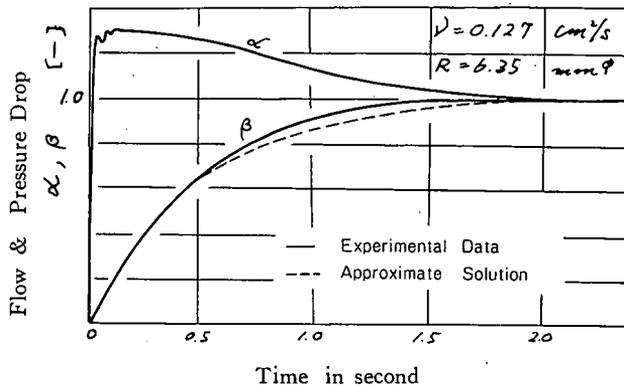


Fig. 2 The Transient Response of Opening Suddenly the Pipe End

この場合図 2 のような圧力変化を仮定して、入力関数を

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P(t)}{\partial x}\right) / \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P(t)}{\partial x}\right)_{t=\infty} = \alpha \\ &\equiv (P_0 - P_{max} + P_{\infty}) + (P_{max} - P_0) \cdot 1 + (P_{max} - P_{\infty}) e^{-\psi t} \quad \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

と近似的に表現する。

(19) 式をラプラス変換して  $P_0=0$  とおき

$$\begin{aligned} \alpha(s) = P(s) &= P_{max} \frac{1}{s} - (P_{max} - P_{\infty}) \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\psi}\right) \\ &= \frac{P_{max}}{s} - (P_{max} - P_{\infty}) \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s+\psi}\right) \quad \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

(8) 式をつかって

$$Q(s) = \frac{1}{ST+1} P(s)$$

$$= \frac{1}{TS+1} \left[ \frac{P_{\infty}}{s} + (P_{max}-P_{\infty}) \frac{1}{s+\phi} \right]$$

$$= P_{\infty} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{T}{TS+1} \right\} + \frac{P_{max}-P_{\infty}}{T} \cdot \frac{1}{S^2 + (\phi + T^{-1})S + \phi T^{-1}}$$

これを逆ラプラス変換して  $t$  領域にもどして

$$Q(t) = P_{\infty} (1 - e^{-\frac{t}{T}}) + T^{-1} (P_{max} - P_{\infty}) \cdot \frac{2}{|\phi - T^{-1}|} e^{-\frac{(\phi + T^{-1})}{2} t} \cdot \sin h \frac{\phi + T^{-1}}{2} t \dots \dots \dots (21)$$

をえる。また本実験の場合のように略  $T = \phi^{-1}$  の場合

$$Q(t) = P_{\infty} (1 - e^{-\frac{t}{T}}) + (P_{max} - P_{\infty}) \cdot t \cdot e^{-\frac{t}{T}} \dots \dots \dots (22)$$

また  $P(t) = \kappa(1 - e^{-\phi t})$  の形の inputs は (21) 式の第 2 項目が負となる形の出力が得られる。

### 3. 実験との比較

オーバ・フロータンクから直径  $\frac{1}{3}$ "  $\phi$  の水平円管を配し、その下流に北辰電機製  $\frac{3}{8}$ "  $\phi$  電磁流量計を接続し、その下流端に蝶型弁をつけて流量を調整した。下流の水平円管で助走区間を 2 m とり

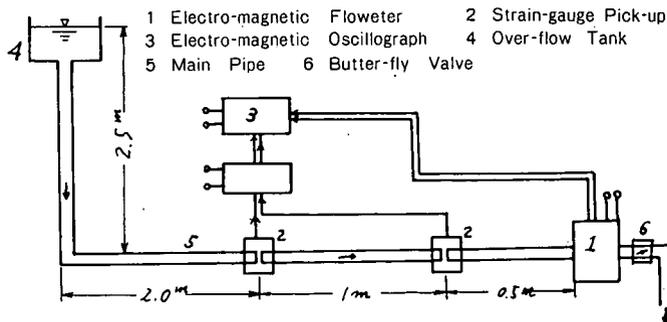


Fig. 3 Experimental Apparatus

十分に境界層が発達した個所に 1 m 区間にワイヤストレンゲージを貼付した圧力計を 2 個とりつけ圧力を測定した。圧力計に導かれる主管からのスリットは  $200 \mu$  にしても位相遅れが認められなかったので  $200 \mu$  のすきまから流体圧を圧力計に導入した。以上の装置により、瞬間圧力、流量を電磁オシログラフに記録した。脈動流は蝶型弁を回転させ、突変変動は管末端を手でふさいで、えたものである。

