無限次元線形代数について

中　田　道　孝
（文理学部数学教室）

On the infinite dimensional linear algebra

Michitaka NAKADA

第一章　無限次元ベクトル空間

(1)　基底について

体 K 上のベクトル空間を X とする．L を x の部分集合とする時，L の有限個の元の線形結合を L の線形結合という．

X の部分集合 M のどんな有限個の元も線形独立なとき，M は線形独立であるという．

X の部分集合 N が線形独立でないとき，換言すれば線形従属な有限個の元が存在するとき，N は線形従属であるという．

線形独立な X の部分集合の全体 $\mathfrak{M}$ は集合の包含関係の下に順序集合を作る．$\mathfrak{M}$ の任意の全順序部分集合 $\mathfrak{N}$ をとる．

$M_0=\bigcup\limits_{M\in\mathfrak{N}} M$ が線形従属ならば，M_0 の中に線形従属な有限個の元 $x_1,\cdots,x_n$ が存在する．

$$x_i\in M_i\in\mathfrak{N}\,(i=1,\cdots,n)$$

$\mathfrak{N}$ が全順序だから $\mathrm{Max}(M_1,\cdots,M_n)=M_p$ とすれば $x_1,\cdots,x_n\in M_p$ となり $M_p\in\mathfrak{M}$ に反する，よって M_0 は線形独立となり $M_0\in\mathfrak{M}$.

$$\mathfrak{N}\ni^{\forall}M \text{ に対し } M\subset\bigcup_{M\in\mathfrak{N}}M=M_0$$

又 $\mathfrak{N}\ni^{\forall}M$ に対し $M\subset N\in\mathfrak{M}$ ならば．$M_0=\bigcup\limits_{M\in\mathfrak{N}}M\subset N$. よって M_0 は$\mathfrak{N}$ の $\mathfrak{M}$ における上限となる．従って $\mathfrak{M}$ は集合の包含関係の下に帰納的順序集合になるから，ツォルンの補題より極大元 U をもつ．V は極大線形独立部分集合である．

$X\ni^{\forall}x$ に対し $x\in U$ ならば $x=1x$ は U の線形結合である．

$x\notin U$ ならば $\{x\}^{U}U$ は線形従属だから，U の元 $u_1,\cdots,u_n$ が存在して $x,u_1,\cdots,u_n$ が線形従属になる．よって全ては o でない K の元 $\alpha,\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ が存在して $\alpha x+\alpha_1u_1+\cdots+\alpha_nu_n=0$

U は線形独立だから $\alpha\neq0$ で $x=(-\alpha^{-1}\alpha_1)u_1+\cdots+(-\alpha^{-1}\alpha_n)u_n$ よって x はU の線形結合になる．今 X の元 x が U の線形結合として 2 通りに表わされるとし，必要ならば係数に 0 を含ませて $x=\alpha_1u_1+\cdots+\alpha_nu_n=\beta_1u_1+\cdots+\beta_nu_n$ としてみる．

$$\therefore\ (\alpha_1-\beta_1)u_1+\cdots+(\alpha_n-\beta_n)u_n=0$$

U が線形独立だから $u_1,\cdots,u_n$ も線形独立で

$$\alpha_1-\beta_1=\cdots=\alpha_n-\beta_n=0 \qquad \therefore\ \alpha_1=\beta_1,\cdots,\alpha_n=\beta_n$$

これより X の任意の元は U の線形結合で一意的に表わされる．U を X の基底という．

今後 $\Lambda\ni^{\forall}\lambda$ に対して a_λ が定義され有限個の $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ を除く全ての λ に対して $a_\lambda=0$ ならば $\sum\limits_{i=1}^{s}a_{\lambda_i}=\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}a_\lambda$ と書くことにする．この約束により $x=\alpha_1u_1+\cdots+\alpha_nu_n$ のとき $U\ni^{\forall}u$ に

対し $u=u_i$ のとき $\alpha_u=\alpha_i$ $(i=1,\cdots,n)$ とし，u が $u_1,\cdots,u_n$ のどれにも等しくないとき，$\alpha_u=0$ とおけば $x=\sum_{u\in U}\alpha_u u$ と表わされる．

