Dini の導来数に関する広義の平均値の定理とその応用について

方　　晶・新　関　章　三
（理学部数学教室）

On Generalized Mean Value Theorems in the Dini's Derivate and their Applications

Fang JING and Shozo NIIZEKI
Department of Mathematics, Faculty of Science

Abstract: In this paper, we discuss generalized mean value theorems of necessarily non-differentiable functions and their applications. The so-called *mean value theorem* do not hold for the non-differentiable function. Even if, however, a function f is not differentiable, it posseses Dini's derivate, and on occasion, it may be right or left differentiable. In §2 and §3, we formulate generalized mean value theorems for Dini's derivate of function and for right or left differentiable function respectively. These generalized mean value theorems are formulated in the form of inequalities, while the so-called mean value theorem is formulated in the form of equality. In §5, we apply these generalized mean value theorems to the criterion for the increase or decrease of function and to the criterion for the convexity of function, where the function is not necessarily differentiable.

は じ め に

実数空間 R における有限閉区間 $[a, b]$ $(a<b)$ 上で定義された実数値関数 $f(x)$ が $[a, b]$ で連続かつ開区間 (a, b) で微分可能であるとき，微分積分学における平均値の定理は通常次のように定式化される：

〝$a<c<b$ なる c が存在して

(1)　　$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

が成り立つ〃

この小論の目的は，必ずしも微分可能でない関数に対し，Dini の導来数（Dini の微係数）や片側微係数（右微係数や左微係数）に関する広義の平均値の定理を考察し，それを定式化することである（定理２．４，２．５，３．１，３．２)。この場合通常の微分よりも広い意味で微分を考えるために，平均値の定理とはいっても(1)のように必ずしも等号が成り立つわけではなく，定理２．４，２．５，３．１および３．２のように一般には不等式で定式化される。それらをここでは特に〝広義の平均値の定理〃と呼ぶことにする。このような名称は従来あまり用いられたこともなかったし，上に挙げた定理の内容が平均値の定理の一般化されたものとして考察の対象とされたことも今まではほとんどなかったように思われる。

しかしながら，必ずしも微分可能ではない，例えば片側微分可能な関数$f(x)$の場合に，定理３．１や３．２のような〝広義の平均値の定理〟が成り立つことを初等微積分学の段階で取り上げることは教育的立場からも意義のあることではないかと思われる。というのもこれらの定理自体には数学的な興味があるばかりでなく，注目すべき応用例（定理５．１～５．５）がある。すなわち，必ずしも微分可能でない関数の増減を調べるのに定理５．１～５．４が，また凸性を調べるのには定理５．５が大きな力を発揮するからである。しかも将来高い立場の解析学を学ぶ際にも不等号で定式化された広義の平均値の定理に早い段階で接しておくことは，その後の学習を進める上でも大変重要なことと考えられるからである。

以上の観点に立って〝広義の平均値の定理〟を定理２．４，２．５，３．１および３．２のような形で定式化することも意味のあるものと考えて本小論をまとめた次第である。

§1. 記号と定義

この節では以後使用する記号を説明し，いくつかの微分の概念を定義する。

Rを実数空間とし，$a, b \in R$で$a<b$とする。そのときRの閉区間$[a, b]$，開区間(a, b)，右半開区間$[a, b)$，左半開区間$(a, b]$をそれぞれ，$a \leqq x \leqq b$，$a<x<b$，$a \leqq x<b$，$a<x \leqq b$を満たすRの元xの全体として定める。

次に微係数（derivative）の考えの拡張であるDiniの導来数（Dini's derivate）について考察しよう。$f(x)$は$[a, b]$で連続な関数とする。いま$x \in [a, b)$のとき，$0<\delta<b-x$なるδを１つ固定し，

$$\overline{g}_{+}(x, \delta)=\sup_{h}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,\middle|\, 0<h<\delta\right\},$$

$$\underline{g}_{+}(x, \delta)=\inf_{h}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,\middle|\, 0<h<\delta\right\}$$

とおき，また$x \in (a,b]$であるとき，$0<\delta<x-a$なるδを１つ固定し，

$$\overline{g}_{-}(x, \delta)=\sup_{h}\left\{\frac{f(x)-f(x-h)}{h}\,\middle|\, 0<h<\delta\right\},$$

$$\underline{g}_{-}(x, \delta)=\inf_{h}\left\{\frac{f(x)-f(x-h)}{h}\,\middle|\, 0<h<\delta\right\}$$

とおく。そのとき，

$$(1.1)\qquad \begin{cases} \overline{D}_{+} f(x)=\lim\limits_{\delta \to 0} \overline{g}_{+}(x, \delta), & \underline{D}_{+} f(x)=\lim\limits_{\delta \to 0} \underline{g}_{+}(x, \delta), \\ \overline{D}_{-} f(x)=\lim\limits_{\delta \to 0} \overline{g}_{-}(x, \delta), & \underline{D}_{-} f(x)=\lim\limits_{\delta \to 0} \underline{g}_{-}(x, \delta) \end{cases}$$

とおいて$\overline{D}_{+} f(x)$, $\underline{D}_{+} f(x)$, $\overline{D}_{-} f(x)$, $\underline{D}_{-} f(x)$をxにおける$f(x)$のDiniの導来数またはDiniの微係数とよぶ。これら４つの導来数は，（１．１）と同等なことであるが，次のようにも書かれる

（溝畑［3］）：

$$\overline{D}_+ f(x)=\overline{\lim_{h\to+0}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},\quad \underline{D}_+ f(x)=\underline{\lim_{h\to+0}}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

$$\overline{D}_- f(x)=\overline{\lim_{h\to+0}}\frac{f(x)-f(x-h)}{h},\quad \underline{D}_- f(x)=\underline{\lim_{h\to+0}}\frac{f(x)-f(x-h)}{h}.$$

次に Dini の導来数の特別な場合として右微係数と左微係数についてのべる。まず $x\in[a,b)$ に対して，$\overline{D}_+ f(x)=\underline{D}_+ f(x)$ であるとき $f(x)$ は x で右微分可能とよび，この共通の値を x における $f(x)$ の右微係数とよんで $D_+ f(x)$ とかく。これは

$$D_+ f(x)=\lim_{h\to+0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

ともかかれる。また，$x\in(a,b]$ のとき $\overline{D}_- f(x)=\underline{D}_- f(x)$ ならば $f(x)$ は x で左微分可能とよび，この共通の値を x における $f(x)$ の左微係数とよんで $D_- f(x)$ とかく。これは上の場合と同様に

$$D_- f(x)=\lim_{h\to+0}\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$$

ともかかれる。右または左微分のことを総称して片側微分とよぶ。

ここで（1．1）における4つの導来数がすべて異なる例をあげておこう。$f(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases}\sin x & 0<x\leqq 1,\\ 0 & x=0,\\ \frac{1}{2}\sin x & -1\leqq x<0\end{cases}$$

