

並列止水壁をもつ低えん堤下の浸透流に関する研究

I. 2列の止水壁の長さが浸透流に及ぼす影響について (透水性基盤が下方無限の場合)

中 崎 昭 人 ・ 永 吉 正 博
(農学部 構築工学研究室)

Studies on the Percolating Flow under the Dam with Symmetrical Rows of Pilings

I. The Effects of the Length of Two Symmetrical Rows of Pilings on the Percolating Flow (Depth of Permeable Layer Unlimited)

Akito NAKAZAKI and Masahiro NAGAYOSHI
Laboratory of Construction Engineering, Faculty of Agriculture

Abstract: This paper develops the theory, by means of the Schwarz-Christoffel transformation, on the percolating flow under the dam on a permeable layer of infinite extent with two symmetrical rows of pilings.

As the results of numerical computations with the theoretical solution, the following conclusions were obtained:

- 1) With the increase of the length of pilings, at the area between them, the sphere in which the values of stream function are small becomes wider, and the percolating velocity becomes smaller exponentially.
- 2) The maximum percolating velocity on the symmetrical axis of pilings occurs at somewhat lowered situation from the point that is equivalent to the tips of pilings.

緒 論

透水性基盤上に水理構造物を設置する場合、浸透水流によるパイピング現象に対する防御措置として、いわゆる浸透路長を長くするために止水壁が設けられることが多い。

そのとき、止水壁が並列に設置される場合に、並列止水壁の長さの和がその間隔より小さくないと、浸透路長として止水壁の長さの2倍をとってはいけないとされている¹⁾。

しかしながら、並列止水壁の長さの和がその間隔より大きい場合には、浸透路長としてどのようにとればよいかの明確な基準は示されていない。

筆者らは、それをどのように考うたらよいかの目安を得ようとして、理論的および実験的に研究を行なっている。

従来、栗津²⁾も同様な研究を行なっているが、その解析において大きな仮定が含まれており、正確な解析解を得るに至っていない。また、本間、浜田³⁾は並列止水壁をもつ低えん堤の底面および止水壁面に沿う速度分布、揚圧力分布を求めているが、詳細な浸透水流の様相を示すまでに至っていない。

本論文では、透水性基盤が上・下流方向および下方に無限で、長さの等しい並列止水壁が水理構造物の両端に設置されている最もシンプルな場合についての等角写像法による流れの理論解析と、それによって並列止水壁の長さが流れにどのような影響を与えるかについて二、三の計算結果を示し、その考察について報告する。

理論的解析⁴⁾

底面の両端に長さの等しい並列止水壁を有する低えん堤下の浸透流に関する理論的解析を行なうにあたり、さきに述べたように、低えん堤の上流側、下流側および下方の透水性基盤が無限であるとする。