(2) 次元について

今，U, V が X の基底であるとする．U, V の集合としての基数 $\overline{\overline{U}}$, $\overline{\overline{V}}$ の一方が有限ならば他方も有限で両者が等しいことは容易に確かめられる．だから $\overline{\overline{U}}$, $\overline{\overline{V}}$ 共に無限であるとする。

$U\ni{}^{\forall}u$ に対し $u\neq 0$ だから $u=\beta_1v_1+\cdots+\beta_mv_m$ と出来る．ここに $\beta_j\neq 0$, $v_j\in V(j=1,\cdots,m)$

$V\ni{}^{\forall}v$ に対し，v はこのような表現のどれかに現われる．

$\because$ $v_0\in V$ がこのような表現に現われなければ v_0 は U の線形結合で，U の各元は v_0 に等しくない V の元の線形結合になる．

よって，$v_0=1v_0=\gamma_1v_1+\cdots+\gamma_tv_t$ で $v_i\neq v_0(i=1,\cdots,t)$ これは x の元 v_0 が V の線形結合として2通りに現わされることになり，V の基底性に反する．よって $V\ni{}^{\forall}v$ に対し U の少なく共一つの元 u が存在して，u の表現の中に v が現われる．そこで，このような u の一つをとり，$\varphi(v)=u$ とおけば V から U の中への一意写像 φ が得られる．

$U'=\varphi(V)$ とおき $\mathfrak{A}=\{\varphi^{-1}(u')\,|\,u'\in U'\}$ とする．

$U'\ni u_1',u_2'$ に対し，$u_1'\neq u_2'$ ならば $\varphi^{-1}(u_1')\cap\varphi^{-1}(u_2')=\phi$ で $U'\ni u'$ に対し $\varphi^{-1}(u')$ の元の数は u' の表現に現われる v の個数を越えないから有限である．集合 U' と集合 $\mathfrak{A}$ は対等である．集合 $\mathfrak{A}$ は無限集合 V の互に素な有限集合への分割を与える．基数の理論から

$\overline{\overline{V}}=\overline{\overline{\mathfrak{A}}}=\overline{\overline{U'}}$. よつて $\overline{\overline{V}}\leqq\overline{\overline{U}}$. U と V を入れかえて考えれば $\overline{\overline{U}}\leqq\overline{\overline{V}}$. $\therefore$ $\overline{\overline{U}}=\overline{\overline{V}}$. だから X の基底の基数は一定になる．この基数を X の次元という．

例，実係数の多項式の全体 $R[t]$ は実数体 R 上の可付番次元ベクトル空間である．基底は $\{1,t,\cdots,t^n,\cdots\}$

第二章 無限行列

(1) 無限行列の定義

K を体，R, S を任意の集合とする．

$R\ni{}^{\forall}r$, $S\ni{}^{\forall}s$ に対し $a_{rs}\in K$ となる K の元の組 $(a_{rs},r\in R,s\in S)$ を $A=(a_{rs},r\in R,s\in S)$ 又は単に $A=(a_{rs})$ で示し A は (R,S) 形の行列であると呼ぶ．

(R,S) 形の2つの行列 $A=(a_{rs})$, $B=(b_{rs})$ において，$R\ni{}^{\forall}r$, $S\ni{}^{\forall}s$ に対して $a_{rs}=b_{rs}$ ならば A は B に等しいと云い $A=B$ で示す．

この相等が同値律を満すことは容易に確められる．又 $(a_{rs};\ s\in S)$ を r 行，$(a_{rs};r\in R)$ を s 列と呼ぶ．a_{rs} を r 行 s 列の元，又は単に (r,s) 元と呼ぶ．

(2) 演算の定義

(R,S) 形の2つの行列 $A=(a_{rs})$, $B=(b_{rs})$ に対し，和及び K の元によるスカラー倍を次式で定義する．

$$A+B=(a_{rs}+b_{rs}) \qquad cA=(ca_{rs})$$

この定義の下に (R,S) 形の行列の全体は加法の下にアーベル群となり，更に K 上のベクトル空間になることは有限行列の場合と同様に確かめられる．

零元は ${}^{\forall}r\in R$, ${}^{\forall}s\in S$ に対し (r,s) 元が 0 になる行列 $0=(o)$ で零行列と呼ばれる．加法の逆演算として減法が定義されることは云うまでもない．

