3次元コンピュータグラフィックスの 座標変換公式について

新関 章三・佐々木 正人
(理学部数学教室・情報処理センター)

On Formulae of Coordinate Transformation in 3-dimensional Computer Graphics

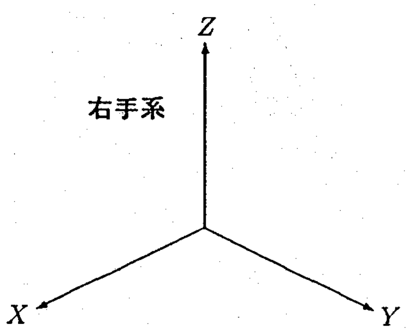
Syozo NIIZEKI and Masato SASAKI
Depertment of Mathematics, Faculty of Science
Information Processing Center

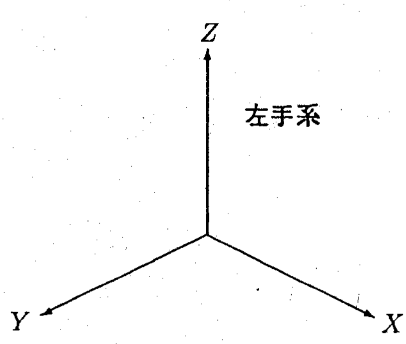
Abstract: When we show a solid figure in 3-dimensional space on the computer display of 2-dimensional plane, we need a formula of coordinate transformation which represents a point in 3-dimensional space as a point in 2-dimensional plane. The purpose of this paper is to show that there are 96 such formulae of coordinate transformation and is to write up all these formulae. In this paper, we deal only with the right-handed coordinate system.

キーワード： コンピュータグラフィックス 3次元グラフィックス 座標変換公式

はじめに

3次元空間における立体図形を，2次元平面のコンピュータ画面上に描こうとするときには，3次元空間の点を2次元平面の点として表現する変換公式が必要となる。この小論の目的は，そのような変換公式がいくつ存在するのかを明らかにし，それら変換公式をすべて書きあげることである。





3次元空間の座標系には，いわゆる右手系と左手系の2つの型があるが，ここでは右手系だけを考えることにする。この場合には上で述べた変換公式は全部で96存在することがわかった。同様にして左手系の場合にも変換公式は96存在することを示すことができるので，右と左手系を合わせた変換公式の総数は全部で192存在することがわかる。これらの公式は目的に応じて適切に使いわけることにより，3次元グラフィックスの内容がいっそう豊富になることが期待される。

以下，直交座標系の定められた3次元空間の点 $P(x,y,z)$ を，2次元平面であるコンピュータ画面上の点 $D(dx,dy)$ として表示する変換公式の考え方を述べ，ついで右手系の3次元直交座標系に対して96のすべての変換公式を具体的に求めてみよう。

§ 1.変換公式の考え方

最初に X,Y,Z 軸からなる3次元直交座標系における点 $P(x,y,z)$ の回転移動について考えよう。点 P を Z 軸の回りに X 軸から Y 軸の方向に θ だけ回転した点の座標を点 $P'(x',y',z')$ とすると，P と P' の座標の間には，図1.1からもわかるように，次の関係式が成り立つ。

$$(1.1)\qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

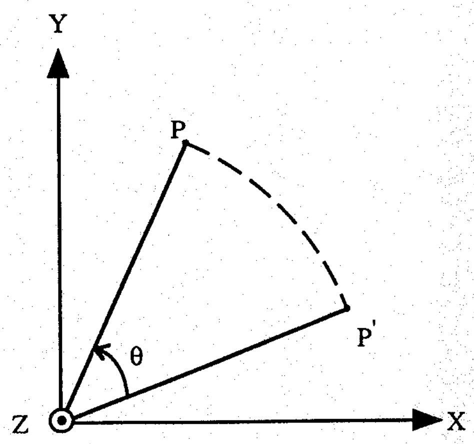


図1.1

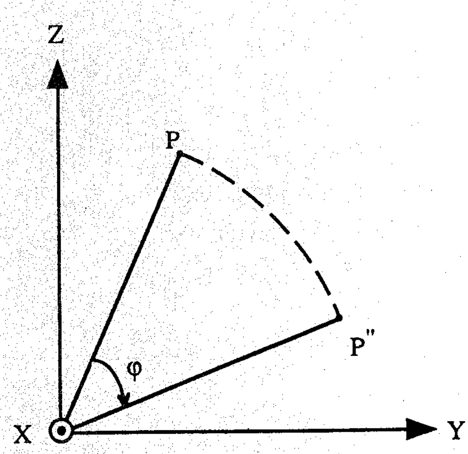


図1.2

また，点 P を X 軸の回りに φ だけ回転した点の座標を点 $P''(x'',y'',z'')$ とすると，図1.2からもわかるように，次の関係式が成り立つ。

$$(1.2)\qquad \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ここで, 図 1.1 と図 1.2 における$\odot Z$と$\odot X$とは, それぞれこのページの紙面の裏側から表側に垂直に向う Z軸と X軸とを示すものである。

ところで, 式 (1.1) と (1.2) の右辺の行列をそれぞれ A,Bとおくと, 次の関係式が成り立つ。

$$(1.3)\qquad BA = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \cos\varphi\sin\theta & \cos\varphi\cos\theta & \sin\varphi \\ -\sin\varphi\sin\theta & -\sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$(1.4)\qquad AB = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta\cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta & \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

従って点 Pを Z軸の回りに X軸から Y軸の方向にθだけ回転し, 引き続き X軸の回りに Z軸から Y軸の方向にφだけ回転した点を $P_1(x_1, y_1, z_1)$ とおくと, 2 点 Pと P_1の座標の間には, 式 (1.3) からわかるように, 次の関係式が成り立つ。

$$(1.5)\qquad \begin{cases} x_1 = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y_1 = (x\sin\theta + y\cos\theta)\cos\varphi + z\sin\varphi \\ z_1 = -(x\sin\theta + y\cos\theta)\sin\varphi + z\cos\varphi \end{cases}$$

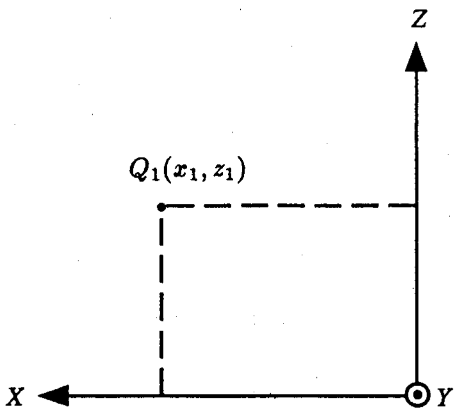


図 1.3

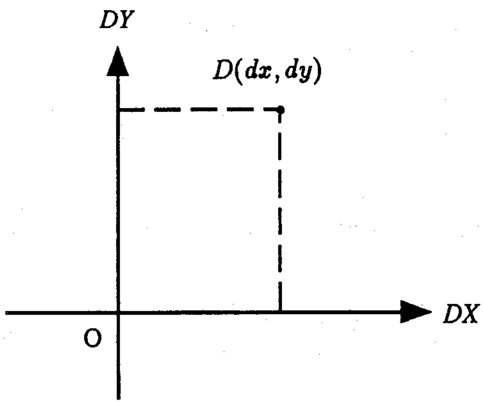


図 1.4

同様にして, 点 Pを X軸の回りに Z軸から Y軸の方向にφだけ回転し, 引き続き Z軸の回

りに X 軸から Y 軸の方向に θ だけ回転した点を $P_2(x_2, y_2, z_2)$ とおくと, 式 (1.4) からわかるように, 2 点 P と P_2 の座標の間には, 次の関係式が成り立つ。

$$
(1.6) \qquad \begin{cases} x_2 = x\cos\theta - (y\cos\varphi + z\sin\varphi)\sin\theta \\ y_2 = x\sin\theta + (y\cos\varphi + z\sin\varphi)\cos\theta \\ z_2 = -y\sin\varphi + z\cos\varphi \end{cases}
$$