この略図を Fig 1.(I) に示す。

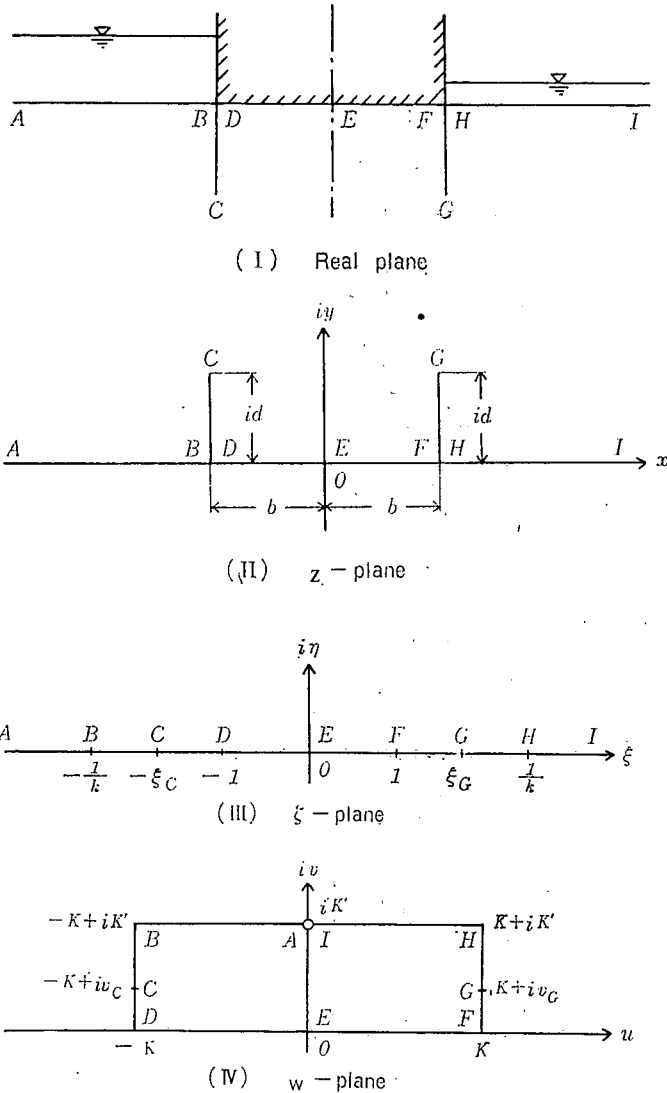


Fig. 1. Real plane and Complex planes.

これを Fig. 1. (II) の z-plane に表わし、この平面の A, B, C, D, E, F, G, H, I の各点をそれぞれ Fig. 1. (III) の ζ-plane の A, B, C, D, E, F, G, H, I に対応させると、z-plane と ζ-plane との関係は Schwarz-Christoffel の変換により

$$dz = \frac{C_1 k (\zeta^2 - \xi_c^2)}{\sqrt{(1 - \zeta^2)(1 - k^2 \zeta^2)}} d\zeta (\because \xi_c = \xi_a) \dots \dots \dots (1)$$

となる。

ここで、媒介平面として Fig. 1. (IV) のような w -plane をとり

$$\zeta = \operatorname{sn} w \quad \dots\dots\dots (2)$$

とおくと

$$d\zeta = \operatorname{cn} w \operatorname{dn} w dw$$

となり、これらを式(1)に代入して書換えると

$$dz = -\frac{C_1}{k} \left\{ \operatorname{dn}^2 w + (k^2 \xi_0^2 - 1) \right\} dw$$

となり、これを積分して

$$z = -\frac{C_1}{k} E(w) - \frac{C_1}{k} (k^2 \xi_0^2 - 1) w + C_2 \quad \dots\dots\dots (3)$$

となる。

式(3)の C_1 , C_2 および ξ_0 の値を求めるために、次のように各点の境界条件を式(3)に代入する。すなわち

B 点では $z = -b$, $w = -K + iK'$

$$\therefore -b = -\frac{C_1}{k} \left\{ -E + i(K' - E') \right\} - \frac{C_1}{k} (k^2 \xi_0^2 - 1) (-K + iK') + C_2 \quad \dots\dots (4)$$

D 点では $z = -b$, $w = -K$

$$\therefore -b = \frac{C_1}{k} E + \frac{C_1}{k} K (k^2 \xi_0^2 - 1) + C_2 \quad \dots\dots\dots (5)$$

いま、式(4)から式(5)を引いて整理すると

$$\xi_0 = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{E'}{K'}} \quad \dots\dots\dots (6)$$

が得られる。

E 点では $z = 0$, $w = 0$ から

$$C_2 = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

F 点では $z = b$, $w = K$

$$\therefore b = -\frac{C_1}{k} E - \frac{C_1}{k} (k^2 \xi_0^2 - 1) K + C_2$$

これに、式(6), (7)を代入すると

$$b = -\frac{C_1}{kK'} (EK' + E'K - KK')$$

となり、ここで Legendre の関係式により

$$C_1 = -\frac{2bkK'}{\pi} \quad \dots\dots\dots (8)$$

となる。

したがって、式(6), (7), (8)を式(3)に代入すると

$$z = \frac{2bK'}{\pi} \left\{ E(w) + \left(\frac{E'}{K'} - 1 \right) w \right\} \dots\dots\dots (9)$$

となる。

しかるに、 $z=x+iy$, $w=u+iv$ であるから

$$x + iy = \frac{2bK'}{\pi} \left\{ E(u+iv) + \left(\frac{E'}{K'} - 1 \right) (u+iv) \right\}$$

となり、ここで

$$\begin{aligned} A &\equiv k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \bar{\operatorname{sn}}^2 v \\ B &\equiv \operatorname{dn}^2 u \bar{\operatorname{sn}} v \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v \\ C &\equiv \bar{\operatorname{cn}}^2 v + k^2 \operatorname{sn}^2 u \bar{\operatorname{sn}}^2 v \end{aligned}$$