次に $A=(a_{rs})$ を (R,S) 形の行列，$B=(b_{rs})$ を (S,T) 形の行列とするとき積 AB を $c_{rt}=\sum_{s\in S}a_{rs}b_{st}$ で定められる (R,T) 形の行列 $C=(c_{rt})$ で定めようとしても，無限和 c_{rt} は一

般には確定しないから不可能である．無限和 c_{rt} の項 $a_{rs}b_{st}$ において $s=s_1,\cdots,s_n$ を除く全ての s に対して $a_{rs}b_{st}=0$ ならば $c_{rt}=\sum_{s\in S}a_{rs}b_{st}=\sum_{i=1}^{n}a_{rs_i}b_{s_it}$ で定まる．しかも加法の順序に関係しない．

しかし $a_{rs}b_{st}$ の中に 0 でないものが無限個の時は手の付けようがない．たとえ可算個で K が実数体の場合でも絶対収束，条件収束，発散があって複雑である．

(3) 行有限，列有限の行列

行列の各行において 0 でない元が高々有限個のとき行有限であるという．又，各列において 0 でない元が高々有限個のとき列有限であるという．同じ形の行（列）有限な行列の和差は行（列）有限である．行（列）有限な行列のスカラー倍も行（列）有限である．

(R,S) 形の行列 $A=(a_{rs})$ 及び (S,T) 形の行列 $B=(b_{st})$ において，A が行有限であるか，B が列有限であるかの少なく共一方が成り立てば $c_{rt}=\sum_{s\in S}a_{rs}b_{st}$ において $a_{rs}\neq 0$ なる s が高々有限個か，$b_{st}\neq 0$ なる s が高々有限個だから $a_{rs}b_{st}\neq 0$ なる s が高々有限個になり c_{rt} が定義されるから積 $C=AB$ が定義出来る．

特に A,B が共に行（列）有限ならば積 AB も行（列）有限である．

何となれば A,B を共に行有限とする．

A が行有限だから $R\ni{}^{\forall}r$ に対し $a_{rs}\neq 0$ なる s は高々有限個だから $s_1,\cdots,s_n$ 以外の s については $a_{rs}=0$ としてよい．次に B も行有限だから $1\leq{}^{\forall}i\leq n$ に対し $b_{s_it}=0$ なる t は高々有限個しかない．この t を各 s_i に対して拾い集めれば $t_1,\cdots,t_m$ 以外の t に対しては $1\leq{}^{\forall}i\leq n$ に対し $b_{s_it}=0$ としてよい．

さて $c_{rt}=\sum_{s\in S}a_{rs}b_{st}=\sum_{i=1}^{n}a_{rs_i}b_{s_it}$ であるが $t=t_1,\cdots,t_m$ 以外では $c_{rt}=0$ になるから $C=AB$ は行有限になる．共に列有限の場合も同様に証明される．

定理 Ⓐ A,B が (R,S) 形の行列，C が (S,T) 形の行列とする．A,B が共に行有限であるか，C が列有限であれば

$$(A+B)C=AC+BC \text{ が成り立つ．}$$

Ⓑ A が (R, S) 形の行列，B,C が (S,T) 形の行列とする．A が行有限であるか，B,C が共に列有限であれば

$$A(B+C)=AB+AC \text{ が成り立つ．}$$

Ⓒ A が (R,S) 形の行列，B が (S,T) 形の行列，C が (T,Q) 形の行列とする．A, B が共に行有限であるか，A が行有限で C が列有限であるか，B,C が共に列有限であれば

$$(AB)C=A(BC) \text{ が成り立つ．}$$

証明，Ⓐ, Ⓑ は簡単なので省略する．

Ⓒ の証明．$A=(a_{rs})$, $B=(b_{st})$, $C=(C_{tq})$ とおく．

(場合 1) A,B が共に行有限のとき　A は行有限だから ${}^{\forall}r\in R$ に対し $a_{rs}\neq 0$ なる s は高々有限個である．$s_1,\cdots,s_n$ 以外の s に対して $a_{rs}=0$ とする．

