

低えん堤下の揚圧力と浸透水流に関する研究

—ドレインの効用について—

中 崎 昭 人 ・ 桑 原 孝 雄
(農学部 構築工学研究室)

Study on the Uplift Pressure and the Percolating Flow under the Dam on a Permeable Foundation

(The Utility of the Drain under the Dam)

Akito NAKAZAKI, Takao KUWABARA
Laboratory of Construction Engineering, Faculty of Agriculture

Abstract

This reports develops the theory with the conformal mapping method on the uplift pressure and the percolating flow under a dam having the drain below it on a permeable foundation.

The results of numerical computations for the case of Fig. 4 shows as follows;

- 1) The uplift pressure decreases by 39% at the up stream side, by 78% at the down stream side of the drain and by 52% as a whole.
- 2) The flow nets of the down stream side of the drain become considerably coarse. From this point, in the region of the coarse flow nets, it is able to prevent the dam from the piping.
- 3) In the region of the up stream side and the under side of the drain; the flow nets become more close and, therefore, locational filters must be considered in the front and the bottom of the drain.

緒 論

一般に、えん堤を築造する場合、不透水性地盤上に設けるのが理想であるが、不透水性地盤が深いときは透水性地盤上に設置しなければならない。この場合、えん堤下の揚圧力およびえん堤の下流端における浸透水流によるパイピング現象などに対する防御措置を講じなければならない。したがって、従来から揚圧力を減じパイピング現象を防止するための止水壁設置、揚圧力を減じるための Weep Holl 設置の措置がとられている¹⁾。また、Weep Holl の代わりに Relief Well の設置が考えられ、解析の便宜上から Well を Trench とみなし、Trench の幅を無視した場合についての理論的解析が行なわれている²⁾。

ここでは、えん堤下に短い止水壁（この止水壁の中に排水管を設ける）を設け、その下に透水性地盤よりも十分透水性の大きい部分（ドレイン）を設けることによって、揚圧力がどの程度減少し、また、そのときの流線網を明らかにすることによって、パイピング現象を防止するためには、どの位置にどのような措置をほどこせば良いかを明らかにするために理論的解析を行なった。

なお、ここでの解析では、えん堤の上流側、下流側および、下方の浸透層が無限であるとし、模

型を与えて、えん堤下の揚圧力分布および流線網の計算を行なった。

理論的解析³⁻⁴⁾

えん堤下にドレインを有するときの揚圧力と浸透水流に関する理論的解析を行なうにあたり、さきに述べたように、えん堤の上流側，下流側および下方の浸透層が無限であるとし、えん堤下に短い止水壁を設け，その下にドレインを設置した場合について解析する。なお，ドレインに流入した水が，短い止水壁の中に設けられた排水管を通して，えん堤表面に流出するまでのエネルギー損失はないものとした。