とにおいて、上式を整理すると

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{2bK'}{\pi} \left\{ E(u) + \frac{A}{C} + \left(\frac{E'}{K'} - 1 \right) u \right\} \\ y &= \frac{2bK'}{\pi} \left\{ \frac{E'}{K'} v + \frac{B}{C} - \bar{E}(v) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

が得られる。

さらに、G点では $\zeta = \xi_G (= \xi_C)$, $w = K + iv_G$ であるから、式(2)により

$$\xi_G (= \xi_C) = \operatorname{sn}(K + iv_G) = \frac{1}{\operatorname{dn} v_G}$$

となり、これと式(6)とから

$$\frac{1}{\operatorname{dn} v_G} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{E'}{K'}} \dots\dots\dots (11)$$

となる。また、同点では $z = b + id$ であるから、式(9)により

$$b + id = \frac{2bK'}{\pi} \left\{ E(K + iv_G) + \left(\frac{E'}{K'} - 1 \right) (K + iv_G) \right\}$$

となり、これを整理して書換えると

$$\frac{d}{b} = \frac{2K'}{\pi} \left\{ \frac{E'}{K'} v_G - \bar{E}(v_G) + \bar{\operatorname{sn}} v_G \operatorname{cn} v_G \frac{k'^2}{k} \sqrt{\frac{E'}{K'}} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

となる。

すなわち、式(11), (12)により、 d と b との関係によって母数 k が定まり、それによる w -plane の $ABDFHI$ 内の u, v に対する z -plane の x, y が式(12)によって決定される。

つぎに、式(2)により、 ζ -plane と w -plane との関係を求めると

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} v}{\bar{\operatorname{cn}}^2 v + k^2 \operatorname{sn}^2 u \bar{\operatorname{sn}}^2 v} \\ \eta &= \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \bar{\operatorname{sn}} v \operatorname{cn} v}{\bar{\operatorname{cn}}^2 v + k^2 \operatorname{sn}^2 u \bar{\operatorname{sn}}^2 v} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

が得られる。

この式(13)によって、 w -plane の $A B D F H I$ 内の u, v に対する ζ -plane の ξ, η が決定される。

したがって、式(10)と式(13)により、 w -plane を媒介として z -plane と ζ -plane の関係を知ることができる。

また、透水層におけるポテンシャル関数 ϕ および流関数 ψ を求めるために、その境界条件ならびに ω -plane を Fig. 2. (I) (II) に示す。

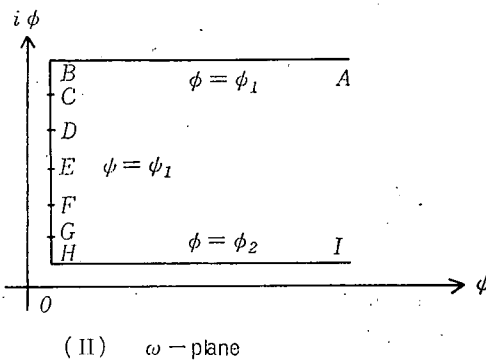
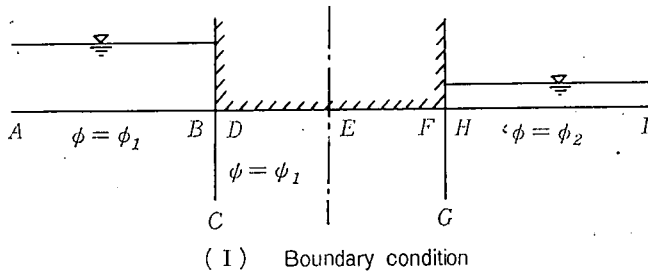


Fig. 2. Boundary condition and ω -plane.