B も行有限だから $1\leq{}^{\forall}i\leq n$ に対し $b_{s_it}\neq 0$ なる t は高々有限個だから，この t を各 s_i に対し拾い集めて $t_1,\cdots,t_m$ 以外の t に対しては $1\leq{}^{\forall}i\leq n$ に対し $b_{s_it}=0$ とする．

$AB=(h_{rt})$ とすれば $h_{rt_j}=\sum_{s\in S}a_{rs}b_{st_j}=\sum_{i=1}^{n}a_{rs_i}b_{s_it_j}$ そして $t_1,\cdots,t_m$ 以外の t に対しては $h_{rt}=0$　$(AB)C=(\sigma_{rq})$ とすれば

$$\sigma_{rq}=\sum_{t\in T}h_{rt}c_{tq}=\sum_{j=1}^{m}h_{rt_j}c_{t_jq}=\sum_{j=1}^{m}(\sum_{i=1}^{n}a_{rs_i}b_{s_it_j})c_{t_jq}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{rs_i}b_{s_it_j}c_{t_jq}$$

$BC=(k_{sq})$ とすれば $k_{s_iq}=\sum_{t\in T}b_{s_it}c_{tq}=\sum_{j=1}^{m}b_{s_it_j}c_{t_jq}$

$A(BC)=(\tau_{rq})$ とすれば

$$\tau_{rq}=\sum_{s\in S}a_{rs}k_{sq}=\sum_{i=1}^{n}a_{rs_i}k_{s_iq}=\sum_{i=1}^{n}a_{rs_i}(\sum_{j=1}^{m}b_{s_it_j}c_{t_jq})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{rs_i}b_{s_it_j}c_{t_jq}$$

$$\therefore\ (AB)C=A(BC)$$

(場合2) A が行有限で C が列有限のとき A は行有限だから ${}^\forall r\in R$ に対し $a_{rs}\neq 0$ なる s は高々有限個である. $s_1,\cdots,s_n$ 以外の s に対しては $a_{rs}=0$ とする. 又, C は列有限だから, $Q\ni{}^\forall q$ に対し $c_{tq}\neq 0$ なる t は高々有限個である. $t_1,\cdots,t_m$ 以外の t に対しては $c_{tq}=0$ とする.

$AB=(h_{rt})$ とすれば $h_{rt_j}=\sum_{s\in S}a_{rs}b_{st_j}=\sum_{i=1}^{n}a_{rs_i}b_{s_it_j}$

$(AB)C=(\sigma_{rq})$ とすれば

$$\sigma_{rq}=\sum_{t\in T}h_{rt}c_{tq}=\sum_{j=1}^{m}h_{rt_j}c_{t_jq}=\sum_{j=1}^{m}(\sum_{i=1}^{n}a_{rs_i}b_{s_it_j})c_{t_jq}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{rs_i}b_{s_it_j}c_{t_jq}$$

$BC=(k_{sq})$ とすれば $k_{s_iq}=\sum_{t\in T}b_{s_it}c_{tq}=\sum_{j=1}^{m}b_{s_it_j}c_{t_jq}$

$A(BC)=(\tau_{rq})$ とすれば

$$\tau_{rq}=\sum_{s\in S}a_{rs}k_{sq}=\sum_{i=1}^{n}a_{rs_i}k_{s_iq}=\sum_{i=1}^{n}a_{rs_i}(\sum_{j=1}^{m}b_{s_it_j}c_{t_jq})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{rs_i}b_{s_it_j}c_{t_jq}$$

$$\therefore (AB)C=A(BC)$$

(場合 3) B,C が共に列有限のとき場合1と同様な方法で証明出来る.

$(R;R)$ 形の行列を特に R 次の正方行列と呼ぶ. $(R;S)$ 形の行列において; R と S が同じ集合でなくても, R と S が対等な集合ならば R 次の正方行列と見做せる.