ところで, 点 P を上のようにして 2 回, 回転移動して得られた 3 次元空間の点 P_1 を図 1.3 に示された 2 次元の $X-Z$ 平面に正射影した点を Q_1 とすれば, その座標は図 1.3 からわかるように $Q_1(x_1, z_1)$ となる。いま, $Q_1(x_1, z_1)$ を図 1.4 のように, DX, DY 軸からなる 2 次元直交座標系, つまりコンピュータ画面上の座標系の点 $D(dx, dy)$ と考えたとき, 2 点 Q_1 と D の座標の間の関係式は次のようになる。

$$
(1.7) \qquad (dx, dy) = (-x_1, z_1)
$$

すなわち, 式 (1.5) により次の式が得られる。

$$
(1.8) \qquad \begin{cases} dx = -x\cos\theta + y\sin\theta \\ dy = -(x\sin\theta + y\cos\theta)\sin\varphi + z\cos\varphi \end{cases}
$$

これが 3 次元空間の点を 2 次元平面のコンピュータ画面上の点として表現する変換公式である。

同様にして点 P_2 を図 1.3 に示された $X-Z$ 平面に正射影した点を $Q_2(x_2, z_2)$ とし, これを図 1.4 の $DX-DY$ 平面の点 $D(dx, dy)$ と考えたとき, 2 点 Q_2 と D の座標の間の関係式は (1.7) と同様にして $(dx, dy) = (-x_2, z_2)$ となるから, 式 (1.6) により次の式が得られる。

$$
(1.9) \qquad \begin{cases} dx = -x\cos\theta + (y\cos\varphi + z\sin\varphi)\sin\theta \\ dy = -y\sin\varphi + z\cos\varphi \end{cases}
$$

従って, 3 次元空間の点 $P(x, y, z)$ を 2 次元平面であるコンピュータ画面上の点 $D(dx, dy)$ として表示する 2 つの変換公式 (1.8) と (1.9) が得られた。

以上が, 3 次元空間における立体図形を 2 次元平面のコンピュータ画面に描く場合に必要となる変換公式の導き方を述べたものである。以下§2, §3 および§4 では, それぞれの場合に応じて変換公式を求めてみよう。

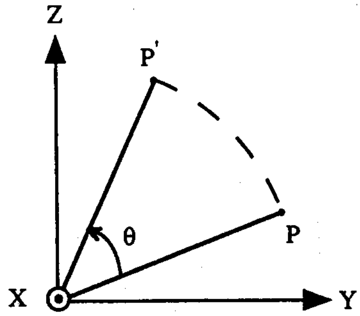
ここで, §2 以降用いられる記号について説明しておく。3 行 3 列の正方行列 $R_i(X|Y, Z, \theta)$ は, X 軸の回りに, Y 軸から Z 軸の方向に θ だけ回転した時の 3 次元空間における回転行列である。また, $R_i(Y|X, Z, \theta)$ は Y 軸の回りに, X 軸から Z 軸方向に θ だけ回転した時の回転行列である。以下 $R_i(Z|Y, X, \theta)$, $R_i(Z|X, Y, \theta) \cdots$ 等も今述べたような形で定義された 3 次元空間における回転行列である。ここで, $1 \leq i \leq 6$ である。

§2. X軸およびY軸の回りの回転

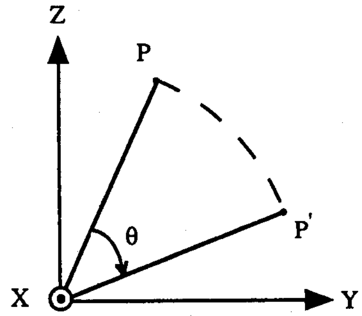
2.1 X軸の回りに回転移動した後にY軸の回りに回転移動する

下の左側には3次元空間の回転行列を，右側には座標系における回転の様子を示す。

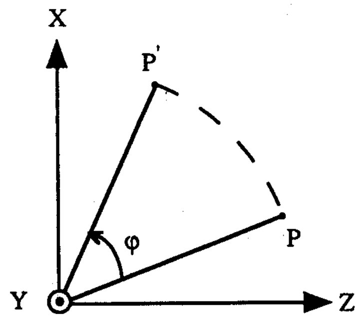
$$R_1(X|Y,Z,\theta)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$$



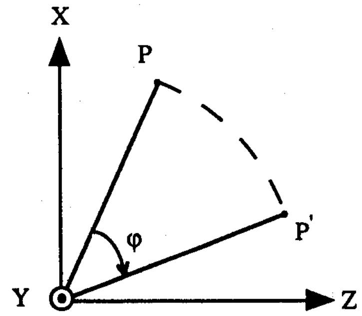
$$R_1(X|Z,Y,\theta)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&\sin\theta\\0&-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$$



$$R_1(Y|Z,X,\varphi)=\begin{pmatrix}\cos\varphi&0&\sin\varphi\\0&1&0\\-\sin\varphi&0&\cos\varphi\end{pmatrix}$$



$$R_1(Y|X,Z,\varphi)=\begin{pmatrix}\cos\varphi&0&-\sin\varphi\\0&1&0\\\sin\varphi&0&\cos\varphi\end{pmatrix}$$



2．1．1 X軸の回りにY軸からZ軸の方向にθだけ回転し，ついでY軸の回りにZ軸からX軸の方向にφだけ回転する

3次元空間の点$P(x,y,z)$をX軸の回りにY軸からZ軸の方向にθだけ回転移動し，引き続きY軸の回りにZ軸からX軸の方向にφだけ回転移動した点を$P'(x',y',z')$とする。このとき，2点P,P'の座標の間には次の関係式がある。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_1(Y|Z,X,\varphi)R_1(X|Y,Z,\theta)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

これを具体的に書き表わせば次のようになる。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi\sin\theta & \cos\varphi\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

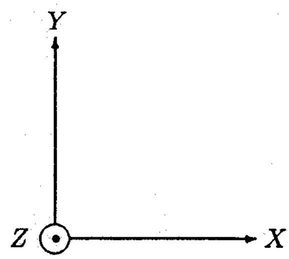
従って，次の関係式が得られる。

$$\left\{\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi + (y\sin\theta + z\cos\theta)\sin\varphi \\ y' &= y\cos\theta - z\sin\theta \\ z' &= -x\sin\varphi + (y\sin\theta + z\cos\theta)\cos\varphi \end{aligned}\right. \tag{2.3}$$