と定義すればこれは $[-1,\ 1]$ で連続であり，$x=0$ における4つの導来数 $\overline{D}_+ f(0)$，$\underline{D}_+ f(0)$，$\overline{D}_- f(0)$，$\underline{D}_- f(0)$ はそれぞれ，1，-1，$\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{2}$ となる。

また，$D_+ f(x)$ と $D_- f(x)$ が異なるような関数 $f(x)$ の例として，

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & -1\leqq x<0,\\ -x+1 & 0\leqq x\leqq 1\end{cases}$$

がある。このとき，$f(x)$ は $[-1,\ 1]$ で連続となり，$D_+ f(0)=-1$，$D_- f(0)=1$ となる。

（1．1）における4つの Dini の導来数が一致するとき，すなわち $x_0\in(a,\ b)$ に対し $\overline{D}_+ f(x_0)=\underline{D}_+ f(x_0)=\overline{D}_- f(x_0)=\underline{D}_- f(x_0)$ であるとき，$f(x)$ は $x=x_0$ で微分可能となる。この場合 $D_+ f(x_0)=D_- f(x_0)$ でもあるから左右の微係数は一致する。

§2．Diniの導来数と広義の平均値の定理

この節ではまず，Dini の導来数に関する広義の Rolle の定理を証明し，ついでその結果を用いて広義の平均値の定理を証明する。そのために2つの補題を準備する。

$f(x)$ は $[a,b]$ で連続で $f(a)=f(b)$ とする。いま，$M=\max_{a\leqq x\leqq b} f(x)$，$m=\min_{a\leqq x\leqq b} f(x)$ とおく。そのとき次の2つの補題が成り立つ。

補題2．1． $f(a)<M$ または $f(a)>m$ とする。そのとき $d>0$，$\delta>0$ および $x_1, x_2\in(a, b)$ が存在し，$0<h<\delta$ なる任意の h に対して次の2つの不等式が成り立つ：

$$\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}\leqq -d<0, \tag{2.1}$$

$$0<d\leqq\frac{f(x_2+h)-f(x_2)}{h}. \tag{2.2}$$

証明． はじめに $f(a)<M$ とする。そのとき，$f(x)$ は $[a, b]$ で連続であるから $a<c_0<b$ なる c_0 が存在して $f(c_0)=M$ となる。また $f(a)<p<M$ なる p に対しては，中間値の定理から $a<c_1<c_0<c_2<b$ なる c_1 と c_2 が存在して $f(c_1)=f(c_2)=p$ となる。いま

$$d=\min\left\{\frac{M-p}{c_0-c_1}, \frac{M-p}{c_2-c_0}\right\} \tag{2.3}$$

とおけば $d>0$ となり，さらに $[c_1, c_0]$ で定義された関数 $g_1(x)$ を

$$g_1(x)=\frac{f(c_0)-f(c_1)}{c_0-c_1}(x-c_1)-f(x)$$

とおく。そのとき $g_1(x)$ は $[c_1, c_0]$ で連続でしかも $g_1(c_1)=g_1(c_0)=-f(c_1)$ であるから，$c_1\leqq x_2<c_0$ なる x_2 が存在して $g_1(x_2)=\max_{c_1\leqq x<c_0} g_1(x)$ となる。そのとき $0<h<c_0-x_2$ なる任意の h に対して

$$\frac{g_1(x_2+h)-g_1(x_2)}{h}=\frac{f(c_0)-f(c_1)}{c_0-c_1}-\frac{f(x_2+h)-f(x_2)}{h}$$

となる。従って，$f(c_0)=M$, $f(c_1)=p$, $g_1(x_2+h)\leqq g_1(x_2)$ であることに注意すれば，(2．3) より

$$0<d\leqq\frac{M-p}{c_0-c_1}\leqq\frac{f(x_2+h)-f(x_2)}{h} \tag{2.4}$$

を得る。次に $[c_0, c_2]$ で定義された関数 $g_2(x)$ を

$$g_2(x)=f(x)-\frac{f(c_2)-f(c_0)}{c_2-c_0}(x-c_0)$$

とおく。そのとき $g_2(x)$ は $[c_0, c_2]$ で連続かつ $g_2(c_0)=g_2(c_2)=f(c_0)$ であるから，$c_0\leqq x_1<c_2$ なる x_1 が存在して $g_2(x_1)=\max_{c_0\leqq x<c_2} g_2(x)$ となる。従って $0<h<c_2-x_1$ なる任意の h に対して

$$\frac{g_2(x_1+h)-g_2(x_1)}{h}=-\frac{f(c_2)-f(c_0)}{c_2-c_0}+\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$$

となり，$f(c_2)=p$, $g_2(x_1+h)\leqq g_2(x_1)$ であることに注意すれば，(2．4) と同様にして

$$\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}\leqq-\frac{M-p}{c_2-c_0}\leqq -d<0 \tag{2.5}$$

を得る。ここで $\delta=\min\{c_0-x_2, c_2-x_1\}$ とおけば (2．5) と (2．4) からそれぞれ (2．1) と (2．2) が得られる。

さてこんどは$f(a)>m$の場合を考えよう。このとき$g(x)=-f(x)$とおけば，$\max_{a\leqq x\leqq b} g(x)=-\min_{a\leqq x\leqq b} f(x)=-m>-f(a)=g(a)$となるから，上で得た結果から，この$g(x)$に関して，$d>0$，$\delta>0$および$x_1$，$x_2\in(a, b)$が存在して，$0<h<\delta$なる任意の$h$に対して

$$0<d\leqq\frac{g(x_1+h)-g(x_1)}{h};\quad \frac{g(x_2+h)-g(x_2)}{h}\leqq -d<0$$

が成り立つ。従って，$g(x)=-f(x)$であることを考慮すれば，上の2つの式からそれぞれ

$$\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}\leqq -d<0,\quad 0<d\leqq\frac{f(x_2+h)-f(x_2)}{h}$$