$R\ni{}^\forall r,\ s$ に対し, $\delta_{rs}=1\,(r=s$ のとき$)$ $\quad\delta_{rs}=0\,(r\neq s$ のとき$)$

とおいたクロネッカのデルタで作られる R 次の正方行列 $E=(\delta_{rs})$ をR 次の単位行列と呼び区別の必要なときは E_R で示す. 単位行列は行有限でも列有限でもある. $A=(a_{rs})$ が (R,S) 形の行列のとき $E_RA=AE_S=A$ が容易に証明出来る.

(4) 行 (列) 有限正方行列環

行 (列) 有限な R 次の正方行列の全体は今迄の議論から環をなし, 単位行列が乗法の単位元になる.

今 $A=(a_{rs})$, $B=(b_{rs})$ を次の様な R 次の正方行列とする. r_1, r_2 を R の2つの異った元とする.

$$a_{r_1r_1}=1,\qquad r\neq r_1\ \text{又は}\ s\neq r_1\ \text{ならば}\ a_{rs}=0$$
$$b_{r_1r_2}=1,\qquad r\neq r_1\ \text{又は}\ s\neq r_2\ \text{ならば}\ b_{rs}=0$$

このとき AB は (r_1,r_2) 元が $a_{r_1r_1}b_{r_1r_2}=1$ で他の元が 0 になる行列になり, 又 $BA=0$ で

ある.
このことから行(列)有限の正方行列環は非可換で零因子をもつ. だから整域にはならない.
行列 A に対し $FA=E$ なる行列 F が存在するとき, F を A の左逆行列という.
又 $AG=E$ なる行列 G が存在するとき, G を A の右逆行列という.
行列 A に対し, $HA=AH=E$ なる行列 H が存在するとき H を A の逆行列という.
行列 A には左右の逆行列が片方又は両方が存在したり, しなかったりするかも知れず, 存在しても一意的でないかも知れない. しかし次の定理が成り立つ.
定理, 行列 A に左右の逆行列が存在すれば, 一意的に逆行列が存在し, 全ての左右の逆行列は逆行列に等しい.
証明は有限行列のときと同様なので省略.
例, $A=(a_{rs})$, $B=(b_{rs})$ を次の行列とする.
r_1, r_2 を R の異った元とする.

$a_{r_1r_2}=a_{r_2r_1}=1$, $a_{r_1r_1}=a_{r_2r_2}=0$, $a_{rs}=2\delta_{rs}$ (他の場合)

$b_{r_1r_2}=b_{r_2r_1}=1$, $b_{r_1r_1}=b_{r_2r_2}=0$, $b_{rs}=\frac{1}{2}\delta_{rs}$ (他の場合)

とするとき $AB=BA=E$ が容易に確められ, A, B は互に他の逆行列.
例, 自然数の全体 N に対し, $A=(a_{mn})$, $B=(b_{mn})$ を次の N 次の正方行列とする.

$$a_{mn}=\begin{cases} 1 \ (n=m+1 \text{ のとき}) \\ 0 \ (\text{そうでないとき}) \end{cases} \quad b_{mn}=\begin{cases} 1 \ (n+1=m \text{ のとき}) \\ 0 \ (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

$AB=(c_{mn})$ とおけば $c_{mn}=\sum_{k\in N} a_{mk}b_{kn}=a_{m\cdot m+1}b_{m+1\cdot n}$

よって $n=m$ ならば $c_{mn}=1$

$n\neq m$ ならば $c_{mn}=0$

即ち $AB=E$ である. だから A は B の左逆行列, B は A の右逆行列である.
$BA=(d_{mn})$ とおけば $d_{1n}=\sum_{k\in N} b_{1k}a_{kn}=0$

$$m\geq 2 \text{ のとき } d_{mn}=\sum_{N\in k} b_{mk}a_{kn}=b_{m\cdot m-1}a_{m-1\cdot n}=\delta_{m\cdot n}$$

だから $BA\neq E$
これより A は左逆行列をもたず, B は右逆行列をもたない.

第三章　線形写像と行列の関連

(1)　線形写像

X, Y をそれぞれ体 K の U, V を基底とするベクトル空間とする.
X から Y の中への写像 f は次の性質を満すとき線形写像であるという.