この場合の略図を Fig. 1 (I) に示す。

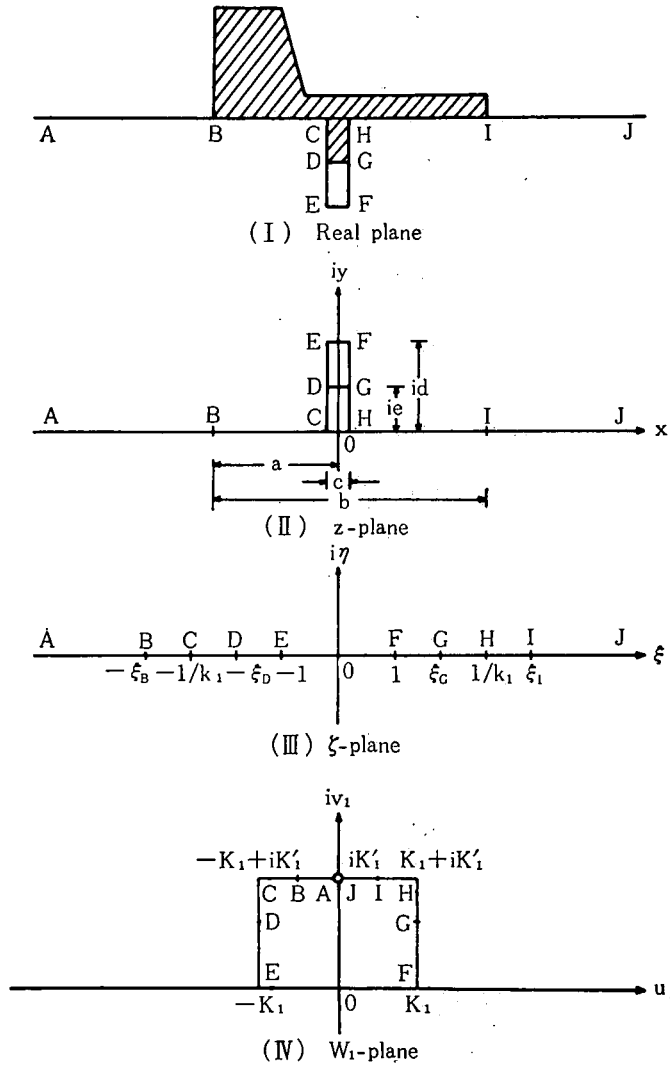


Fig. 1 Real Plane and Complex Plane

これを，Fig.1 (II) の z -平面に表わし，この (II) の C, E, F, H 点を Fig. 1 (III) の ζ -平面の C, E, F, H に対応させ， z -平面と ζ -平面との関係を求めるため媒介平面として，Fig. 1 (IV) のような W_1 -平面をとり

$$\zeta = sn W_1 \quad \dots\dots\dots(1)$$

とおくと、 z -平面と ζ -平面との関係は、Schwarz-Christoffel の定理により、

$$dz = \frac{C_1 k_1 (1 - \zeta^2)}{\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k_1^2 \zeta^2)}} d\zeta \quad \dots\dots\dots(2)$$

となり、式(1)および

$$d\zeta = cn W_1 dn W_1 dW_1$$

の関係を使って式(2)を書換えると

$$\begin{aligned} dz &= \frac{C_1 k_1 (1 - sn^2 W_1)}{\sqrt{(1 - sn^2 W_1)(1 - k_1^2 sn^2 W_1)}} cn W_1 dn W_1 dW_1 \\ &= -\frac{C_1}{k_1} (k_1'^2 - dn^2 W_1) dW_1, \end{aligned}$$

ゆえに

$$z = -\frac{C_1}{k_1} \{k_1'^2 W_1 - E(W_1)\} + C_2 \quad \dots\dots\dots(3)$$

となる。

つぎに式(3)の定数 C_1, C_2 を決定するために、 C, E, F, H 点の各平面に対する座標と $E(W_1)$ の値およびそれらを式(3)に代入したものを、Table 1. に示す。

Table 1.

Point	z -pl.	ζ -pl.	W_1 -pl.	$E(W_1)$
C	$-c/2$	$-1/k_1$	$-K_1 + iK_1'$	$-E_1 + i(K_1' - E_1')$
	$-\frac{c}{2} = -\frac{C_1}{k_1} \{k_1'^2(-K_1 + iK_1') + E_1 - i(K_1' - E_1')\} + C_2 \quad \dots\dots\dots(4)$			
E	$-c/2 + id$	-1	$-K_1$	$-E_1$
	$-\frac{c}{2} + id = -\frac{C_1}{k_1} \{k_1'^2(-K_1) + E_1\} + C_2 \quad \dots\dots\dots(5)$			
F	$c/2 + id$	1	K_1	E_1
	$\frac{c}{2} + id = -\frac{C_1}{k_1} \{k_1'^2(K_1) - E_1\} + C_2 \quad \dots\dots\dots(6)$			
H	$c/2$	$1/k_1$	$K_1 + iK_1'$	$E_1 + i(K_1' - E_1')$
	$\frac{c}{2} = -\frac{C_1}{k_1} \{k_1'^2(K_1 + iK_1') - E_1 - i(K_1' - E_1')\} + C_2 \quad \dots\dots\dots(7)$			

Table 1. の式(4)と式(7)より

$$C_1 = \frac{k_1 c}{2(E_1 - k_1'^2 K_1)} \quad \dots\dots\dots(8)$$

式(5)と式(6)より

$$C_2 = id \quad \dots\dots\dots(9)$$

式(8)と式(9)を式(3)に代入すると

$$z = -\frac{c}{2(E_1 - k_1'^2 K_1)} \{k_1'^2 W_1 - E(W_1)\} + id \quad \dots\dots\dots(10)$$