式(2.3)より，座標系の位置関係に応じて，4つの変換公式が得られる。以下左側には変換公式，右側には座標系を示す。

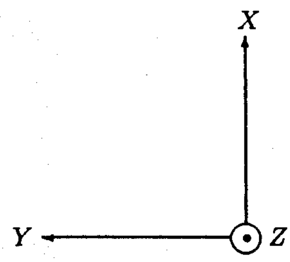
この場合は(1.7)を求めた考え方により$(dx,dy)=(x',y')$となるから，次の変換公式を得る。

[1]
$$\left\{\begin{aligned} dx &= x\cos\varphi + (y\sin\theta + z\cos\theta)\cos\varphi \\ dy &= y\cos\theta - z\sin\theta \end{aligned}\right.$$

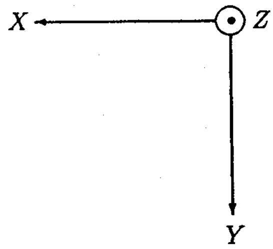


この場合は$(dx,dy)=(-y',x')$となるから，次の変換公式を得る。

[2]
$$\left\{\begin{aligned} dx &= -y\cos\theta + z\sin\theta \\ dy &= x\cos\varphi + (y\sin\theta + z\cos\theta)\sin\varphi \end{aligned}\right.$$

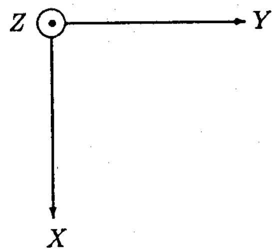


この場合は $(dx, dy) = (-x', -y')$ となるから，次の変換公式を得る。



$$
[3] \qquad \begin{cases} dx = -x\cos\varphi - (y\sin\theta + z\cos\theta)\sin\varphi \\ dy = -y\cos\theta + z\sin\theta \end{cases}
$$

この場合は $(dx, dy) = (y', -x')$ となるから，次の変換公式を得る。



$$
[4] \qquad \begin{cases} dx = y\cos\theta - z\sin\theta \\ dy = -x\cos\varphi - (y\sin\theta + z\cos\theta)\sin\varphi \end{cases}
$$

2．1．2　X軸の回りにY軸からZ軸の方向にθだけ回転し，ついでY軸の回りにX軸からZ軸の方向にφだけ回転する

点 $P(x,y,z)$ を X軸の回りに Y軸から Z軸の方向にθだけ回転移動し，引き続き Y軸の回りに X軸から Z軸の方向にφだけ回転移動した点を $P'(x',y',z')$ とすると，これら2点 P,P'の座標の間には (2.1) の場合と同様に考えて，次の関係式を得る。

$$
\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_1(Y|X,Z,\varphi)R_1(X|Y,Z,\theta)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}
$$

これを具体的に書き表わせば次のようになる。

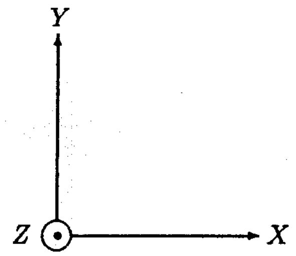
$$
\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi\sin\theta & -\sin\varphi\cos\theta \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\varphi & \cos\varphi\sin\theta & \cos\varphi\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}
$$

従って，次の関係式が得られる。

$$
(2.4) \qquad \begin{cases} x' = x\cos\varphi - (y\sin\theta + z\cos\theta)\sin\varphi \\ y' = y\cos\theta - z\sin\theta \\ z' = x\sin\varphi + (y\sin\theta + z\cos\theta)\cos\varphi \end{cases}
$$

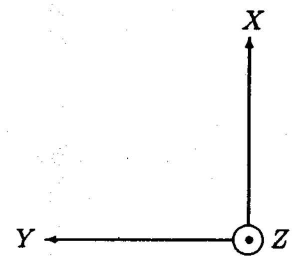
式 (2.4) より，座標系の位置関係に応じて，2.1.1 の場合と同様にして，次の4つの変換公式が得られる。

この場合は $(dx, dy) = (x', y')$ となるから，次の変換公式を得る。



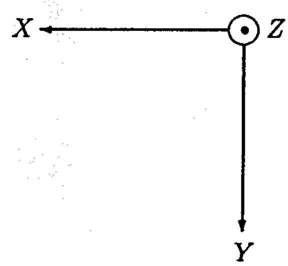
[5]
$$\begin{cases} dx = x\cos\varphi - (y\sin\theta + z\cos\theta)\sin\varphi \\ dy = y\cos\theta - z\sin\theta \end{cases}$$

この場合は $(dx, dy) = (-y', x')$ となるから，次の変換公式を得る。



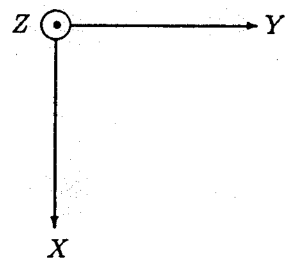
[6]
$$\begin{cases} dx = -y\cos\theta + z\sin\theta \\ dy = x\cos\varphi - (y\sin\theta + z\cos\theta)\sin\varphi \end{cases}$$

この場合は $(dx, dy) = (-x', -y')$ となるから，次の変換公式を得る。



[7]
$$\begin{cases} dx = -x\cos\varphi + (y\sin\theta + z\cos\theta)\sin\varphi \\ dy = -y\cos\theta + z\sin\theta \end{cases}$$

この場合は $(dx, dy) = (y', -x')$ となるから，次の変換公式を得る。



[8]
$$\begin{cases} dx = y\cos\theta - z\sin\theta \\ dy = -x\cos\varphi + (y\sin\theta + z\cos\theta)\sin\varphi \end{cases}$$

2．1．3　X軸の回りにZ軸からY軸の方向にθだけ回転し，ついでY軸の回りにZ軸からX軸の方向にφだけ回転する

点 $P(x, y, z)$ を X軸の回りに Z軸から Y軸の方向にθだけ回転移動し，引き続き Y軸の回りに Z軸から X軸の方向にφだけ回転移動した点を $P'(x', y', z')$ とすると，これら2点 P, P'の座標の間には，次の関係式が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_1(Y|Z,X,\varphi)R_1(X|Z,Y,\theta)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

これを具体的に書き表わせば次のようになる。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\varphi & -\cos\varphi\sin\theta & \cos\varphi\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

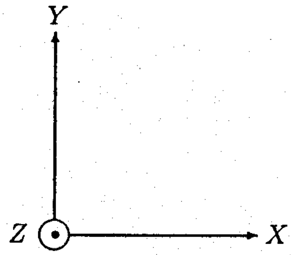
これにより次の関係式を得る。

(2.5)
$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi - (y\sin\theta - z\cos\theta)\sin\varphi \\ y' = y\cos\theta + z\sin\theta \\ z' = -x\sin\varphi - (y\sin\theta - z\cos\theta)\cos\varphi \end{cases}$$