ω -plane と ζ -plane との関係は Schwarz-Christoffel の変換により

$$d\omega = \frac{C_3}{\sqrt{\zeta^2 - \frac{1}{k^2}}} d\zeta \quad \dots\dots\dots (14)$$

となる。

これを積分すると

$$\omega = C_3 \log \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - \frac{1}{k^2}} \right) + C_4 \quad \dots\dots\dots (15)$$

となる。

式(15)の C_3, C_4 の値を求めるために、それぞれ B, H 点の境界条件を式(15)に代入する。すなわち

$$\begin{aligned} B \text{点では} \quad \omega &= \psi_1 + i\phi_1, \quad \zeta = -\frac{1}{k} \\ \therefore \psi_1 + i\phi_1 &= -C_3 \ln k + i C_3 \pi + C_4 \quad \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

$$H \text{点では} \quad \omega = \psi_1 + i\phi_2, \quad \zeta = \frac{1}{k}$$

$$\therefore \psi_1 + i\phi_2 = -C_3 \ln k + C_4 \quad \dots\dots\dots (17)$$

これらの式(16), (17)から

$$\left. \begin{aligned} C_3 &= \frac{\Delta\phi}{\pi} \quad (\Delta\phi \equiv \phi_1 - \phi_2) \\ C_4 &= \psi_1 + \frac{\Delta\phi}{\pi} \ln k + i\phi_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

が得られる。

式(18)を式(15)に代入し, さらに

$$\begin{aligned} P &\equiv \xi^2 - \eta^2 - \frac{1}{k^2} \\ Q &\equiv 2\xi\eta \end{aligned}$$

とにおいて整理すると, $\psi_1 = 0$ であるから

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \frac{\Delta\phi}{\pi} \tan^{-1} \frac{(P^2 + Q^2)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{Q}{P}\right) + \eta}{(P^2 + Q^2)^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{Q}{P}\right) + \xi} + \phi_2 \\ \psi &= \frac{\Delta\phi}{2\pi} \ln k^2 \left[\left\{ (P^2 + Q^2)^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{Q}{P}\right) + \xi \right\}^2 + \left\{ (P^2 + Q^2)^{\frac{1}{2}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \sin\left(\frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{Q}{P}\right) + \eta \right\}^2 \right] \end{aligned} \right\} (19)$$

が得られる。

したがって, 式(19)によって ω -plane と ζ -plane との関係が求められることになり, さきに式(10), (13)によって z -plane と ζ -plane との関係が求められているので, z -plane と ω -plane との関係が求められることになる。

ここで, さらに z -plane の iy 軸上で iy 軸を垂直に横切る浸透水の流速を求めるための理論的解析を進める。

式(1)より

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{C_1 k (\zeta^2 - \xi_c^2)}{(1 - \zeta^2)^{\frac{1}{2}} (1 - k^2 \zeta^2)^{\frac{1}{2}}}$$

であり, また式(14)より

$$\frac{d\omega}{d\zeta} = \frac{C_3 k}{(k^2 \zeta^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}$$

である。したがって

$$\frac{d\omega}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} = -i \frac{C_3}{C_1} \frac{(1 - \zeta^2)^{\frac{1}{2}}}{(\zeta^2 - \xi_c^2)}$$

となる。また, z -plane の iy と ζ plane の $i\eta$ とが対応するから, $x=0$ は $\xi=0$ を意味する。ゆえに

$$\frac{d\omega}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} \Big|_{z=0} = -i \frac{\Delta\phi}{2bkK'} \cdot \frac{(1+\eta^2)^{\frac{1}{2}}}{\eta^2 + \xi c^2}$$

となる。

しかるに一方、Cauchy-Riemann の偏微分方程式を用いて

$$\frac{d\omega}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} = \frac{\partial\psi}{\partial x} + i \frac{\partial\phi}{\partial x}$$

であるから

$$-\frac{\partial\phi}{\partial x} \Big|_{z=0} = \frac{\Delta\phi}{2bkK'} \frac{(1+\eta^2)^{\frac{1}{2}}}{\eta^2 + \xi c^2} \dots\dots\dots (20)$$

となる。また、 $x=0$ は w -plane で $u=0$ をも意味するから、式(10)において

$$y = \frac{2bK'}{\pi} \left\{ \frac{E'}{K'} v + \frac{\overline{\text{sn}} v \overline{\text{dn}} v}{\text{cn} v} - \overline{E}(v) \right\} \dots\dots\dots (21)$$

であり、さらに式(13)において

$$\eta = \frac{\overline{\text{sn}} v}{\text{cn} v} \dots\dots\dots (22)$$

である。

したがって、 v の値を与えることによって、式(21)、(22)により y 、 η が求められ、その η の値を式(20)に代入すると $-\partial\phi/\partial x|_{z=0}$ が求められ、 $i y$ 軸上の流速が求まる。