ゆえに、式(1)と式(10)により、 W_1 -平面を媒介として、 ζ -平面と z -平面との関係が得られる。つぎに、式(4)と式(5)より

$$d = \frac{C_1}{k_1} (E_1' - k_1'^2 K_1')$$

を得、これに式(8)を代入すると

$$\frac{d}{c} = \frac{E_1' - k_1'^2 K_1'}{2(E_1 - k_1'^2 K_1)} \quad \dots\dots\dots(11)$$

となり、 d/c と k_1 との関係が得られる。

つぎに、 z -平面の B, D, G, I の各点に対応する ζ -平面の B, D, G, I を求めるに、まず、 B, I 点は、

$$-a = -\frac{c}{2(E_1 - k_1'^2 K_1)} \{k_1'^2 u_B - E(u_B) - c n u_B dsu_B\}$$

$$(b-a) = -\frac{c}{2(E_1 - k_1'^2 K_1)} \{k_1'^2 u_I - E(u_I) - c n u_I dsu_I\}$$

より、 u_B, u_I を求め、

$$\zeta = k_1^{-1} n s u_B, \quad \zeta = k_1^{-1} n s u_I$$

より、 $-\xi_B, \xi_I$ を求める。

また、 D 点は式(10)中の $W_1, E(W_1)$ の代りに、

$$W_1 = -K_1 + i v_D$$

$$E(W_1) = E(-K_1 + i v_D)$$

$$= -E_1 + i v_D - i \bar{E}(v_D) + i k_1'^2 s \bar{n} v_D c \bar{\pi} v_D n \bar{d} v_D$$

を代入して、 $z = -c/2 + ie$ になる v_D を求める。 G 点は

$$W_1 = K_1 + i v_G$$

$$E(W_1) = E(K_1 + i v_G)$$

$$= E_1 + i v_G - i \bar{E}(v_G) + i k_1'^2 s \bar{n} v_G c \bar{\pi} v_G n \bar{d} v_G$$

を代入して、 $z = c/2 + ie$ になる v_G を求める。

つぎに、いま求めた v_D, v_G を用いて、 D, G 点の ζ の値を求めるが、 D 点の場合

$$\zeta = sn(-K_1 + i v_D) = -\bar{n} d v_D = -\xi_D,$$

G 点の場合

$$\zeta = sn(K_1 + i v_G) = \bar{n} d v_G = \xi_G,$$

となる。しかして、 $\xi_D = \xi_G$ である。

このようにして、 z -平面に対する ζ -平面の各点が定まったが、ここで新たに t -平面をとり、 ζ -平面と t -平面との対応を Fig. 2 のように定める。

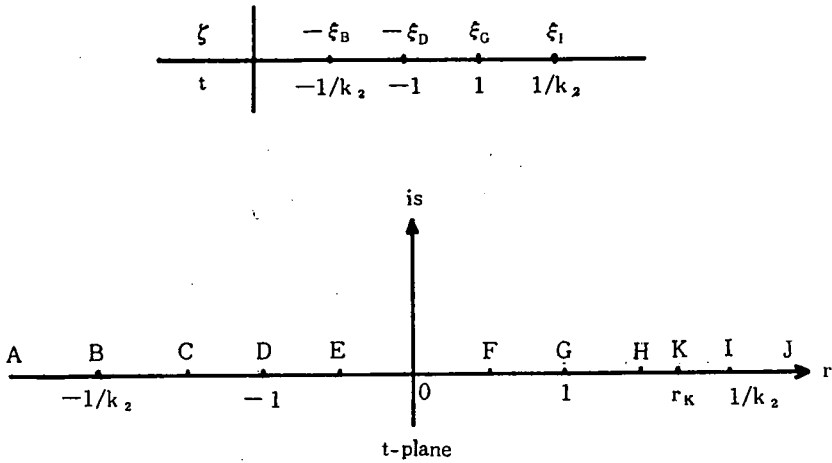


Fig. 2 The relation between ζ -plane and t -plane

しかして、 ζ -平面の B, D, G, I 点を t -平面の B, D, G, I 点に対応させるためには、これら 4 点の非調和比が等しくなければならない。