上の式 (2.5) より，座標系の位置関係に応じて，次の 4 つの変換公式が得られる。

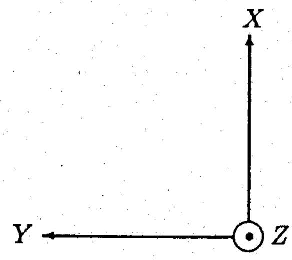
この場合は $(dx, dy) = (x', y')$ となるから，次の変換公式を得る。

[9]
$$\begin{cases} dx = x\cos\varphi - (y\sin\theta - z\cos\theta)\sin\varphi \\ dy = y\cos\theta + z\sin\theta \end{cases}$$



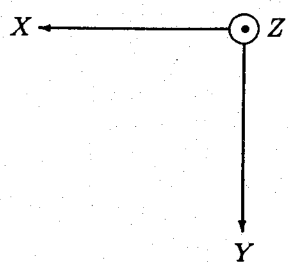
この場合は $(dx, dy) = (-y', x')$ となるから，次の変換公式を得る。

[10]
$$\begin{cases} dx = -y\cos\theta - z\sin\theta \\ dy = x\cos\varphi - (y\sin\theta - z\cos\theta)\sin\varphi \end{cases}$$

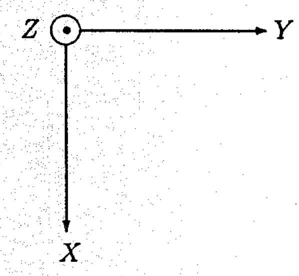


この場合は $(dx, dy) = (-x', -y')$ となるから，次の変換公式を得る。

[11]
$$\begin{cases} dx = -x\cos\varphi + (y\sin\theta - z\cos\theta)\sin\varphi \\ dy = -y\cos\theta - z\sin\theta \end{cases}$$



この場合は $(dx, dy) = (y', -x')$ となるから，次の変換公式を得る。



$$
[12] \qquad \begin{cases} dx = y\cos\theta + z\sin\theta \\ dy = -x\cos\varphi + (y\sin\theta - z\cos\theta)\sin\varphi \end{cases}
$$

2.1.4 X軸の回りにZ軸からY軸の方向にθだけ回転し，ついでY軸の回りにX軸からZ軸の方向にφだけ回転する

点 $P(x,y,z)$ を X軸の回りに Z軸から Y軸の方向にθだけ回転移動し，引き続き Y軸の回りに X軸から Z軸の方向にφ だけ回転移動した点を $P'(x',y',z')$ とすると，これら2点 P,P'の座標の間には，次の関係式が成り立つ。

$$
\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_1(Y|X,Z,\varphi)R_1(X|Z,Y,\theta)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}
$$

これを具体的に書き表わせば次のようになる。

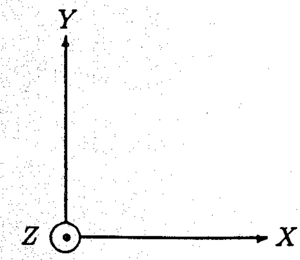
$$
\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi\sin\theta & -\sin\varphi\cos\theta \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\varphi & -\cos\varphi\sin\theta & \cos\varphi\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}
$$

従って，次の関係式が得られる。

$$
(2.6) \qquad \begin{cases} x' = x\cos\varphi + (y\sin\theta - z\cos\theta)\sin\varphi \\ y' = y\cos\theta + z\sin\theta \\ z' = x\sin\varphi - (y\sin\theta - z\cos\theta)\cos\varphi \end{cases}
$$

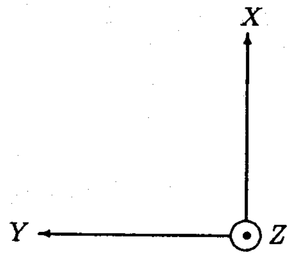
この式 (2.6) より，座標系の位置関係に応じて，次の4つの変換公式が得られる。

この場合は $(dx, dy) = (x', y')$ となるから，次の変換公式を得る。



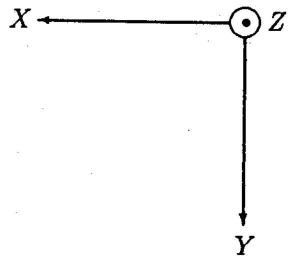
$$
[13] \qquad \begin{cases} dx = x\cos\varphi + (y\sin\theta - z\cos\theta)\sin\varphi \\ dy = y\cos\theta + z\sin\theta \end{cases}
$$

この場合は $(dx, dy) = (-y', x')$ となるから，次の変換公式を得る。



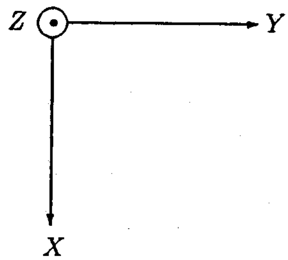
[14]
$$\begin{cases} dx = -y\cos\theta - z\sin\theta \\ dy = x\cos\varphi + (y\sin\theta - z\cos\theta)\sin\varphi \end{cases}$$

この場合は $(dx, dy) = (-x', -y')$ となるから，次の変換公式を得る。



[15]
$$\begin{cases} dx = -x\cos\varphi - (y\sin\theta - z\cos\theta)\sin\varphi \\ dy = -y\cos\theta - z\sin\theta \end{cases}$$

この場合は $(dx, dy) = (y', -x')$ となるから，次の変換公式を得る。

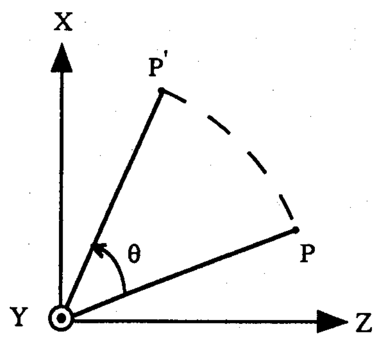


[16]
$$\begin{cases} dx = y\cos\theta + z\sin\theta \\ dy = -x\cos\varphi - (y\sin\theta - z\cos\theta)\sin\varphi \end{cases}$$

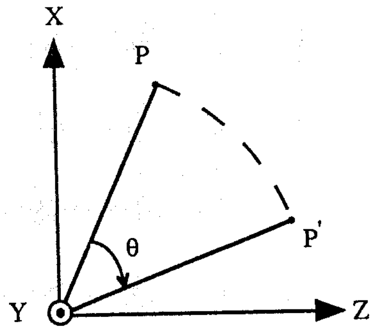
2．2　Y軸の回りに回転移動した後にX軸の回りに回転移動する

ここでも、2.1 の場合と同様に下の左側には3次元空間の回転行列を，右側には座標系における回転の様子を示す。

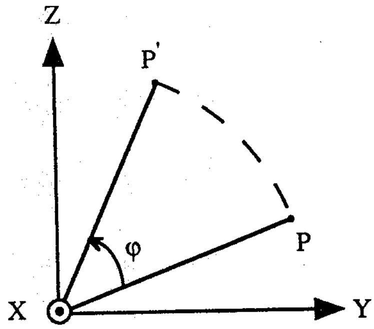
$$R_2(Y|Z, X, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$