計算結果とその考察

並列止水壁の長さが浸透流にどのような影響を及ぼすかを知るために、止水壁の長さを種々に変えて計算を行なう必要がある。

そこで、 k と、並列止水壁の長さ d と止水壁の間隔の半分 b との比、 d/b との関係を図に示すと Fig. 3 のようになる。

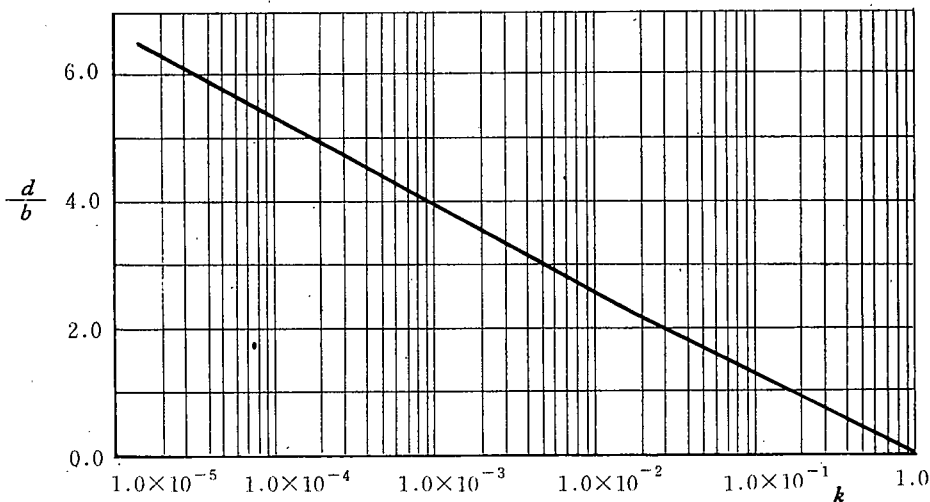


Fig. 3. Relationship between d/b and k .

さて、いま $b=1$ とし、 d/b として 0.41, 0.68, 0.90, 1.27, 1.58, 1.96, 2.58, 3.02, 3.65, 4.22, 5.00 および 5.97 の 12 通りを選んで計算を行なったが、そのうち、 d/b が 1.27, 1.96 および 3.65 の場合についての流線網の上流側半分を Fig. 4 に示す。なお、 $\Delta\phi=100$ として計算したものである。

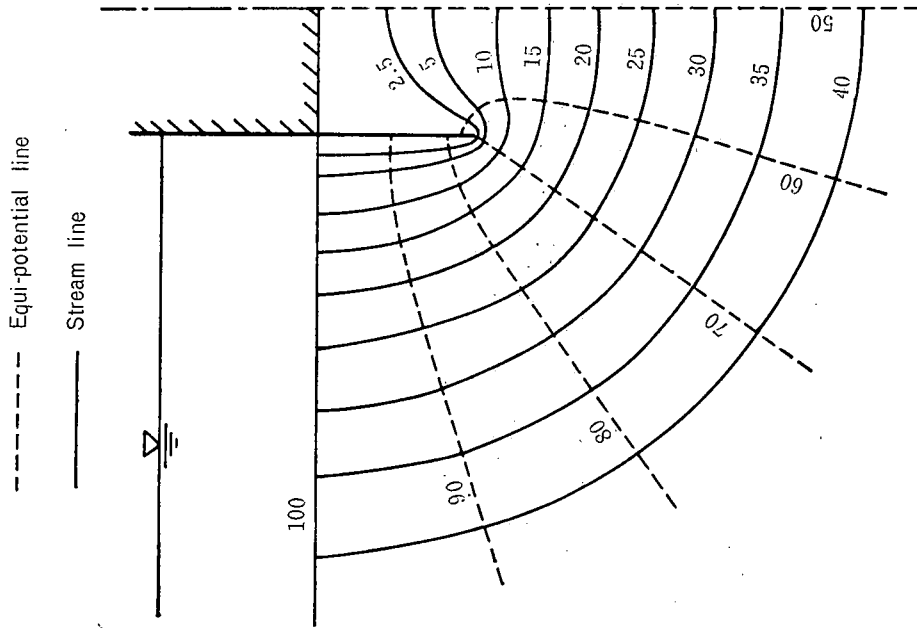


Fig. 4. (I) Flow net for $d/b=1.27$.