が得られる。 （証　終）

補題2．2． 補題2．1と同じ条件のもとで次の2つの不等式が成り立つ：

$$\frac{f(x_1)-f(x_1-h)}{h}\leqq -d<0, \tag{2.6}$$

$$0<d\leqq\frac{f(x_2)-f(x_2-h)}{h}. \tag{2.7}$$

証明. 補題2．1とほとんど同様にして証明することができる。 （証　終）

以上の2つの補題を用いて，次のDiniの導来数に関する〝広義のRolleの定理〟を証明し，ついで〝広義の平均値の定理〟を証明する。

定理2．3． $f(x)$は$[a, b]$で連続で，$f(a)=f(b)$かつ$f(x)\fallingdotseq f(a)$とする。そのとき，それぞれの場合に応じてx_1，$x_2\in(a, b)$が存在して次の4つの不等式が成り立つ：

$$\overline{D}_+ f(x_1)<0<\overline{D}_+ f(x_2), \tag{2.8}$$

$$\underline{D}_+ f(x_1)<0<\underline{D}_+ f(x_2), \tag{2.9}$$

$$\overline{D}_- f(x_1)<0<\overline{D}_- f(x_2), \tag{2.10}$$

$$\underline{D}_- f(x_1)<0<\underline{D}_- f(x_2). \tag{2.11}$$

証明. $f(x)\fallingdotseq f(a)$であるから，$f(a)<M$または$f(a)>m$のいずれかである。従って補題2．1の（2．1）と（2．2）から（2．8）と（2．9）が，また補題2．2の（2．6）と（2．7）から（2．10）と（2．11）が得られる。 （証　終）

例2．1． 定理2．3において$f(x)$の連続性がくずれると，この定理は成り立たなくなる。すなわち，［－1，1］で定義された次の関数$f(x)$を考えよう：

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & -1\leqq x<0, \\ x-1 & 0\leqq x\leqq 1. \end{cases} \tag{2.12}$$

このとき，$f(-1)=f(1)=0$ でしかも $f(x)\not\equiv 0$ である。ところが任意の $x\in(-1,1)$ に対して，$\overline{D}_+f(x)=\underline{D}_+f(x)=1$ となるから（2．8）と（2．9）の不等式は成り立たない。また，（2．10）と（2．11）の不等式が成り立たない例も同様にして作ることができる。

本小論の目的であったDiniの導来数に関する広義の平均値の定理は，定理2．3から次のように定式化することができる。

定理2．4．$f(x)$ は $[a,b]$ で連続であり，しかも1次関数ではないとする。そのとき，それぞれの場合に応じて x_1，$x_2\in(a,b)$ が存在して次の4つの不等式が成り立つ：

（2．13）
$$\overline{D}_+f(x_1)<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<\overline{D}_+f(x_2),$$

（2．14）
$$\underline{D}_+f(x_1)<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<\underline{D}_+f(x_2),$$

（2．15）
$$\overline{D}_-f(x_1)<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<\overline{D}_-f(x_2),$$

（2．16）
$$\underline{D}_-f(x_1)<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<\underline{D}_-f(x_2).$$

証明．$F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a)$ とおけば，$F(a)=F(b)=0$ でしかも仮定より $f(x)$ は1次関数ではないから $F(x)\not\equiv F(a)$ である。$F(x)$ は $[a,b]$ で連続でしかも，

$$\overline{D}_+F(x)=\overline{D}_+f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

であるから，定理2．3の（2．8）において $f(x)$ を $F(x)$ で置き換えれば（2．13）が得られる。同様にして（2．14），（2．15），（2．16）はそれぞれ定理2．3の（2．9），（2．10），（2．11）から得られる。　　　　（証　終）

注意2．1．$f(x)$ が1次関数 $f(x)=\alpha x+\beta$ の場合には任意の $x\in(a,b)$ に対して

$$\overline{D}_+f(x)=\underline{D}_+f(x)=\overline{D}_-f(x)=\underline{D}_-f(x)=\alpha$$

となるから，定理2．4は成り立たない。

上の注意を考慮することにより定理2．4よりも弱い形の次の定理を得る。

定理2．5．$f(x)$ は $[a,b]$ で連続とする。そのとき，それぞれの場合に応じて，x_1，$x_2\in(a,b)$ が存在して次の4つの不等式が成り立つ：

（2．17）
$$\overline{D}_+f(x_1)\leqq\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leqq\overline{D}_+f(x_2),$$

（2．18）
$$\underline{D}_+f(x_1)\leqq\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leqq\underline{D}_+f(x_2),$$

$$(2.19)\qquad \overline{D}_- f(x_1) \leqq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqq \overline{D}_- f(x_2),$$

$$(2.20)\qquad \underline{D}_- f(x_1) \leqq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqq \underline{D}_- f(x_2).$$

証明. 定理２．４と注意２．１からただちにわかる。

（証　終）

§３．片側微分と広義の平均値の定理

この節では，$[a, b]$ で連続な関数 $f(x)$ が，$[a, b)$ で右微分可能あるいは $(a, b]$ で左微分可能である場合について広義の平均値の定理をのべる。ところで，$x_0 \in [a, b)$ のとき，$f(x)$ が $x = x_0$ で右微分可能であるための必要十分条件は $\overline{D}_+ f(x_0) = \underline{D}_+ f(x_0)$ となることである。このとき $D_+ f(x_0) = \overline{D}_+ f(x_0) = \underline{D}_+ f(x_0)$ となる。また，左微分の場合も同様で，$x_0 \in (a, b]$ のとき，$f(x)$ が $x = x_0$ で左微分可能であるための必要十分条件は $\overline{D}_- f(x_0) = \underline{D}_- f(x_0)$ となることであって，このとき $D_- f(x_0) = \overline{D}_- f(x_0) = \underline{D}_- f(x_0)$ となる。従って片側微分に関する広義の平均値の定理は§２の定理２．４と２．５からただちに得られる。

定理３．１． $f(x)$ は $[a, b]$ で連続でしかも１次関数ではないとする。そのとき，それぞれの場合に応じて $x_1, x_2 \in (a, b)$ が存在して，$f(x)$ が $[a, b)$ で右微分可能ならば（３．１）が，$(a, b]$ で左微分可能ならば（３．２）が成り立つ。

$$(3.1)\qquad D_+ f(x_1) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < D_+ f(x_2),$$

$$(3.2)\qquad D_- f(x_1) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < D_- f(x_2).$$