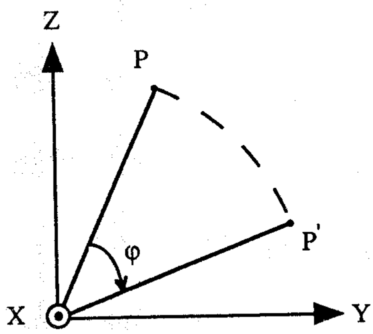
$$R_2(Y|X,Z,\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}$$



$$R_2(X|Y,Z,\varphi)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi\\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$$



$$R_2(X|Z,Y,\varphi)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi\\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$$



2．2．1　Y軸の回りにZ軸からX軸の方向にθだけ回転し，ついでX軸の回りにY軸からZ軸の方向にφだけ回転する

3次元空間の点$P(x,y,z)$をY軸の回りにZ軸からX軸の方向にθだけ回転移動し，引き続きX軸の回りにY軸からZ軸の方向にφだけ回転移動した点を$P'(x',y',z')$とすると，2点P,P'の座標の間には次の関係式が成り立つ。

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=R_2(X|Y,Z,\varphi)R_2(Y|Z,X,\theta)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

これを具体的に書き表せば次のようになる。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi & -\sin\varphi\cos\theta \\ -\cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi & \cos\varphi\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

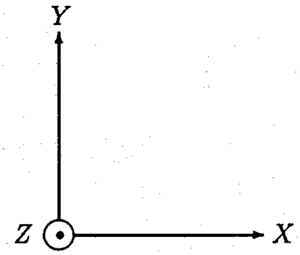
従って, 次の関係式が得られる。

$$(2.7)\qquad \begin{cases} x' = x\cos\theta + z\sin\theta \\ y' = (x\sin\theta - z\cos\theta)\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z' = -(x\sin\theta - z\cos\theta)\cos\varphi + y\sin\varphi \end{cases}$$

上の式 (2.7) より座標系の位置関係に応じて, 以下の 4 つの変換公式が得られる。下の左側には変換公式を, 右側には座標系を示す。

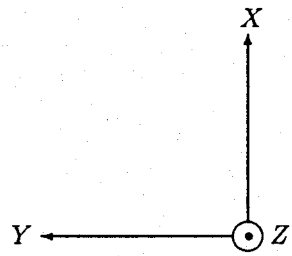
この場合は $(dx, dy) = (x', y')$となるから,次の変換公式を得る。

$$[17]\qquad \begin{cases} dx = x\cos\theta + z\sin\theta \\ dy = (x\sin\theta - z\cos\theta)\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$$



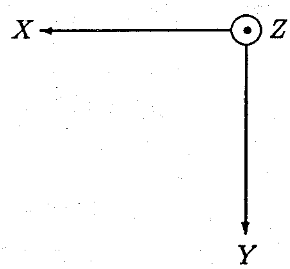
この場合は $(dx, dy) = (-y', x')$ となるから, 次の変換公式を得る。

$$[18]\qquad \begin{cases} dx = -(x\sin\theta - z\cos\theta)\sin\varphi - y\cos\varphi \\ dy = x\cos\theta + z\sin\theta \end{cases}$$

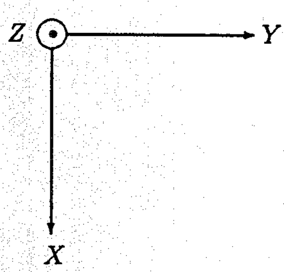


この場合は $(dx, dy) = (-x', -y')$ となるから, 次の変換公式を得る。

$$[19]\qquad \begin{cases} dx = -x\cos\theta - z\sin\theta \\ dy = -(x\sin\theta - z\cos\theta)\sin\varphi - y\cos\varphi \end{cases}$$



この場合は $(dx, dy) = (y', -x')$ となるから，次の変換公式を得る。



[20] $$\begin{cases} dx = (x\sin\theta - z\cos\theta)\sin\varphi + y\cos\varphi \\ dy = -x\cos\theta - z\sin\theta \end{cases}$$

2.2.2 Y軸の回りにZ軸からX軸の方向にθだけ回転し，ついでX軸の回りにZ軸からY軸の方向にφだけ回転する

点 $P(x, y, z)$ を Y軸の回りに Z軸から X軸の方向にθだけ回転移動し，引き続き X軸の回りに Z軸から Y軸の方向にφだけ回転移動した点を $P'(x', y', z')$ とすると，2点 P, P'の座標の間には次の関係式が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_2(X|Z, Y, \varphi)R_2(Y|Z, X, \theta)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

これを具体的に書き表せば次のようになる。

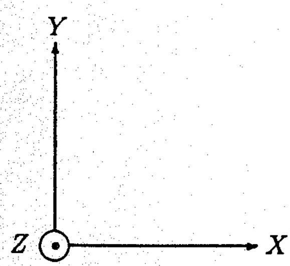
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ -\sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi & \sin\varphi\cos\theta \\ -\cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi & \cos\varphi\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

従って，次の関係式が得られる。

(2.8) $$\begin{cases} x' = x\cos\theta + z\sin\theta \\ y' = -(x\sin\theta - z\cos\theta)\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z' = -(x\sin\theta - z\cos\theta)\cos\varphi - y\sin\varphi \end{cases}$$

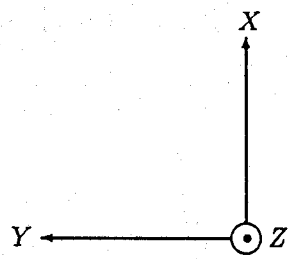
上の式 (2.8) より，座標系の位置関係に応じて，以下の4つの変換公式が得られる。下の左側には変換公式を，右側には座標系を示す。

この場合は $(dx, dy) = (x', y')$ となるから，次の変換公式を得る。



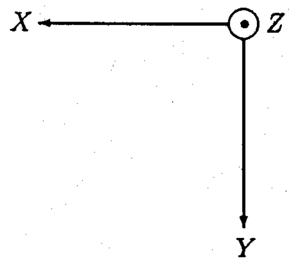
[21] $$\begin{cases} dx = x\cos\theta + z\sin\theta \\ dy = -(x\sin\theta - z\cos\theta)\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$$

この場合は $(dx, dy) = (-y', x')$ となるから，次の変換公式を得る。



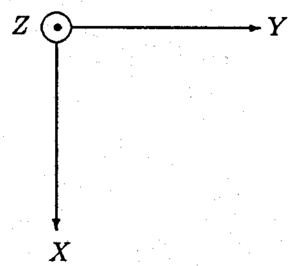
[22] $$\begin{cases} dx = (x\sin\theta - z\cos\theta)\sin\varphi - y\cos\varphi \\ dy = x\cos\theta + z\sin\theta \end{cases}$$