$X\ni^{\forall}x, x'$ に対し　$f(x+x')=f(x)+f(x')$

$K\ni^{\forall}\alpha$, $X\ni^{\forall}x$ に対し $f(\alpha x)=\alpha f(x)$

$X\ni^{\forall}x$ に対し $x=\sum_{u\in U} a_u u=\sum_{i=1}^{m} a_{u_i}u_i$ とすれば

$$f(x)=f(\sum_{i=1}^{m} a_{u_i}u_i)=\sum_{i=1}^{m} a_{u_i}f(u_i)=\sum_{u\in U} a_u f(u)$$

だから U の各元の像を定めれば, X の各元の像は定まる.

$U\ni^{\forall}u$ に対し $f(u)=\sum_{v\in V} a_{uv}v$ とする.

但し $a_{uv}\neq 0$ なる v は高々有限個しかない. そこで X から Y の中への任意の線形写像 f に対して, 行有限な (U, V) 形の行列 (a_{uv}) が対応する.

逆に行有限な (U,V) 形の行列 (b_{uv}) に対して，$g(u)=\sum_{v\in V} b_{uv}v$ によって線形写像が定義出来るから，X から Y の中への線形写像と (U,V) 形の行有限行列との間に1対1対応がつく．

定理，線形写像 F に対応する行列を $A=(a_{uv})$ とすれば

$X\ni^{\forall}x=\sum_{u\in U}\alpha_u u$ に対し $f(x)=\sum_{v\in V}\beta_v v$ とおけば $\beta_v=\sum_{u\in U}\alpha_u a_{uv}$ となる．

証明，$x=\sum_{u\in U}\alpha_u u=\sum_{i=1}^{m}\alpha_{u_i}u_i$ とすれば

$$f(u_i)=\sum_{v\in V}a_{u_i v}v=\sum_{j=1}^{n}a_{u_i v_j}v_j$$

j の番号は必要ならば係数に 0 を含ませて，i の各番号について共通にとれる．

$$\therefore\ f(x)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_{u_i}f(u_i)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_{u_i}(\sum_{j=1}^{n}a_{u_i v_j}v_j)$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m}\alpha_{u_i}a_{u_i v_j})v_j=\sum_{i=1}^{m}\beta_{v_j}v_j$$

とおけば $\beta_{v_i}=\sum_{i=1}^{m}\alpha_{u_i}a_{u_i v_j}=\sum_{v\in U}\alpha_u a_{uv_j}$

$v_1,\cdots,v_n$ 以外の v については $\beta_v=\sum_{u\in U}\alpha_u a_{uv}$ は左右両辺共に 0 として成り立つ．

(2) 線形写像と行列の演算

線形写像 f,g にそれぞれ行列 $A=(a_{uv})$, $B=(b_{uv})$ が対応しているとする．

$f(u)=\sum_{v\in V}a_{uv}v=\sum_{j=1}^{n}a_{uv_j}v_j$, $g(u)=\sum_{v\in V}b_{uv}v=\sum_{j=1}^{n}b_{uv_j}v_j$ 必要ならば係数に 0 を含ませ，j の番号は f, g について共通にとれる．

$$(f+g)(u)=\sum_{j=1}^{n}a_{uv_j}v_j+\sum_{j=1}^{n}b_{uv_j}v_j=\sum_{j=1}^{n}(a_{uv_j}+b_{uv_j})v_j=\sum_{v\in V}(a_{uv}+b_{uv})v$$

$v_1,\cdots,v_n$ 以外の v については係数が 0 で成り立っている．

これより線形写像 $f+g$ には行列 $A+B$ が対応する．

又，$K\ni^{\forall}\alpha$ に対し，$(\alpha f)(u)=\alpha f(u)=\alpha\sum_{v\in V}a_{uv}v=\sum_{v\in V}(\alpha a_{uv})v$ となるから，線形写像 αf には行列 αA が対応する．

定理，X,Y,Z はそれぞれ体 K 上の U, V,W を基底とするベクトル空間とする．又 f は X から Y の中への線形写像，g は Y から Z の中への線形写像とする．f,g に対応する行列が A,B ならば，gf には行列 AB が対応する．