証明. $f(x)$ が $[a, b)$ で右微分可能である時には，任意の $x \in [a, b)$ に対して $D_+ f(x) = \overline{D}_+ f(x) = \underline{D}_+ f(x)$ である。従って（３．１）は定理２．４の（２．13）と（２．14）から得られる。また $f(x)$ が $(a, b]$ で左微分可能である時には，任意の $x \in (a, b]$ に対して $D_- f(x) = \overline{D}_- f(x) = \underline{D}_- f(x)$ であるから，（３．２）は定理２．４の（２．15）と（２．16）からただちに従う。（証　終）

定理３．１の場合にも $f(x)$ の連続がくずれると，（３．１）や（３．２）は成り立たなくなる。それは，例２．１の関数 $f(x)$ を考えればよい。また，注意２．１を考慮して定理２．４から定理２．５が得られたように，定理３．１からは次の定理３．２が得られる。

定理３．２． $f(x)$ は $[a, b]$ で連続とする。そのとき，次のそれぞれの場合に応じて $x_1, x_2 \in (a, b)$ が存在して $f(x)$ が $[a, b)$ で右微分可能ならば（３．３）が，$(a, b]$ で左微分可能ならば（３．４）が成り立つ。

(3．3)
$$D_+ f(x_1) \leqq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqq D_+ f(x_2),$$

(3．4)
$$D_- f(x_1) \leqq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqq D_- f(x_2).$$

証明. 定理3．1の場合と同様にして証明することができる。　(証終)

§4．凸関数とその性質

この節では§5における広義の平均値の定理の応用の際必要となる凸関数のいくつかの性質について考察する。

まず，凸関数の定義から始めよう。

定義4．1. $f(x)$ が実数空間 R における区間 I で凸関数であるとは，任意の $x, y \in I$ および任意の $\lambda \in (0, 1)$ に対して

(4．1)
$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leqq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

が成り立つ時をいう。特に(4．1)において等号が成り立たない時，すなわち

(4．2)
$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) < \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

であるとき，$f(x)$ は I で狭義の凸関数であるという。

次の命題4．2は凸関数を(4．1)または(4．2)とはちがった形で表現したものであるが，これらは凸関数のいろいろな性質を調べる上で，基本的な不等式である。

命題4．2. $f(x)$ が $[a, b]$ で凸関数となるための必要十分条件は，$a \leqq x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \leqq b$ なる任意の x_1, x_2, x_3, x_4 に対して

(4．3)
$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} \leqq \frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3}$$

が成り立つことである。特に $f(x)$ が $[a, b]$ で狭義の凸関数となるための必要十分条件は

(4．4)
$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} < \frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3}$$

が成り立つことである。

証明. 必要性：まず，次の関係式が成り立つことに注意する。すなわち，

$$x_2 = \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}x_1 + \frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}x_3, \quad x_3 = \frac{x_4-x_3}{x_4-x_2}x_2 + \frac{x_3-x_2}{x_4-x_2}x_4.$$

ここで

$$\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}+\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}=1,\quad \frac{x_4-x_3}{x_4-x_2}+\frac{x_3-x_2}{x_4-x_2}=1$$

であるから仮定より次の２つの不等式

（4．5）　$$f(x_2)\leqq \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}f(x_1)+\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}f(x_3),$$

（4．6）　$$f(x_3)\leqq \frac{x_4-x_3}{x_4-x_2}f(x_2)+\frac{x_3-x_2}{x_4-x_2}f(x_4)$$

を得る。このとき，（4．5）からは（4．3）の左側の不等号が，また（4．6）からは右側の不等号が得られるから（4．3）が示された。特に $f(x)$ が $[a,b]$ で狭義の凸関数である時には，（4．5）と（4．6）において〝≦″の代りに〝＜″が成り立つから（4．4）が成り立つ。

十分性：$a\leqq x_1<x_3\leqq b$ なる任意の x_1 と x_3 を，また $0<\lambda<1$ なる任意の λ をとって，$x_2=\lambda x_1+(1-\lambda)x_3$ とおけば，$x_1<x_2<x_3$ および

$$\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}=\lambda,\quad \frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}=1-\lambda$$

が成り立つ。従って，（4．3）の左側の不等式からは（4．5）が得られるから，次の不等式

（4．7）　$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_3)\leqq \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_3)$$

を得る。よって $f(x)$ は $[a,b]$ で凸関数である。また，（4．4）が成り立つときには，（4．7）において〝≦″の代りに〝＜″が成り立つことが上の場合と同様にしてわかるから，$f(x)$ は $[a,b]$ で狭義の凸関数となる。　（証　終）

ところで，$f(x)$ に連続性を仮定すると，定義4．1で与えた（4．1）や（4．2）よりも弱い形で凸関数を定式化することができる。すなわち命題4．4が成り立つのであるが，それを証明するのに次の補題が必要となる。

補題4．3． $f(x)$ は $[a,b]$ 上で凸関数とする。いま，$a\leqq x_0<y_0\leqq b$ なる x_0, y_0 と，$0<\lambda<1$ なる λ が存在して，

（4．8）　$$f(\lambda x_0+(1-\lambda)y_0)=\lambda f(x_0)+(1-\lambda)f(y_0)$$

なるときには，$f(x)$ は $[x_0,y_0]$ 上で

（4．9）　$$f(x)=\frac{f(y_0)-f(x_0)}{y_0-x_0}(x-y_0)+f(y_0)$$

と表わされる。すなわち $f(x)$ は閉区間 $[x_0,y_0]$ 上では直線となる。

証明. まず，$a\leqq p<q\leqq b$ なる任意の p,q に対して，$f(x)$ の凸性から $[p,q]$ 上では常に

（4．10）　$$f(x)\leqq \frac{f(q)-f(p)}{q-p}(x-q)+f(q)$$

が成り立つことに注意しておく。すなわち，$f(x)$ は，2点 $(p, f(p))$ と $(q, f(q))$ を結ぶ直線より常に下にある。これは命題4．2の（4．3）からただちに証明できる。さて，$c_0 = \lambda x_0 + (1-\lambda) y_0$ とおけば，$x_0 < c_0 < y_0$ である。はじめに $[x_0, c_0]$ 上で $f(x)$ は（4．9）の形に表わされることを示そう。$g(x)$ を $[x_0, y_0]$ 上で

$$g(x) = \frac{f(y_0) - f(x_0)}{y_0 - x_0}(x - y_0) + f(y_0)$$

と定義する。これは2点 $(x_0, f(x_0))$ と $(c_0, f(c_0))$ とを結ぶ直線である。よって，$[a, b]$ における $f(x)$ の凸性から $[x_0, c_0]$ 上で $f(x) \leqq g(x)$ である。ところで，ある $x_1 \in (x_0, c_0)$ に対して $f(x_1) < g(x_1)$ となったとする。そのとき，$f(y_0) = g(y_0)$ であるから $[x_1, y_0]$ 上で

$$\begin{aligned}\frac{f(y_0) - f(x_1)}{y_0 - x_1}(x - y_0) + f(y_0) &< \frac{g(y_0) - g(x_1)}{y_0 - x_1}(x - y_0) + f(y_0)\\ &= \frac{g(y_0) - g(c_0)}{y_0 - c_0}(x - c_0) + f(c_0)\end{aligned}$$