したがって、

$$\frac{\xi_I + \xi_B}{\xi_I + \xi_D} \cdot \frac{\xi_G + \xi_D}{\xi_G + \xi_B} = A$$

とおくと

$$\frac{4k_2}{(1+k_2)^2} = A$$

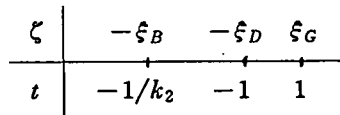
$$\therefore k_2 = -1 + \frac{2}{A}(1 \pm \sqrt{1-A})$$

しかるに、 $k_2 < 1$ であるから負号をとって

$$k_2 = -1 + \frac{2}{A}(1 - \sqrt{1-A}) \quad \dots\dots\dots(12)$$

である。

また、 ζ -平面と t -平面との関係は両平面の B, D, G 点の関係が



であるから

$$\frac{\zeta + \xi_B}{\zeta + \xi_D} \cdot \frac{\xi_G + \xi_D}{\xi_G + \xi_B} = \frac{k_2 t + 1}{t + 1} \cdot \frac{2}{1 + k_2}$$

となり、いま

$$\frac{\xi_G + \xi_D}{\xi_G + \xi_B} \equiv B, \quad \frac{2}{1 + k_2} \equiv C$$

とおけば

$$\zeta = \frac{(Ck_2\xi_D - B\xi_B)t + (C\xi_D - B\xi_B)}{(B - Ck_2)t + (B - C)} \dots\dots(13)$$

となり、 t が与えられれば ζ が求められる。

つぎに、浸透層におけるポテンシャル関数 ϕ および流線関数 ψ を求めるに、その境界条件ならびに W -平面および W_2 -平面を Fig. 3 (I), (II), (III) に示す。

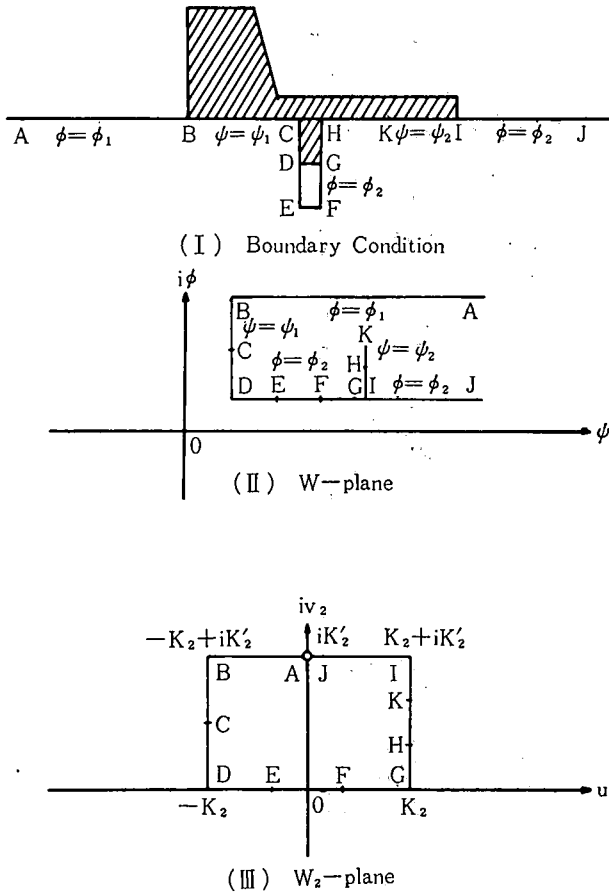


Fig. 3 Boundary Condition, W -plane and W_2 -plane.

すなわち、 W -平面と t -平面との関係を求めるために媒介平面として W_2 -平面をとり、 $t = sn W_2$ とおくと、Schwarz-Christoffel の定理により

$$\begin{aligned} dW &= \frac{C_3 k_2 (sn W_2 - r_K)}{\sqrt{(1 - k_2^2 sn^2 W_2)(1 - sn^2 W_2)}} cn W_2 dn W_2 dW_2 \\ &= C_3 k_2 (sn W_2 - r_K) dW_2 \end{aligned}$$

したがって

$$W = C_3 \log(dn W_2 - k_2 cn W_2) - C_3 k_2 r_K W_2 + C_4 \dots\dots(14)$$

となる。この式(14)の C_3, C_4 を決定するために、 B, D, G, I 点の各平面に対する座標と dnW_2, cnW_2 の値およびそれらを式(14)に代入したものを Table 2. に示す。

Table 2.