この場合は $(dx, dy) = (-x', -y')$ となるから，次の変換公式を得る。



[23] $$\begin{cases} dx = -x\cos\theta - z\sin\theta \\ dy = (x\sin\theta - z\cos\theta)\sin\varphi - y\cos\varphi \end{cases}$$

この場合は $(dx, dy) = (y', -x')$ となるから，次の変換公式を得る。



[24] $$\begin{cases} dx = -(x\sin\theta - z\cos\theta)\sin\varphi + y\cos\varphi \\ dy = -x\cos\theta - z\sin\theta \end{cases}$$

2.2.3　Y軸の回りにX軸からZ軸の方向にθだけ回転し，ついでX軸の回りにY軸からZ軸の方向にφだけ回転する

点 $P(x, y, z)$ を Y軸の回りに X軸から Z軸の方向にθだけ回転移動し，引き続き X軸の回りに Y軸から Z軸の方向にφだけ回転移動した点を $P'(x', y', z')$ とすると，2点 P, P'の座標間には，次の関係式が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_2(X|Y, Z, \varphi)R_2(Y|X, Z, \theta)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

これを具体的に書き表せば次のようになる。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ -\sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi & -\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi & \cos\varphi\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

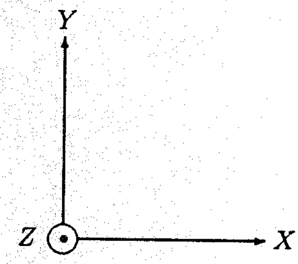
従って, 次の関係式が得られる。

$$
(2.9) \qquad \begin{cases} x' = x\cos\theta - z\sin\theta \\ y' = -(x\sin\theta + z\cos\theta)\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z' = (x\sin\theta + z\cos\theta)\cos\varphi + y\sin\varphi \end{cases}
$$

この式 (2.9) より, 座標系の位置関係に応じて, 以下の 4 つの変換公式が得られる。下の左側には変換公式を, 右側には座標系を示す。

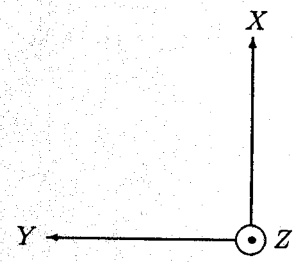
この場合は $(dx, dy) = (x', y')$ となるから, 次の変換公式を得る。

$$
[25] \qquad \begin{cases} dx = x\cos\theta - z\sin\theta \\ dy = -(x\sin\theta + z\cos\theta)\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}
$$

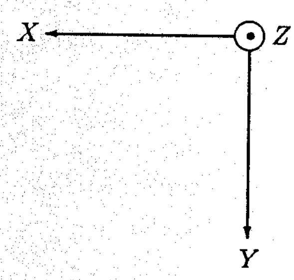


この場合は $(dx, dy) = (-y', x')$ となるから, 次の変換公式を得る。

$$
[26] \qquad \begin{cases} dx = (x\sin\theta + z\cos\theta)\sin\varphi - y\cos\varphi \\ dy = x\cos\theta - z\sin\theta \end{cases}
$$

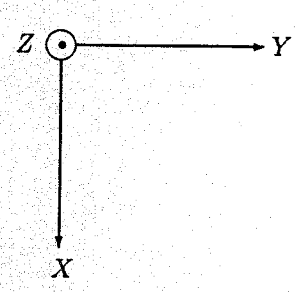


この場合は $(dx, dy) = (-x', -y')$ となるから, 次の変換公式を得る。



$$
[27] \qquad \begin{cases} dx = -x\cos\theta + z\sin\theta \\ dy = (x\sin\theta + z\cos\theta)\sin\varphi - y\cos\varphi \end{cases}
$$

この場合は $(dx, dy) = (y', -x')$ となるから, 次の変換公式を得る。



$$
[28] \qquad \begin{cases} dx = -(x\sin\theta + z\cos\theta)\sin\varphi + y\cos\varphi \\ dy = -x\cos\theta + z\sin\theta \end{cases}
$$

2．2．4　Y軸の回りにX軸からZ軸の方向にθだけ回転し，ついでX軸の回りにZ軸からY軸の方向にφだけ回転する

点 $P(x,y,z)$ を Y軸の回りに X軸から Z軸の方向にθだけ回転移動し，引き続き X軸の回りに Z軸から Y軸の方向にφ だけ回転移動した点を $P'(x',y',z')$ とすると，2点 P,P'の座標の間には，次の関係式が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_2(X|Z,Y,\varphi)R_2(Y|X,Z,\theta)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

これを具体的に書き表せば次のようになる。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi & \sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi & \cos\varphi\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

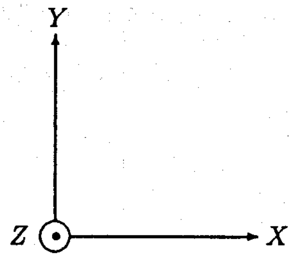
従って，次の関係式が得られる。

$$(2.10)\qquad \begin{cases} x' = x\cos\theta - z\sin\theta \\ y' = (x\sin\theta + z\cos\theta)\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z' = (x\sin\theta + z\cos\theta)\cos\varphi - y\sin\varphi \end{cases}$$

上の式 (2.10) より，座標系の位置関係に応じて，以下の4つの変換公式が得られる。下の左側には変換公式を，右側には座標系を示す。

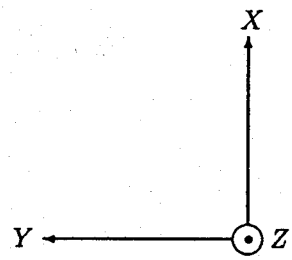
この場合は $(dx,dy)=(x',y')$ となるから，次の変換公式を得る。

$$[29]\qquad \begin{cases} dx = x\cos\theta - z\sin\theta \\ dy = (x\sin\theta + z\cos\theta)\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$$

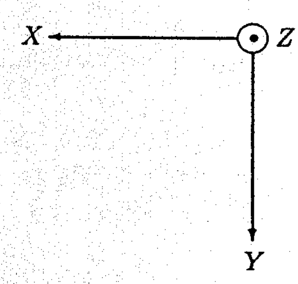


この場合は $(dx,dy)=(-y',x')$ となるから，次の変換公式を得る。

$$[30]\qquad \begin{cases} dx = -(x\sin\theta + z\cos\theta)\sin\varphi - y\cos\varphi \\ dy = x\cos\theta - z\sin\theta \end{cases}$$

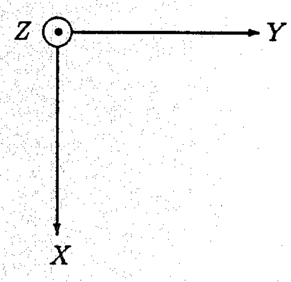


この場合は $(dx, dy) = (-x', -y')$ となるから，次の変換公式を得る。



[31]
$$\begin{cases} dx = -x\cos\theta + z\sin\theta \\ dy = -(x\sin\theta + z\cos\theta)\sin\varphi - y\cos\varphi \end{cases}$$