となる。ここで $c_0 \in (x_1, y_0)$ であるから $x = c_0$ とおけば，

$$\frac{f(y_0) - f(x_1)}{y_0 - x_1}(c_0 - y_0) + f(y_0) < f(c_0) \tag{4.11}$$

となる。この左辺は2点 $(x_1, f(x_1))$ と $(y_0, f(y_0))$ とを結ぶ直線の方程式の $x = c_0$ における値である。よって（4．11）は $f(x)$ の凸性を示す不等式（4．10）に反する。従って $[x_0, c_0]$ 上で $f(x) = g(x)$ でなければならない。

同様にして $[c_0, y_0]$ 上でも $f(x) = g(x)$ でなければならないことが示されるから結局（4．9）が得られた。　　　　（証　終）

この補題は，次の命題4．4で関数 $f(x)$ の狭義の凸性を証明する際に用いられる。

命題4．4． $f(x)$ は $[a, b]$ で連続な関数とする。そのとき，$f(x)$ が $[a, b]$ で凸関数であるための必要十分条件は $a \leqq x < y \leqq b$ なる任意の x と y に対して次の不等式

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqq \frac{1}{2}\{f(x) + f(y)\} \tag{4.12}$$

が成り立つことである。特に狭義の凸であるための必要十分条件は

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{1}{2}\{f(x) + f(y)\} \tag{4.13}$$

が成り立つことである。

証明． 必要性：（4．12）と（4．13）はそれぞれ，凸関数および狭義の凸関数の定義（4．1）と（4．2）からわかる。

十分性：nを正の整数，kを$0\leqq k\leqq 2^n$なる整数とする。そのとき，$a\leqq x<y\leqq b$なる任意の正の整数xとyに対して

$$f\left(\frac{k}{2^n}x+\frac{2^n-k}{2^n}y\right)\leqq\frac{k}{2^n}f(x)+\frac{2^n-k}{2^n}f(y) \tag{4.14}$$

が成り立つことをnに関する帰納法で証明しよう。$n=1$のときは（4.12）から明らかである。nのとき（4.14）が正しいと仮定すれば，$n+1$のときも正しいことを示す。$0\leqq k\leqq 2^{n+1}$のとき，$0\leqq k\leqq 2^n$かまたは$2^n<k\leqq 2^{n+1}$のいづれかである。まず$0\leqq k\leqq 2^n$とする。そのとき，$0\leqq 2^n-k\leqq 2^n$でしかも

$$\frac{k}{2^{n+1}}x+\frac{2^{n+1}-k}{2^{n+1}}y=\frac{1}{2}\left(\frac{k}{2^n}x+\frac{2^n-k}{2^n}y\right)+\frac{1}{2}y$$

であるから（4.12）と帰納法の仮定（4.14）より

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{k}{2^{n+1}}x+\frac{2^{n+1}-k}{2^{n+1}}y\right)&\leqq\frac{1}{2}f\left(\frac{k}{2^n}x+\frac{2^n-k}{2^n}y\right)+\frac{1}{2}f(y)\\
&\leqq\frac{1}{2}\left\{\frac{k}{2^n}f(x)+\frac{2^n-k}{2^n}f(y)\right\}+\frac{1}{2}f(y)\\
&=\frac{k}{2^{n+1}}f(x)+\frac{2^{n+1}-k}{2^{n+1}}f(y).
\end{aligned}$$

従って，$0\leqq k\leqq 2^n$のとき（4.14）は$n+1$のときにも正しい。次に，$2^n<k\leqq 2^{n+1}$とする。このとき，$i=k-2^n$とおけば，$0<i\leqq 2^n$，$2^{n+1}-k=2^n-i$となるから，

$$\begin{aligned}
\frac{k}{2^{n+1}}x+\frac{2^{n+1}-k}{2^{n+1}}y&=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\left(\frac{k-2^n}{2^n}x+\frac{2^{n+1}-k}{2^n}y\right)\\
&=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\left(\frac{i}{2^n}x+\frac{2^n-i}{2^n}y\right)
\end{aligned}$$

と変形できる。従って（4.12）と（4.14）より

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{k}{2^{n+1}}x+\frac{2^{n+1}-k}{2^{n+1}}y\right)&\leqq\frac{1}{2}f(x)+\frac{i}{2^{n+1}}f(x)+\frac{2^n-i}{2^{n+1}}f(y)\\
&=\frac{k}{2^{n+1}}f(x)+\frac{2^{n+1}-k}{2^{n+1}}f(y).
\end{aligned}$$

よって$2^n<k\leqq 2^{n+1}$のとき（4.14）は$n+1$のときでも正しい。以上より（4.14）は$n+1$のときにも正しいから，すべての正の整数nに対して，（4.14）が成り立つ。

ところで$S=\{\frac{k}{2^n}\mid n=1，2，\cdots，k=0，1，\cdots，2^n\}$とおけば，$S$は［0，1］で稠密な集合となる。従って任意の$\lambda\in$（0，1）に対して$S$の元の列$\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$が存在して$\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\lambda$となる。また$a\leqq x<y\leqq b$なる任意の$x, y$および任意の$\lambda_n$ $(n=1，2，\cdots)$に対しては（4.14）より

$$f(\lambda_n x+(1-\lambda_n)y)\leqq\lambda_n f(x)+(1-\lambda_n)f(y)$$

が成り立つ。ここで，$f(x)$は$[a, b]$で連続であったから，$n\to\infty$とすれば

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

を得る。よって$f(x)$は$[a, b]$で凸関数となる。

最後に（4．13）が成り立つとき $f(x)$ は狭義の凸関数となることを示そう。もし $a \leqq x_0 < y_0 \leqq b$ なる x_0, y_0 と $0 < \lambda < 1$ なる λ が存在して（4．8）が成り立ったとする。そのとき，補題4．3より $f(x)$ は $[x_0, y_0]$ 上で（4．9）の形の直線となる。このとき，$x = x_0, y = y_0$ に対しては（4．13）は "$<$" ではなく "$=$" となって（4．13）は成り立たなくなる。よって（4．13）が成り立つときには $f(x)$ は $[a, b]$ で狭義の凸関数となる。（証　終）