脈動流れについては図 4、管端急開の場合は図 5 に示してある。横軸は 2 点間の圧力差、縦軸は瞬間流量である。図中の直線は Hagen-Poiseuille の法則による定常時の関係である。図 4、図 5 をみて明らかなように  $\partial P / \partial Q$  を摂動法によって近似する場合に、その使用条件を注意しないと著しく誤差が大きくなることわがかる。

図 2、図 6 は、横軸に時間、縦軸に圧力差と流量をとって管端急開の場合の例である。図中破線は (22) 式による計算値である。このような場合は略 (22) 式、あるいは (21) 式で充分であると思われる。また脈動流れの図 4 から、位相遅れを求め折点周波数  $\alpha_{11} / R^2$  のボード線図から求めた計算値

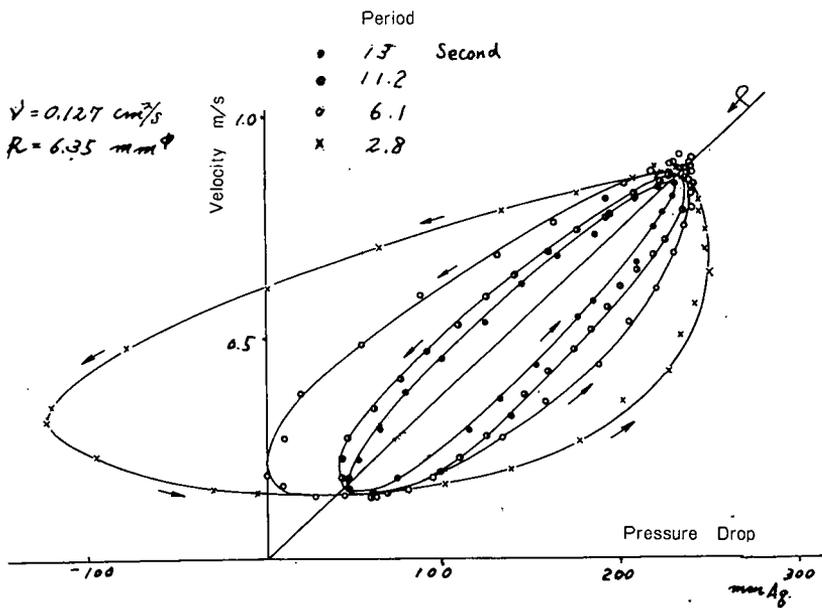


Fig. 4 Pressure Drop versus Flow in the Frequency Response

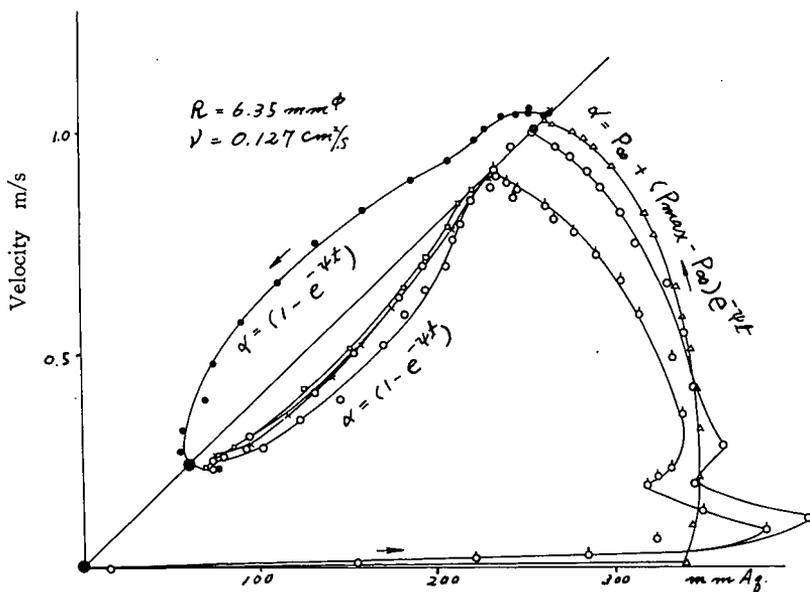


Fig. 5 Pressure Drop versus Flow in Pressure Drop the Transient Response

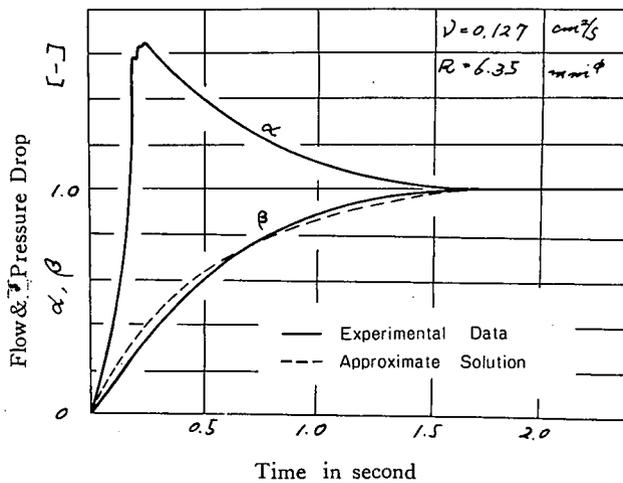


Fig. 6 The Transient Response of Opening Suddenly The Pipe End

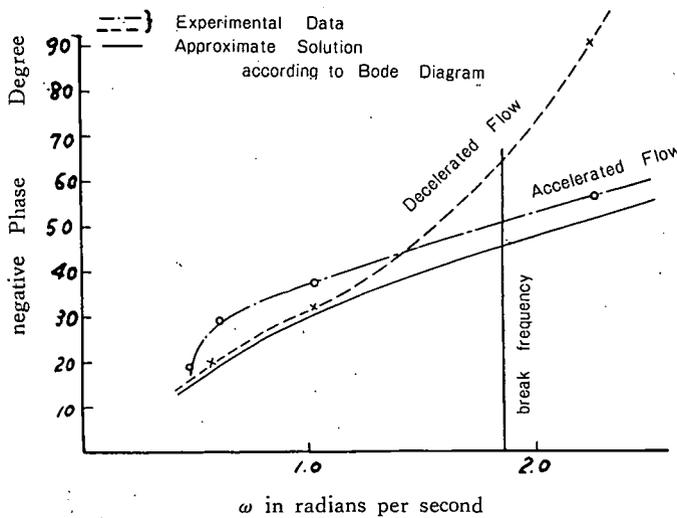


Fig. 7 Phase in the Frequency Response

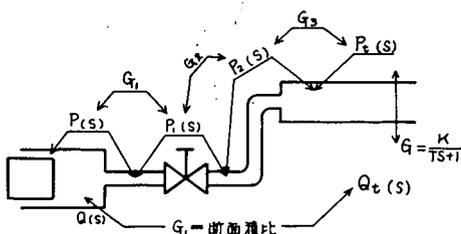


Fig. 8 Brock Diagram in a Case of Fluid Line

についての伝達関数を知れば求められることになる。すなわち 8 図の記号に従えば

$$Q(s) = (\text{断面積比}) \cdot G \left( \frac{K}{TS+1} \right) \cdot G_3 \cdot G_2 \cdot G_1 \cdot P(s)$$