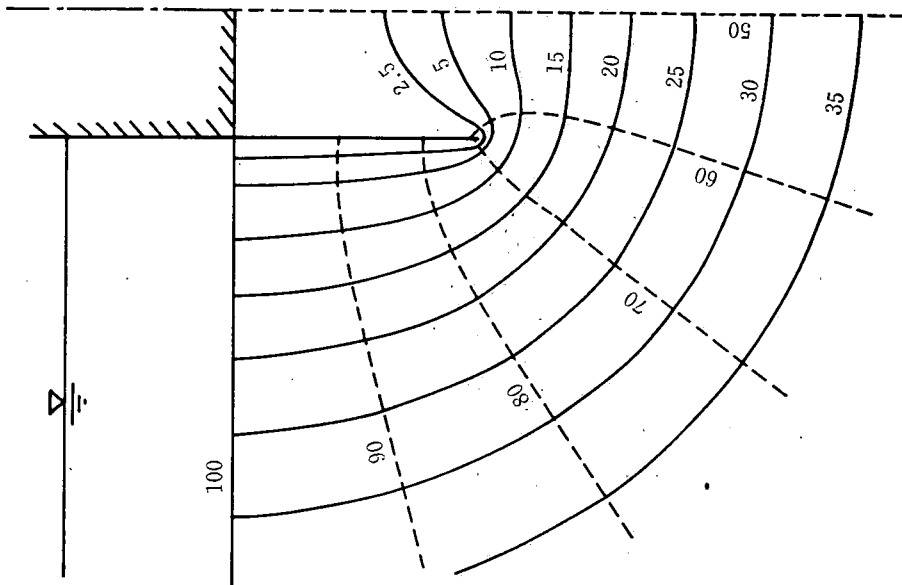


Fig. 4. (II) Flow net for $d/b=1.96$.

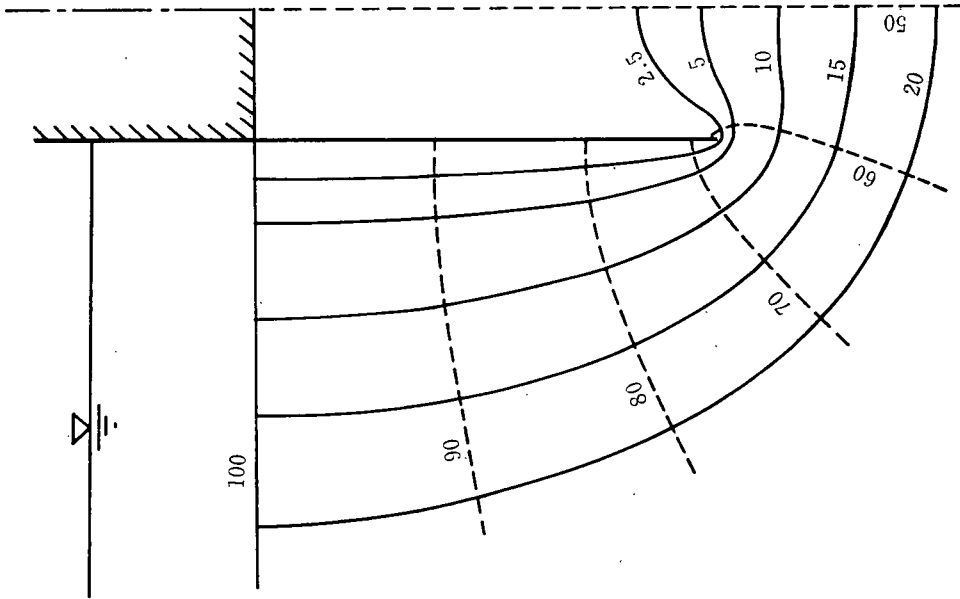


Fig. 4. (III) Flow net for $d/b=3.65$.