最後に定理5．1と5．2の狭義凸性に関する部分の証明に必要な補題4．6をあげる。これを証明するためには次の補題4．5が必要である。

補題4．5． $i = 1, 2, 3$ に対して a_i, b_i は実数で $a_i > 0$ とする。そのとき，

（4．15）
$$\frac{b_1}{a_1} \leqq \frac{b_2}{a_2} \leqq \frac{b_3}{a_3}$$

であるための必要十分条件は

（4．16）
$$\frac{b_1}{a_1} \leqq \frac{b_1 + b_2}{a_1 + a_2} \leqq \frac{b_2 + b_3}{a_2 + a_3} \leqq \frac{b_3}{a_3}$$

が成り立つことである。

証明．（4．15）より $a_1 b_2 - a_2 b_1 \geqq 0$，$a_2 b_3 - a_3 b_2 \geqq 0$，$a_1 b_3 - a_3 b_1 \geqq 0$ である。従って，

$$\begin{aligned}&(a_1 + a_2)(b_2 + b_3) - (a_2 + a_3)(b_1 + b_2)\\ &= (a_1 b_2 - a_2 b_1) + (a_2 b_3 - a_3 b_2) + (a_1 b_3 - a_3 b_1) \geqq 0.\end{aligned}$$

ここで $a_1 + a_2 > 0$，$a_2 + a_3 > 0$ であるから（4．16）の真中の不等号が成り立つ。（4．16）の左および右側の不等号も同様にして（4．15）から示すことができる。逆に（4．16）の最初の不等号および最後の不等号からそれぞれ（4．15）の最初の不等号および最後の不等号が得られる。よって（4．16）から（4．15）が示された。（証　終）

補題4．6． $f(x)$ が $[a, b]$ で凸関数となるための必要十分条件は，$a \leqq x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \leqq b$ なる任意の x_1, x_2, x_3, x_4 に対して

（4．17）
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leqq \frac{f(x_4) - f(x_2)}{x_4 - x_2} \leqq \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3}$$

が成り立つことである。特に $f(x)$ が $[a, b]$ で狭義の凸関数となるための必要十分条件は

（4．18）
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} < \frac{f(x_4) - f(x_2)}{x_4 - x_2} < \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3}$$

が成り立つことである。

証明． $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = x_3 - x_2$, $a_3 = x_4 - x_3$, $b_1 = f(x_2) - f(x_1)$, $b_2 = f(x_3) - f(x_2)$, $b_3 = f(x_4) - f(x_3)$ とおく。このとき，$a_1, a_2, a_3 > 0$ であるから，補題4．5より前半は証明された。

後半は，補題４．５の（４．15）と（４．16）において〝≦〟をすべて〝＜〟にかえても補題４．５の主張はそのまま成り立つから，前半と同様にして証明することができる。（証　終）

§５．広義の平均値の定理の応用

この節では Dini の導来数および片側微分に関する広義の平均値の定理の応用についてのべる。はじめに $\overline{D}_+ f(x)$，$\underline{D}_+ f(x)$，$\overline{D}_- f(x)$，$\underline{D}_- f(x)$ そして $D_+ f(x)$，$D_- f(x)$ の符号と関数 $f(x)$ の増減の問題について考察し，ついで $ABf(x)$ および $PQf(x)$ の符号と $f(x)$ の凸性との関連性について考察する。ただし，A と B とは $\overline{D}_+$，$\underline{D}_+$，$\overline{D}_-$，$\underline{D}_-$ のいづれかであって，A と B の組合わせによる AB の総数は全部で16通りある。例えば $A=\underline{D}_+$，$B=\overline{D}_-$ であるとき，$ABf(x)$ とは $ABf(x)=\underline{D}_+\overline{D}_- f(x)\equiv \underline{D}_+(\overline{D}_- f(x))$ を意味する。同様にして，P と Q とは D_+ か D_- かのいづれかであって，P と Q の組合わせによる PQ の総数は全部で４通りある。例えば $P=D_-$，$Q=D_+$ のとき $PQ f(x)$ は $D_- D_+ f(x)\equiv D_-(D_+ f(x))$ を意味する。

はじめに Dini の導来数に関する広義の平均値の定理と関数 $f(x)$ の増減との関連性について調べる。

定理５．１． $f(x)$ は $[a, b]$ で連続な関数とする。そのとき，任意の $x\in(a, b)$ に対して次の（５．１）～（５．４）いづれか１つが成り立てば，$f(x)$ は $[a, b]$ で狭義の増加（減少）関数となる。

（５．１）　$\overline{D}_+ f(x)>0 \quad (\overline{D}_+ f(x)<0)$,

（５．２）　$\underline{D}_+ f(x)>0 \quad (\underline{D}_+ f(x)<0)$,

（５．３）　$\overline{D}_- f(x)>0 \quad (\overline{D}_- f(x)<0)$,

（５．４）　$\underline{D}_- f(x)>0 \quad (\underline{D}_- f(x)<0)$.

証明． 定理２．４からただちに証明することができる。（証　終）

定理５．２． $f(x)$ は $[a, b]$ で連続な関数とする。そのとき，任意の $x\in(a, b)$ に対して次の（５．５）～（５．８）のいづれか１つが成り立てば，$f(x)$ は $[a, b]$ で増加（減少）関数となる。

（５．５）　$\overline{D}_+ f(x)\geqq 0 \quad (\overline{D}_+ f(x)\leqq 0)$,

（５．６）　$\underline{D}_+ f(x)\geqq 0 \quad (\underline{D}_+ f(x)\leqq 0)$,

（５．７）　$\overline{D}_- f(x)\geqq 0 \quad (\overline{D}_- f(x)\leqq 0)$,

（５．８）　$\underline{D}_- f(x)\geqq 0 \quad (\underline{D}_- f(x)\leqq 0)$.