証明，$A=(a_{uv})$, $B=(b_{vw})$ とする．

$f(u)=\sum_{v\in V}a_{uv}v\equiv\sum_{i=1}^{m}a_{uv_i}v_i$, $g(v_i)=\sum_{w\in W}b_{v_i w}w=\sum_{j=1}^{n}b_{v_i w_j}w_j$ j の番号は必要ならば係数に 0 を含ませることにより i の各番号について共通にとれる．

$$(gf)(u)=\sum_{i=1}^{m}a_{uv_i}(\sum_{j=1}^{n}b_{v_i w_j}w_j)=\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m}a_{uv_i}b_{v_i w_j})w_j=\sum_{w\in W}(\sum_{v\in V}a_{uv}b_{vw})w$$

ここに v が $v_1,\cdots,v_m$ 以外ならば $a_{uv}=0$ で，v が $v_1,\cdots,v_m$ のどれかに等しく，w が $w_1,\cdots,w_n$

以外ならば $b_{vw}=0$ だから線形写像 gf には行列 $AB=(\sum_{v\in V}a_{uv}b_{vw})$ が対応.

(3)全射，単射，全単射と行列の関係

補題，X,Y はそれぞれ体 K 上の U,V を基底とするベクトル空間とする．f は X から Y の中への線形写像とする.

Ⓐ f が全射である為の必要十分条件は $f\varphi=I_Y$ (Y の恒等写像)となる Y から X の中への線形写像 φ が存在することである.

Ⓑ f が単射である為の必要十分条件は $\psi f=I_X$ (X の恒等写像) となる Y から Xの中への線形写像 ψ が存在することである.

Ⓒ f が全単射である為の必要十分条件は $f\theta=I_Y$, $\theta f=I_X$ となる Y から X の中への線形写像 θ が存在することである.

証明 Ⓐ f が全射と仮定する.

だから $V\ni{}^\forall v$ に対し v は Y の元だから $f(x)=v$ となる X の元 x が少なく共一つ存在する．このような x の一つをとり $\varphi(v)=x$ と定義すれば当然 $(f\varphi)(v)=f(x)=v$

線形写像 φ は V の各元に定義出来れば当然 Y の各元に定義される.

$Y\ni{}^\forall y=\beta_1v_1+\cdots+\beta_nv_n$ に対し

$(f\varphi)(y)=f(\beta_1\varphi(v_1)+\cdots+\beta_n\varphi_n(v_n))=\beta_1(f\varphi)(v_1)+\cdots+\beta_n\ (f\varphi)\ (v_n)\ =\beta_1v_1\cdots+\beta_nv_n=y$

よって φ は題意の線形写像である．逆は簡単なので省略する.

Ⓑ f が単射と仮定する.

このとき $f(U)$ は線形独立になる.

$\because f(U)\ni{}^\forall f(u_1),\cdots,f(u_m)$ に対し $a_1f(u_1)+\cdots+a_mf(u_m)=0$ ならば $f(a_1u_1+\cdots+a_mu_m)=0$ f が単射だから $a_1u_1+\cdots+a_mu_m=0$ U が基底だから $a_1=\cdots=a_m=0$ そこで Y の基底 V を $V=f(u)\cup W$ にとれる.

そこで $f(U)\ni{}^\forall f(u)$ に$\psi\{f(u)\}=u$ と定義すれば u は一意に定まる．又 $W\ni{}^\forall w$ に対しては $\psi(w)$ は全く勝手に X の元を一つ定める．このようにして Y から X の中への線形写像 ψ が定まる.

$x\ni{}^\forall x=a_1u_1+\cdots+a_mu_m$ に対し

$(\psi f)(x)=\psi(a_1f(u_1)+\cdots+a_mf(u_m))=a_1(\psi f)(u_1)+\cdots+a_m(\psi f)(u_m)=a_1u_1+\cdots+a_mu_m=x$

だから ψ は題意の線形写像になる．逆は簡単なので省略.

Ⓒf が全単射と仮定する.

$$f\varphi=I_Y \text{ かつ } \psi f=I_X$$

$Y\ni{}^\forall y$ に対し $\varphi(y)=(I_X\varphi)(y)=\{(\psi f)\varphi\}(y)\ =\{\psi(f\varphi)\}(y)=(\psi I_Y)(y)=\psi(y)$

よって $\varphi=\psi=\theta$ と考えればよい.