この図にみられるように、止水壁の長さが長くなっても、止水壁内部の下方端付近にある $\psi=2.5$ の流線の止水壁先端に対する位置およびその形にはほとんど変化がみられない。すなわち、止水壁の長さが長くなるにつれ、止水壁内部において、流関数値の小さい範囲が広がる。

並列止水壁の中央鉛直線上における浸透水の流速分布を、 d/b をパラメーターとして図示するとFig. 5のようになる。図には d/b が0.90, 1.96, 3.02および4.22の場合を示しており、また図中の○印はそれぞれ止水壁の先端に相当する位置における値を示す。

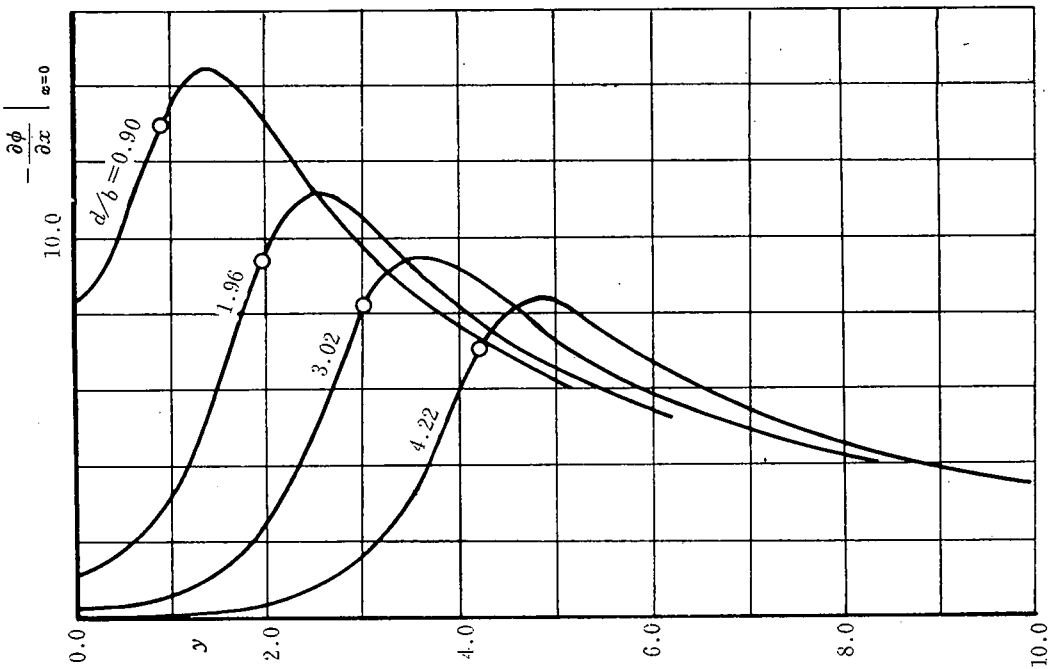


Fig. 5. Variation of $-\frac{\partial \phi}{\partial x}$ with y and d/b .

この図から、止水壁の長さが長くなるにつれて、止水壁内部の浸透流速が小さくなり、またその鉛直線上における最大流速は止水壁の先端に相当する位置よりいくらか深い位置で起ることが認められる。

また、並列止水壁の中央線上での低えん堤底面からの深さ、 y をパラメーターとして、 d/b と $-\frac{\partial\phi}{\partial x}\Big|_{x=0}$ との関係を示したのが Fig. 6 である。すなわち、並列止水壁の中央線上の一定点における浸透流速が、止水壁の長さによってどのように変化するかを示したものである。