この場合は $(dx, dy) = (y', -x')$ となるから，次の変換公式を得る。



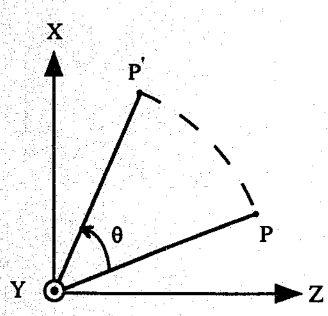
[32]
$$\begin{cases} dx = (x\sin\theta + z\cos\theta)\sin\varphi + y\cos\varphi \\ dy = -x\cos\theta + z\sin\theta \end{cases}$$

§３．Ｙ軸およびＺ軸の回りの回転

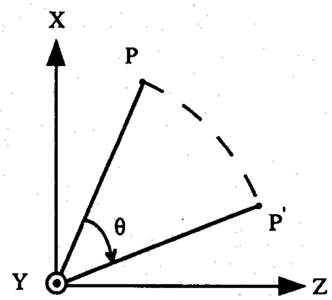
３．１　Ｙ軸の回りに回転移動した後にＺ軸の回りに回転移動する

下の左側には３次元空間の回転行列を，右側には座標系における回転の様子を示す。

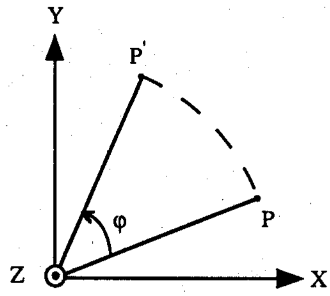
$$R_3(Y|Z, X, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$



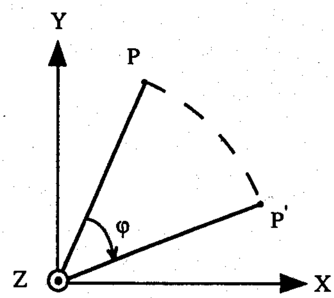
$$R_3(Y|X,Z,\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}$$



$$R_3(Z|X,Y,\varphi)=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$



$$R_3(Z|Y,X,\varphi)=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$



3．1．1　Y 軸の回りに Z 軸から X 軸の方向にθだけ回転し，ついで Z 軸の回りに X 軸から Y 軸の方向にφ だけ回転する

3 次元空間の点 $P(x,y,z)$ を Y軸の回りに Z軸から X軸の方向にθだけ回転移動し，引き続き Z軸の回りに X軸から Y軸の方向にφ だけ回転移動した点を $P'(x',y',z')$ とする。このとき，2 点 P,P'の座標の間には次の関係式がある。

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=R_3(Z|X,Y,\varphi)R_3(Y|Z,X,\theta)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

これを具体的に書き表わせば次のようになる。

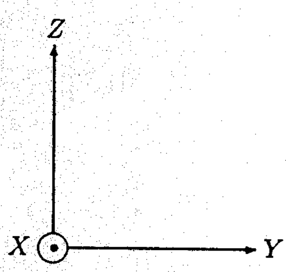
$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi\cos\theta & -\sin\varphi & \cos\varphi\sin\theta\\ \sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi & \sin\varphi\sin\theta\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

従って, 次の関係式が得られる。

$$
(3.1) \qquad \begin{cases} x' = (x\cos\theta + z\sin\theta)\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = (x\cos\theta + z\sin\theta)\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z' = -x\sin\theta + z\cos\theta \end{cases}
$$

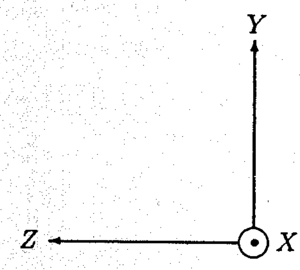
上の式 (3.1) より, 座標系の位置関係に応じて, 4 つの変換公式が得られる。以下左側には変換公式, 右側には座標系を示す。

この場合は $(dx, dy) = (y', z')$ となるから, 次の変換公式を得る。



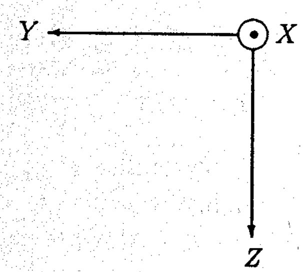
$$
[33] \qquad \begin{cases} dx = (x\cos\theta + z\sin\theta)\sin\varphi + y\cos\varphi \\ dy = -x\sin\theta + z\cos\theta \end{cases}
$$

この場合は $(dx, dy) = (-z', y')$ となるから, 次の変換公式を得る。



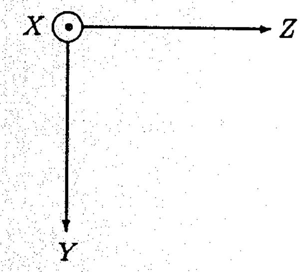
$$
[34] \qquad \begin{cases} dx = x\sin\theta - z\cos\theta \\ dy = (x\cos\theta + z\sin\theta)\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}
$$

この場合は $(dx, dy) = (-y', -z')$ となるから, 次の変換公式を得る。



$$
[35] \qquad \begin{cases} dx = -(x\cos\theta + z\sin\theta)\sin\varphi - y\cos\varphi \\ dy = x\sin\theta - z\cos\theta \end{cases}
$$

この場合は $(dx, dy) = (z', -y')$ となるから, 次の変換公式を得る。



$$
[36] \qquad \begin{cases} dx = -x\sin\theta + z\cos\theta \\ dy = -(x\cos\theta + z\sin\theta)\sin\varphi - y\cos\varphi \end{cases}
$$

3．1．2　Y軸の回りにZ軸からX軸の方向にθだけ回転し，ついでZ軸の回りにY軸からX軸の方向にφだけ回転する

点$P(x,y,z)$をY軸の回りにZ軸からX軸の方向にθだけ回転移動し，引き続きZ軸の回りにY軸からX軸の方向にφだけ回転移動した点を$P'(x',y',z')$とすると，これら2点P,P'の座標の間には次の関係式がある。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_3(Z|Y,X,\varphi)R_3(Y|Z,X,\theta)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

これを具体的に書き表わせば次のようになる。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & \sin\varphi & \cos\varphi\sin\theta \\ -\sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi & -\sin\varphi\sin\theta \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

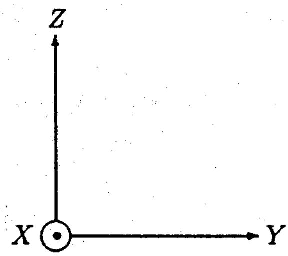
従って，次の関係式が得られる。

$$(3.2)\qquad \begin{cases} x' = (x\cos\theta + z\sin\theta)\cos\varphi + y\sin\varphi \\ y' = -(x\cos\theta + z\sin\theta)\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z' = -x\sin\theta + z\cos\theta \end{cases}$$

上の式(3.2)より，座標系の位置関係に応じて，4つの変換公式が得られる。以下左側には変換公式を，右側には座標系を示す。

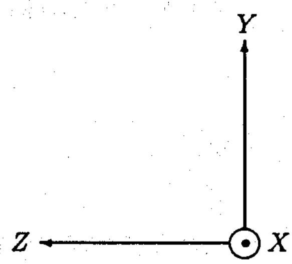
この場合は$(dx,dy)=(y',z')$となるから，次の変換公式を得る。

$$[37]\qquad \begin{cases} dx = -(x\cos\theta + z\sin\theta)\sin\varphi + y\cos\varphi \\ dy = -x\sin\theta + z\cos\theta \end{cases}$$