証明． 定理２．５からただちに証明することができる。（証　終）

次に，片側微分に関する平均値の定理と関数 $f(x)$ の増減との関係について調べる。

定理5．3． $f(x)$ は $[a, b]$ で連続な関数で，(a, b) で右または左微分可能とする。そのとき，任意の $x \in (a, b)$ に対して次の（5．9）かまたは（5．10）が成り立てば，$f(x)$ は $[a, b]$ で狭義の増加（減少）関数となる。

（5．9）　$D_+ f(x) > 0 \quad (D_+ f(x) < 0),$

（5．10）　$D_- f(x) > 0 \quad (D_- f(x) < 0).$

証明. 定理3．1の（3．1）と（3．2）からわかる。　（証　終）

定理5．4． 上の定理と同じ条件のもとで，任意の $x \in (a, b)$ に対して次の（5．11）かまたは（5．12）が成り立てば，$f(x)$ は $[a, b]$ で増加（減少）関数となる。

（5．11）　$D_+ f(x) \geqq 0 \quad (D_+ f(x) \leqq 0),$

（5．12）　$D_- f(x) \geqq 0 \quad (D_- f(x) \leqq 0).$

証明. 定理3．2の（3．3）と（3．4）からただちにわかる。　（証　終）

注意5．1． 定理5．1〜5．4において，$f(x)$ の $[a, b]$ における連続性がくずれると定理は一般には成りたたない。例えば，例2．1の（2．12）で与えた関数 $f(x)$ は $x = 0$ で不連続ではあり，$(-1, 1)$ においては

$$D_+ f(x) = \overline{D}_+ f(x) = \underline{D}_+ f(x) = 1$$

である。しかしながら $f(x)$ は決して増加関数でも減少関数でもない。

さて，次は広義の平均値の定理の重要な応用例である関数の凸性の判定に関する定理をのべよう。

定理5．5． $f(x)$ は $[a, b]$ で連続な関数とし，$\overline{D}_- f(x)$ は (a, b) で連続とする。そのとき，$f(x)$ が $[a, b]$ で凸関数となるための必要十分条件は，任意の $x \in (a, b)$ に対して

（5．13）　$\underline{D}_+ \overline{D}_- f(x) \geqq 0$

となることである。特に $f(x)$ が狭義の凸関数となるための必要十分条件は

（5．14）　$\underline{D}_+ \overline{D}_- f(x) > 0$

となることである。

証明. 必要性：はじめに $f(x)$ は凸関数とするとき，$\overline{D}_- f(x)$ は (a, b) において増加関数となることを示そう。いま，$a < x_1 < x_2 < b$ なる任意の x_1 と x_2 をとって固定する。ついで $a < x_1 - h < x_1 < x_2 - h < x_2$ となるように $h > 0$ を勝手にとる。そのとき，命題4．2より次の不等式

$$\frac{f(x_1) - f(x_1 - h)}{h} \leqq \frac{f(x_2 - h) - f(x_1)}{x_2 - x_1 - h} \leqq \frac{f(x_2) - f(x_2 - h)}{h}$$

を得る。これより次の不等式が得られる。

$$\overline{D}_{-}f(x_1) \leqq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqq \overline{D}_{-}f(x_2).$$

よって$\overline{D}_{-}f(x)$は$(a,\ b)$で増加関数となる。ところで定理２．５の（２．18）の$f(x)$を上の$\overline{D}_{-}f(x)$でおきかえてみる。そうすれば（５．13）が成り立つことがわかる。次に$f(x)$が狭義の凸関数とする。そのとき$\overline{D}_{-}f(x)$は$(a,\ b)$で狭義の増加関数となることを示そう。いま，$a<x_1-h<x_1<x_2<x_3-h<x_3<b$となる$x_1,\ x_2,\ x_3$および$h>0$を任意にとる。そのとき補題４．６の（４．18）より

$$\frac{f(x_1)-f(x_1-h)}{h} < \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} < \frac{f(x_3)-f(x_3-h)}{h}$$

を得る。これより

$$\overline{D}_{-}f(x_1) \leqq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} \leqq \overline{D}_{-}f(x_3)$$

が得られる。従って$\overline{D}_{-}f(x)$は$(a,\ b)$で狭義の増加関数である。そこで定理２．４の（２．14）の$f(x)$をこの$\overline{D}_{-}f(x)$でおきかえてみると（５．14）の成り立つことがわかる。

十分性：（５．13）が成り立つとする。そのとき定理２．５の（２．18）における$f(x)$を$\overline{D}_{-}f(x)$と考えれば，$\overline{D}_{-}f(x)$は$(a,\ b)$で増加関数となる。ところで，$a<x<y<b$なる任意の$x,\ y$に対して，定理２．５の（２．19）より$x_1,\ x_2 \in (x,\ \frac{x+y}{2})$および$x_3,\ x_4 \in (\frac{x+y}{2},\ y)$が存在して

$$(5.15)\qquad \begin{cases} \overline{D}_{-}f(x_1) \leqq \dfrac{f(\frac{x+y}{2})-f(x)}{\frac{x+y}{2}-x} \leqq \overline{D}_{-}f(x_2), \\ \overline{D}_{-}f(x_3) \leqq \dfrac{f(y)-f(\frac{x+y}{2})}{y-\frac{x+y}{2}} \leqq \overline{D}_{-}f(x_4) \end{cases}$$

が成り立つ。これら２つの不等式と$\overline{D}_{-}f(x)$が増加関数でかつ$x_2<x_3$であることから，

$$\frac{f(\frac{x+y}{2})-f(x)}{\frac{y-x}{2}} - \frac{f(y)-f(\frac{x+y}{2})}{\frac{y-x}{2}} \leqq \overline{D}_{-}f(x_2)-\overline{D}_{-}f(x_3) \leqq 0$$

を得る。従って

$$(5.16)\qquad f(\frac{x+y}{2}) \leqq \frac{1}{2}\{f(x)+f(y)\}$$

が得られた。$x,\ y$は$a<x<y<b$をなる任意の数であったから命題４．４の（４．12）より$f(x)$は$(a,\ b)$で凸関数である。$f(x)$は$[a,\ b]$で連続であるから$f(x)$は$[a,\ b]$で凸関数となる。次に（５．14）が成り立っているとする。上でやったことと同様にして定理２．４の（２．15）から