Point	t -pl.	W -pl.	W_2 -pl.	dnW_2	cnW_2
B	$-1/k_2$	$\phi_1 + i\phi_1$	$-K_2 + iK'_2$	0	ik'_2/k_2
$\phi_1 + i\phi_1 = C_3 \log(-ik'_2) - C_3 k_2 r_K (-K_2 + iK'_2) + C_4$ (15)					
D	-1	$\phi_1 + i\phi_2$	$-K_2$	k'_2	0
$\phi_1 + i\phi_2 = C_3 \log k'_2 + C_3 k_2 r_K K_2 + C_4$ (16)					
G	1	$\phi_2 + i\phi_2$	K_2	k'_2	0
$\phi_2 + i\phi_2 = C_3 \log k'_2 - C_3 k_2 r_K K_2 + C_4$ (17)					
I	$1/k_2$	$\phi_2 + i\phi_2$	$K_2 + iK'_2$	0	$-ik'_2/k_2$
$\phi_2 + i\phi_2 = C_3 \log(ik'_2) - C_3 k_2 r_K (K_2 + iK'_2) + C_4$ (18)					

Table 2. の式(17)と式(18)より

$$r_K = \frac{\pi}{2k_2 K'_2} \tag{19}$$

となる。式(15)と式(16)および、式(19)より

$$C_3 = -\frac{\phi_1 - \phi_2}{\pi} = -\frac{\Delta\phi}{\pi} \tag{20}$$

ここに、 $\Delta\phi \equiv \phi_1 - \phi_2$

が得られ、さらに式(16), (17), (19)および式(20)より

$$\phi_2 = \phi_1 + \Delta\phi \frac{K_2}{K'_2} \tag{21}$$

が得られる。

式(19), (20)を式(16)に代入すると

$$C_4 = \frac{\Delta\phi}{\pi} \left(\ln k'_2 + \frac{\pi}{2} \frac{K_2}{K'_2} \right) + \phi_1 + i\phi_2 \tag{22}$$

式(19), (20)および式(22)を式(14)に代入すると

$$W = -\frac{\Delta\phi}{\pi} \log(dnW_2 - k_2 cnW_2) + \frac{\Delta\phi}{2K'_2} W_2 + \frac{\Delta\phi}{\pi} \left(\ln k'_2 + \frac{\pi}{2} \frac{K_2}{K'_2} \right) + \phi_1 + i\phi_2$$

を得る。しかるに、 $W_2 = u_2 + iv_2$ であり

$$dnW_2 = \frac{dn u_2 \overline{cn v_2} - ik_2^2 sn u_2 cn u_2 \overline{sn v_2}}{cn^2 v_2 + k_2^2 sn^2 u_2 \overline{sn^2 v_2}}$$

$$cn W_2 = \frac{cn u_2 \overline{cn} v_2 - i sn u_2 \overline{dn} u_2 \overline{sn} v_2 \overline{dn} v_2}{\overline{cn}^2 v_2 + k_2^2 sn^2 u_2 \overline{sn}^2 v_2}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} dn W_2 - k_2 cn W_2 &= \frac{dn u_2 \overline{cn} v_2 \overline{dn} v_2 - k_2 cn u_2 \overline{cn} v_2}{\overline{cn}^2 v_2 + k_2^2 sn^2 u_2 \overline{sn}^2 v_2} \\ &+ i \frac{k_2 sn u_2 \overline{dn} u_2 \overline{sn} v_2 \overline{dn} v_2 - k_2^2 sn u_2 cn u_2 \overline{sn} v_2}{\overline{cn}^2 v_2 + k_2^2 sn^2 u_2 \overline{sn}^2 v_2} \end{aligned}$$