逆は簡単なので省略

定理，補題の仮定の下に f に対応する行列を A とするとき

Ⓐ f が全射である為の必要十分条件は $FA=E_v$ となる (V,U) 形の行列 F が存在することである.

Ⓑ f が単射である為の必要十分条件は $AG=E_U$ となる (V,U) 形の行列 G が存在することである.

Ⓒ f が全単射である為の必要十分条件は $HA=E_V$, $AH=E_U$ となる (V,U) 形の行列 H が存在することである.

証明，補題と線形写像に行有限行列が 1 対 1 に対応することから明らかである.

系，特に f が行列 A が対応するベクトル空間 X 内の線形変換ならば

Ⓐ f が全射であるための必要十分条件は A が左逆行列をもつことである.

Ⓑ f が単射であるための必要十分条件は A が右逆行列をもつことである.

Ⓒ f が全単射であるための必要十分条件は A が逆行列をもつことである.

(4) 全射，単射，全単射の存在と次元の関係

定理 X,Y はそれぞれ体 K 上の U,V を基底とする線形空間とする.

Ⓐ X から Y の中への全射線形写像が存在するための必要十分条件は X の次元が Y の次元より小さくないことである.

Ⓑ X から Y の中への単射線形写像が存在するための必要十分条件は X の次元が Y の次元より大きくないことである.

Ⓒ X から Y の中への全単射線形写像が存在するための必要十分条件は両者の次元が等しいことである.

証明 Ⓐ 前節の補題 Ⓐ より X から Y の中への全射線形写像 f が存在すれば $f\varphi=I_Y$ となる Y から X の中への線形写像 φ が存在する. 又補題 Ⓑ より φ は単射である.

$X\supset\varphi(V)\ni{}^{\forall}\varphi(v_1),\cdots,\varphi(v_n)$ に対し $\beta_1\varphi(v_1)+\cdots+\beta_n\varphi(v_n)=0$ ならば $\varphi(\beta_1v_1+\cdots+\beta_nv_n)=0$ が単射だから $\beta_1v_1+\cdots+\beta_nv_n=0$. V が基底だから $\beta_1=\cdots=\beta_n=0$. よって $\varphi(V)$ は線形独立になる. だから $U\supset\varphi(V)$ としてよい. φ を V から U の中への単射と考えれば $\overline{\overline{V}}\leq\overline{\overline{U}}$

逆の証明は簡単なので省略.

Ⓑ 前節の補題 Ⓑ より X から Y の中への単射線形写像 f が存在すれば

$f(U)\ni{}^{\forall}f(u_1),\cdots,f(u_m)$ に対し $\alpha_1f(u_1)+\cdots+\alpha_mf(u_m)=0$ ならば $f(\alpha_1u_1+\cdots+\alpha_mu_m)=0$

f は単射だから $\alpha_1u_1+\cdots+\alpha_mu_m=0$　U が基底だから $\alpha_1=\cdots=\alpha_m=0$

だから $f(U)$ は線形独立になる. よって $f(U)\subset V$ としてよい.

f を U から V の中への単射と考えれば $\overline{\overline{U}}\leq\overline{\overline{V}}$

逆の証明は簡単なので省略.

Ⓒ $\overline{\overline{V}}\leq\overline{\overline{U}}$ か $\overline{\overline{U}}\leq\overline{\overline{V}}$ だから $\overline{\overline{U}}=\overline{\overline{V}}$ となる.

系，体 K の元で出来た (R,S) 形の行列 A に対し

Ⓐ $FA=E_S$ となる (S,R) 形の行列 F が存在すれば $\overline{\overline{R}}\geq\overline{\overline{S}}$ である.

Ⓑ $AG=E_R$ となる (S,R) 形の行列 G が存在すれば $\overline{\overline{R}}\leq\overline{\overline{S}}$ である.

証明，それぞれの次元のベクトル空間を作り，線形写像に対応する行列を考えて，定理から導かれる.

文　　　献

[Ⅰ] N, Jacobson. "Lecture on Abstract Algebra" 2.

[Ⅱ] 日本数学会「岩波数学辞典」

（昭和48年9月25日受理）