$\overline{D}_- f(x)$ の (a, b) における狭義の増加性がわかり，(2.15) からは，(5.15) において "$\leqq$" を "$<$" とした不等式が得られるから (5.16) において "$\leqq$" を "$<$" とした不等式が得られる。従って命題4.4の (4.13) より $f(x)$ は (a, b) で狭義の凸関数となる。従って $f(x)$ は $[a, b]$ で連続だから $f(x)$ は $[a, b]$ で狭義の凸関数となる。　(証　終)

注意5.2.　この節のはじめに導入した記号を用いると，定理5.5は $A=\underline{D}_+$, $\mathrm{B}=\overline{D}_-$ の場合，すなわち $ABf(x)=\underline{D}_+\overline{D}_- f(x)\equiv \underline{D}_+(\overline{D}_- f(x))$ の場合についてのべたものである。この組合わせを $(A, B)=(\underline{D}_+, \overline{D}_-)$ とかくことにすれば，その外にも考察すべき組合わせは次の15通りの場合がある：

$$\begin{aligned}(A, B)=&(\overline{D}_+, \overline{D}_+), (\overline{D}_+, \underline{D}_+), (\overline{D}_+, \overline{D}_-), (\overline{D}_+, \underline{D}_-),\\ &(\underline{D}_+, \overline{D}_+), (\underline{D}_+, \underline{D}_+), (\text{済　み}), (\underline{D}_+, \underline{D}_-),\\ &(\overline{D}_-, \overline{D}_+), (\overline{D}_-, \underline{D}_+), (\overline{D}_-, \overline{D}_-), (\overline{D}_-, \underline{D}_-),\\ &(\underline{D}_-, \overline{D}_+), (\underline{D}_-, \underline{D}_+), (\underline{D}_-, \overline{D}_-), (\underline{D}_-, \underline{D}_-).\end{aligned}$$

上記のそれぞれの場合について定理5.5と同じ内容のことが成り立ち，その証明も定理5.5の証明とほとんど同様である。

最後に片側微分に関する広義の平均値の定理の応用について考察する。

定理5.6.　$f(x)$ は $[a, b]$ で連続な関数で，(a, b) で左微分可能とする。また，$D_- f(x)$ は (a, b) で連続かつ右微分可能とする。そのとき $f(x)$ が $[a, b]$ で凸関数となるための必要十分条件は任意の $x\in(a, b)$ に対して

(5.17)　$$D_+ D_- f(x)\geqq 0$$

となることである。特に $f(x)$ が狭義の凸関数となるための必要十分条件は

(5.18)　$$D_+ D_- f(x)>0$$

となることである。

証明.　$f(x)$ が (a, b) で左微分可能で，$D_- f(x)$ が右微分可能であるから

$$D_- f(x)=\overline{D}_- f(x)=\underline{D}_- f(x),\ D_+D_- f(x)=\overline{D}_+ D_- f(x)=\underline{D}_+ D_- f(x).$$

従って　$D_+ D_- f(x)=\underline{D}_+\overline{D}_- f(x)$.　よって (5.17) と (5.18) はそれぞれ定理5.5の (5.13) と (5.14) から得られる。　(証　終)

注意5.3.　定理5.6の場合にも注意5.2と同じことがいえる。すなわち，この節のはじめにのべた記号を用いれば，$P=D_+$, $Q=D_-$ とし，$PQf(x)=D_+D_- f(x)\equiv D_+(D_- f(x))$ とすれば，定理5.6は $(P, Q)=(D_+, D_-)$ の組合わせの場合をのべたものである。この外にも次の3通りの組合わせがある：

$$(P,\ Q)=(D_+,\ D_+),\ (\text{済み}),\ (D_-,\ D_+),\ (D_-,\ D_-).$$

これらの場合についても定理５.６がそのまま成り立ち，その証明も定理５.６の場合と同様に行われる。

定理５．５と５．６において $f(x)$ の $[a,\ b]$ における連続性や $\overline{D}_- f(x)$ または $D_- f(x)$ の $(a,\ b)$ における連続性がくずれるとそれらの定理は一般には成り立たない。その例を２つあげよう。

例５．１． $[-1,\ 1]$ で定義された関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(x+1)^2 & -1\leqq x<0, \\[2ex] \dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2} & 0\leqq x\leqq 1\end{cases}$$

とおく。これは $[-1,\ 1]$ で連続であるが，そこでは凸関数ではない。また，

$$\underline{D}_- f(x)=\overline{D}_- f(x)=D_- f(x)=\begin{cases}x+1 & -1<x<0, \\ x & 0\leqq x<1\end{cases}$$

は $x=0$ で不連続である。ところが，$(-1,\ 1)$ では

$$\underline{D}_+\overline{D}_- f(x)=D_+D_- f(x)=1>0$$

となる。

もう１つ例をあげよう。

例５．２． $[-1,\ 1]$ 上で定義された関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2 & -1\leqq x\leqq 0, \\[2ex] \dfrac{1}{2}x^2+1 & 0<x\leqq 1\end{cases}$$

と定義する。これは $x=0$ で不連続となるから，$f(x)$ は $[-1,\ 1]$ 上で凸関数とはならない。また，$(-1,\ 1)$ 上では

$$\overline{D}_- f(x)=\underline{D}_- f(x)=D_- f(x)=x$$

であるからこれは $(-1,\ 1)$ で連続である。ところが，$(-1,\ 1)$ 上では

$$\underline{D}_+\overline{D}_- f(x)=D_+D_- f(x)=1>0$$

となる。

以上２つの例は，$[a,\ b]$ で定義された関数 $f(x)$ が $(a,\ b)$ 上で（５．13）や（５．14）を満たしていても，$f(x)$ には例えば連続性等の条件をつけなければ，$f(x)$ は必ずしも $[a,\ b]$ 上では凸関数にはならないことを示している。

謝　　辞

本稿を作成するに際し，文部省科学研究費（一般研究Ｃ02640134）の補助を受けた。これに対し，ここに感謝の意を表する。

参考文献

[1] 辻　正次，実函数論，槇書店，1965，P.49－52.
[2] 吉田洋一，ルベグ積分入門（新数学シリーズ23），1972，P. 126－128.
[3] 溝畑　茂，ルベーグ積分（岩波全書），岩波書店，1973，P. 154－157.
[4] 越　昭三，測度と積分（共立全書），共立出版，1981，P. 53－54.

（平成２年９月30日受理）
（平成２年12月27日発行）