となり、ここで

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv dn u_2 \overline{cn} v_2 \overline{dn} v_2 - k_2 cn u_2 \overline{cn} v_2 \\ \beta &\equiv k_2 sn u_2 \overline{dn} u_2 \overline{sn} v_2 \overline{dn} v_2 - k_2^2 sn u_2 cn u_2 \overline{sn} v_2 \\ \gamma &\equiv \overline{cn}^2 v_2 + k_2^2 sn^2 u_2 \overline{sn}^2 v_2 \end{aligned}$$

とおくと

$$dn W_2 - k_2 cn W_2 = \frac{\alpha}{\gamma} + i \frac{\beta}{\gamma}$$

したがって

$$\begin{aligned} \log(dn W_2 - k_2 cn W_2) &= \log\left(\frac{\alpha}{\gamma} + i \frac{\beta}{\gamma}\right) \\ &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\gamma^2}\right) + i \tan^{-1} \frac{\beta}{\alpha} \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned} W &= \left[\psi_1 + \frac{4\phi}{\pi} \left\{ \ln k_2' + \frac{\pi}{2K_2'} (K_2 + u_2) - \frac{1}{2} \ln \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\gamma^2} \right\} \right] \\ &+ i \left[\phi_2 + \frac{4\phi}{\pi} \left(\frac{\pi}{2K_2'} v_2 - \tan^{-1} \frac{\beta}{\alpha} \right) \right] \end{aligned}$$

となる。ゆえに

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \phi_2 + \frac{4\phi}{\pi} \left(\frac{\pi}{2K_2'} v_2 - \tan^{-1} \frac{\beta}{\alpha} \right) \\ \phi &= \phi_1 + \frac{4\phi}{\pi} \left\{ \ln k_2' + \frac{\pi}{2K_2'} (K_2 + u_2) - \frac{1}{2} \ln \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\gamma^2} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(23)$$

である。また、 $t = sn W_2$ で $t = r + is$, $W_2 = u_2 + iv_2$ であるから

$$\begin{aligned} r + is &= sn(u_2 + iv_2) \\ &= \frac{sn u_2 \overline{dn} v_2 + icn u_2 \overline{dn} u_2 \overline{sn} v_2 \overline{cn} v_2}{\overline{cn}^2 v_2 + k_2^2 sn^2 u_2 \overline{sn}^2 v_2} \end{aligned}$$

ゆえに

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{sn u_2 \overline{dn} v_2}{c \bar{n}^2 v_2 + k_2^2 sn^2 u_2 \overline{sn}^2 v_2} \\ s &= \frac{cnu_2 \overline{dn} u_2 \overline{sn} v_2 \overline{cn} v_2}{c \bar{n}^2 v_2 + k_2^2 sn^2 u_2 \overline{sn}^2 v_2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(24)$$

となる。

以上により、式(11)を満足する k_1 を母数とする W_1 -平面を媒介平面として、式(1)と式(10)によって、 ζ -平面と z -平面との関係が求まり、一方、式(12)によって k_2 を求め、これを母数とする W_2 -平面を媒介平面として、式(23)と式(24)により、 W -平面と t -平面の関係が定まり、また、式(13)によって t -平面と ζ -平面との関係が求められるので、結局、 W -平面と z -平面との関係が求められることになり、問題は解決する。

計 算 例⁵⁾

Fig. 1 (II) において、 $a=5.33$ m, $b=10.66$ m, $c=0.5$ m, $d=2.21$ m, $e=0.92$ m とした場合の流線網およびえん堤底面に加わる揚圧力の分布を求める。

まず、 z -平面と ζ -平面の関係を求めるにあたり、 k_1 の値を決定する。これには、式(11)の関係から求めた Table 3. の数表を利用する。

Table 3. The relation between k_1 and d/c

k_1	k'_1	E_1	E'_1	K_1	K'_1	d/c
sin 0°	cos 0°	1.57080	1.00000	1.57080	∞	∞
" 5°	" 5°	1.56781	1.01266	1.57379	3.83174	81.9604
" 10°	" 10°	1.55889	1.04011	1.58284	3.15339	19.8783
" 20°	" 20°	1.52380	1.11838	1.62003	2.50455	4.4243
" 30°	" 30°	1.40746	1.21106	1.68575	2.15652	2.3473
" 40°	" 40°	1.39314	1.30554	1.78677	1.93558	0.7338
" 50°	" 50°	1.30554	1.39314	1.93558	1.78677	0.3407
" 60°	" 60°	1.21106	1.40746	2.15652	1.68575	0.1065
" 70°	" 70°	1.11838	1.52380	2.50455	1.62003	0.0565
" 80°	" 80°	1.04011	1.55889	3.15339	1.58284	0.0126
" 90°	" 90°	1.00000	1.57080	∞	1.57080	0.0000