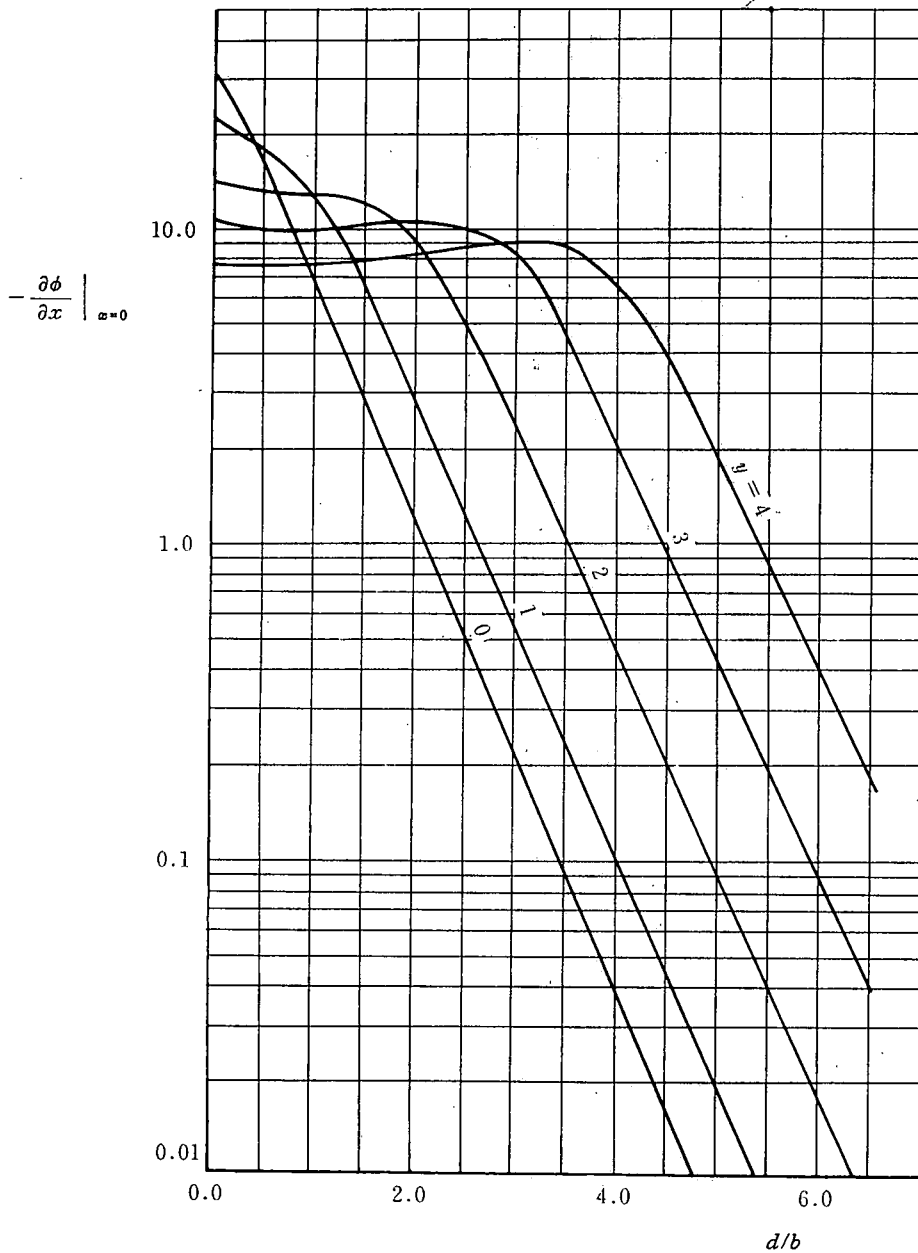


Fig. 6. Variation of $-\frac{\partial\phi}{\partial x}\Big|_{x=0}$ with d/b and y .

この図から、低えん堤底面の中央における浸透流速は、止水壁の長さの増大につれて指数関数的に減少し、また、低えん堤底面からある一定の深さの点における浸透流速も、止水壁の長さその深さに相当する長さ以上になると、止水壁の長さの増大とともに指数関数的に減少することがみられる。

また、この図からみられる興味あることは、低えん堤底面からある程度深い点における浸透流速が、止水壁の長さの増大につれてわずかながら増大し、止水壁がその位置の深さに相当する長さよりいくらか短い長さになったときに最大の流速を示し、止水壁がその長さより長くなると減少することである。

結 論

並列止水壁が浸透流にどのような影響を及ぼすかを明らかにするために、長さの等しい並列止水壁を上・下流端にもつ低えん堤が上・下流および下方無限の透水性基盤上にある場合、その低えん堤下の浸透流について理論的解析を行なった。

その理論解による数値計算の結果、つぎのような結論を得た。

- 1) 止水壁の長さが長くなるにつれ、止水壁内部において、流関数値の小さい範囲が広くなり、また浸透流速は指数関数的に小さくなる。
- 2) 並列止水壁の中央線上における最大浸透流速は止水壁の先端に相当する位置よりいくらか深い位置で起る。

本論文における計算は高知大学計算センターを利用して行なったことを付記する。

参 考 文 献

- 1) 農林省農地局, 土地改良事業設計基準, 第3部設計, 第3編頭首工, 39, (1967)
- 2) 粟津清蔵, 洗掘機構についての基礎的研究, 土木学会論文集, 52, 5-12, (1958)
- 3) 本間 仁・浜田徳一, 透水性基礎の地下水流と揚圧力に就て, 土木学会論文集, (1944)
- 4) 友近 晋, 楢岡函数論, 共立出版, (1958)

(昭和47年9月30日受理)