と比較したものが図 7 である。

以上、直管の圧力流量間の伝達関数が求められたから、緩慢な変動にかぎり、異径管、弁、シリンダ等が直列につながった場合、その各個所の流量が非圧縮性の連続則を満足すれば、例えばシリンダ内の圧力、流量間の非定常特性は、直管部の伝達関数を媒介として、各個所間の圧力変動のみに

## 結 論

水平直管内の流れについて加速と減速とでは圧力流量特性は異なり、圧力変動の急激な場合は定常特性と著しくかけ離れた値となる。しかし緩慢な圧力変動に限って、本実験のような管径、粘度の範囲で、略近似的に一次の比例要素として取り扱いうることがわかった。ラムを押し上げる装置への接続する場合などには有効と思われる。助走区間を除き直管部のどこでも速度分布は同じだから、直管部の層流の場合は流体に着目した Lagrange 系とした場合の移動距離と Euler 系の経過時間が対応し、いわゆるはくり点付近の圧力勾配のある境界層内定常速度分布と同じ問題となると考えられる。したがって、乱流域の直管内非定常圧力損失についても、平板の圧力勾配のある境界層内速度分布に関する多くの研究との対比も興味ある問題である。

最後に本研究について直接御指導を賜った東京理科大学教授草間秀俊先生に深く感謝いたします。

## 参 考 文 献

- (1) 草間秀俊, 日本機械学会論文集, 第18巻, 66号, (昭27), p. 97.
- (2) K. Hirose and S. Fujita, Memories of the School of Engineering, Okayama University, Vol. 2, No. 1, April, 1967
- (3) E. G. Richardson, E. Tyler, Proc. of Phys. Soc. Vol. 42, Part 1. Dec. 16, 1929, p. 1.
- (4) R. Oldenburger and R. E. Goodson, Trans. of A. S. M. E. J. of Basic Engi. March, 1964, p. 1
- (5) H. Schlichting, Boundary Layer Theoy, McGRAW-Hill, p. 197.

(昭和44年 9月30日受理)