いまの場合 $c=0.5$ m, $d=2.21$ m であるから、 $d/c=4.42$ となり、これに相当する k_1 は表より、 $k_1=\sin 20^\circ$ である。したがって、 $\sin 20^\circ$ を母数とする W_1 -平面を媒介平面として、 z -平面と ζ -平面の関係を計算し、 z -平面の B, D, G, I 点に対応する ζ -平面の $\xi_B, \xi_D, \xi_G, \xi_I$ の値を求めると

$$\xi_B = \xi_I = 6.44007, \quad \xi_D = \xi_G = 2.71991$$

となる。これらより、式(12)によって k_2 の値を求めれば

$$k_2 = 0.42234 = \sin 25^\circ$$

となる。この k_2 を母数とする W_2 -平面を媒介平面として、 W -平面と t -平面との関係を計算し、さらに式(13)によって、 t -平面と ζ -平面との関係を計算すると、 W -平面と ζ -平面の関係が求められる。この関係と、さきに計算された、 z -平面と ζ -平面の関係から、 z -平面と W -平面の関係を求め、その結果を図示すると Fig. 4 のようになる。

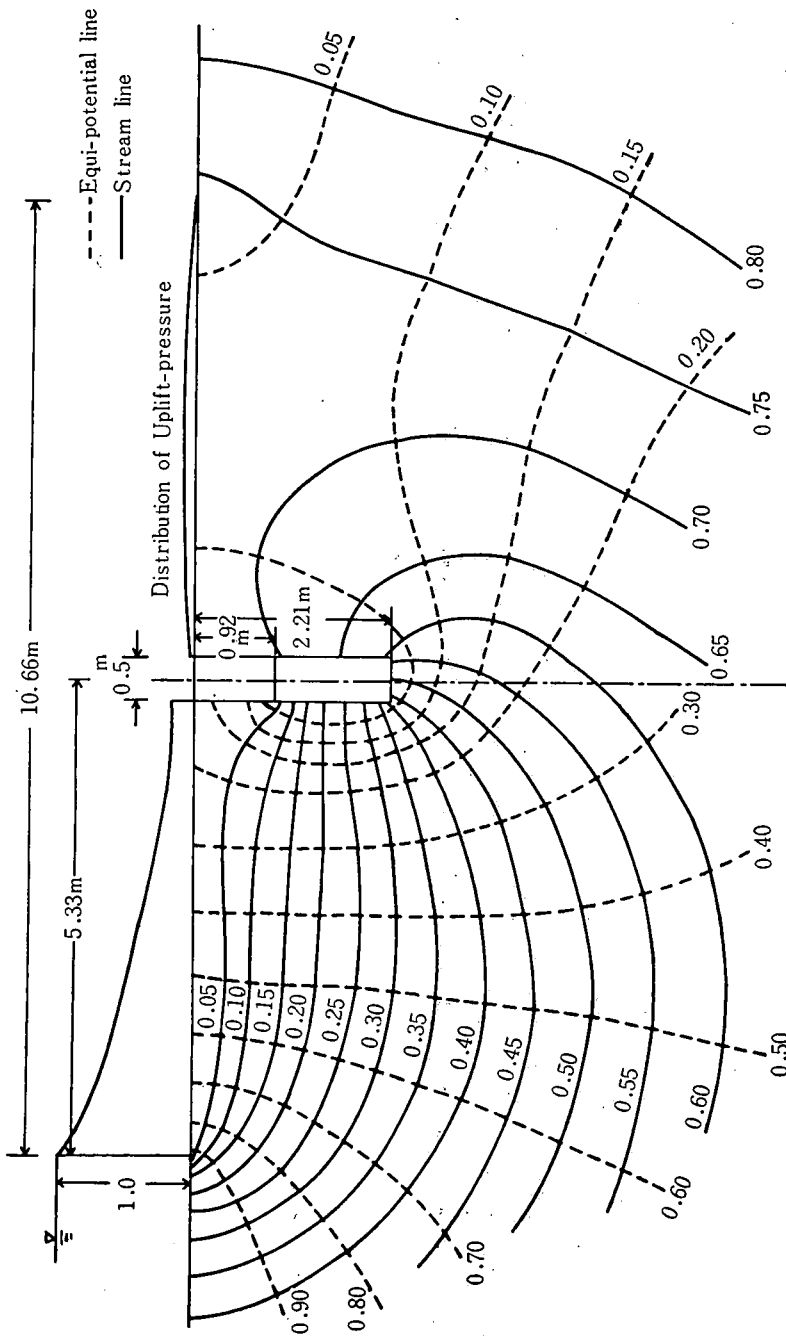


Fig. 4 Flow Net and Distribution of Uplift-pressure

考 察

Fig. 4 は、えん堤の中央下にドレインを設置した場合の一例であるが、これからつぎのようなことが考察される。

1) 揚圧力について

Fig. 5 に上流側、下流側および、下方無限の透水性地盤上に、えん堤がある場合の揚圧力分布と Fig. 4 の揚圧力分布を併記して図示してある。

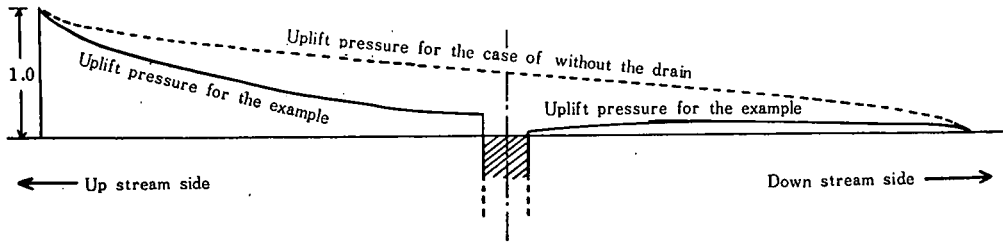


Fig. 5 The distribution of Uplift pressure

この図からドレインの上流側のえん堤底面に作用する揚圧力は、ドレインを設けることによって、約 39% 減少し、また、その下流側では実に約 78% 減少していることがみられ、えん堤底面全体としては約 52% 減少している。したがって、えん堤下にドレインを設けることによって、えん堤底面に作用する揚圧力が減少し、えん堤の安全上好ましい結果になる。

2) 流線網について

Fig. 4 にみられるように、ドレインの上流側および、その下方において流線網が密になっているが、その下流側では流線網が極端に粗になっている。このことから、ドレインの上流側および下方では浸透流速が大きい、その下流側では極度に浸透流速が小さくなることがみとめられる。すなわち、えん堤下のパイピングを防御するためには、えん堤下の浸透層の性状をよく考慮した上で、ドレインの上流側および、その下方の限られた部分にフィルタとしての役割を果す層を設けることによって達せられると考えられ、ドレインの下流側ではパイピングに対する考慮はほとんど払われなくてもよいと考えられる。

結 論

低えん堤が透水性地盤上にある場合、そのえん堤下にドレインを設けることにより、えん堤底面に作用する揚圧力を減少させることができ、また、透水性地盤の性状をよく考慮した上で、ドレインの上流側および、下方の限られた部分にフィルタを設けて、パイピングを防止すればよいことが認められた。

すなわち、ドレインを設置することによって、揚圧力が減少して、えん堤の安定上好ましい結果を与え、また、パイピング防御のためのフィルタの設置箇所が限定されるという効果がみとめられる。

参 考 文 献

- 1) 農林省農地局：土地改良事業計画設計基準，昭和 42 年 10 月改訂，p. 39
- 2) 田中宏平：低堰堤における Relief Well の効用について，農業土木研究，22 巻 1 号 昭和 29 年 5 月

- 3) 友近 晋：楢円函数論，共立出版株式会社 昭和 33 年
- 4) 竹内端三：函数論，下卷，裳華房，昭和 37 年
- 5) 林 桂一著，森口繁一増補：高等函数表 昭和 37 年

(昭和 46 年 9 月 9 日 受理)