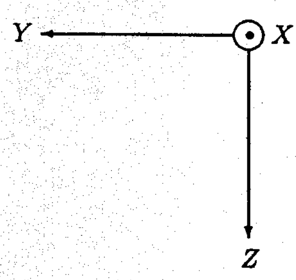


この場合は$(dx,dy)=(-z',y')$となるから，次の変換公式を得る。

$$[38]\qquad \begin{cases} dx = x\sin\theta - z\cos\theta \\ dy = -(x\cos\theta + z\sin\theta)\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$$

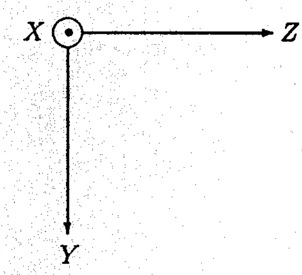


この場合は $(dx, dy) = (-y', -z')$ となるから, 次の変換公式を得る。



[39]
$$\begin{cases} dx = (x\cos\theta + z\sin\theta)\sin\varphi - y\cos\varphi \\ dy = x\sin\theta - z\cos\theta \end{cases}$$

この場合は $(dx, dy) = (z', -y')$ となるから, 次の変換公式を得る。



[40]
$$\begin{cases} dx = -x\sin\theta + z\cos\theta \\ dy = (x\cos\theta + z\sin\theta)\sin\varphi - y\cos\varphi \end{cases}$$

3．1．3　Y軸の回りにX軸からZ軸の方向にθだけ回転し, ついでZ軸の回りにX軸からY軸の方向にφだけ回転する

点 $P(x, y, z)$ を Y軸の回りに X軸から Z軸の方向にθだけ回転移動し, 引き続き Z軸の回りに X軸から Y軸の方向にφだけ回転移動した点を $P'(x', y', z')$ とすると, これら2点 P, P'の座標の間には, 次の関係式が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_3(Z|X, Y, \varphi)R_3(Y|X, Z, \theta)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

これを具体的に書き表わせば次のようになる。

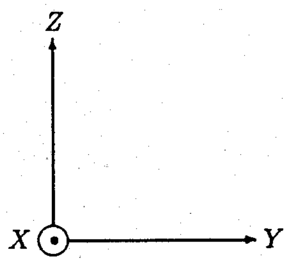
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -\sin\varphi & -\cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi & -\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

これにより次の関係式を得る。

(3.3)
$$\begin{cases} x' = (x\cos\theta - z\sin\theta)\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = (x\cos\theta - z\sin\theta)\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z' = x\sin\theta + z\cos\theta \end{cases}$$

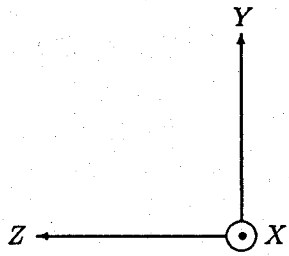
上の式 (3.3) より, 座標系の位置関係に応じて, 4つの変換公式が得られる。以下左側には変換公式を, 右側には座標系を示す。

この場合は $(dx, dy) = (y', z')$ となるから，次の変換公式を得る。



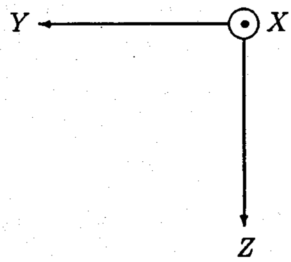
[41] $$\begin{cases} dx = (x\cos\theta - z\sin\theta)\sin\varphi + y\cos\varphi \\ dy = x\sin\theta + z\cos\theta \end{cases}$$

この場合は $(dx, dy) = (-z', y')$ となるから，次の変換公式を得る。



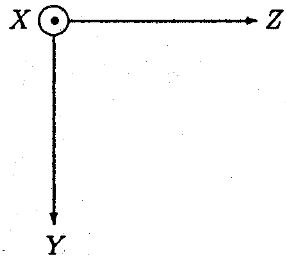
[42] $$\begin{cases} dx = -x\sin\theta - z\cos\theta \\ dy = (x\cos\theta - z\sin\theta)\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$$

この場合は $(dx, dy) = (-y', -z')$ となるから，次の変換公式を得る。



[43] $$\begin{cases} dx = -(x\cos\theta - z\sin\theta)\sin\varphi - y\cos\varphi \\ dy = -x\sin\theta - z\cos\theta \end{cases}$$

この場合は $(dx, dy) = (z', -y')$ となるから，次の変換公式を得る。



[44] $$\begin{cases} dx = x\sin\theta + z\cos\theta \\ dy = -(x\cos\theta - z\sin\theta)\sin\varphi - y\cos\varphi \end{cases}$$

3．1．4　Y 軸の回りに X 軸から Z 軸の方向にθだけ回転し，ついで Z 軸の回りに Y 軸から X 軸の方向にφ だけ回転する

点 $P(x, y, z)$ を Y軸の回りに X軸から Z軸の方向にθだけ回転移動し，引き続き Z軸の回りに Y軸から X軸の方向にφ だけ回転移動した点を $P'(x', y', z')$ とすると，これら 2 点 P, P'の座標の間には，次の関係式が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_3(Z|Y,X,\varphi)R_3(Y|X,Z,\theta)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

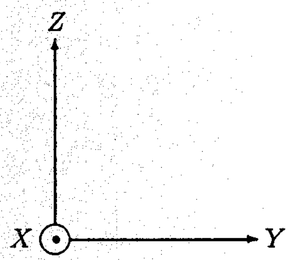
これを具体的に書き表わせば次のようになる。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & \sin\varphi & -\cos\varphi\sin\theta \\ -\sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi & \sin\varphi\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

従って，次の関係式が得られる。

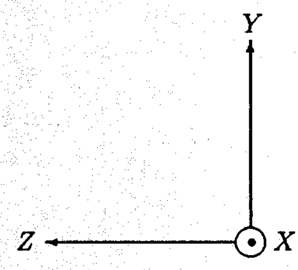
$$(3.4)\qquad \begin{cases} x' = (x\cos\theta - z\sin\theta)\cos\varphi + y\sin\varphi \\ y' = -(x\cos\theta - z\sin\theta)\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z' = x\sin\theta + z\cos\theta \end{cases}$$

上の式 (3.4) より，座標系の位置関係に応じて，次の 4 つの変換公式が得られる。以下左側には変換公式を，右側には座標系を示す。



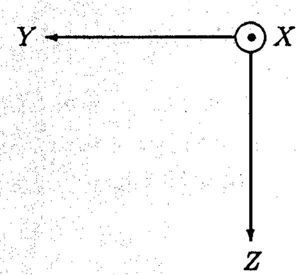
この場合は $(dx, dy) = (y', z')$ となるから，次の変換公式を得る。

$$[45]\qquad \begin{cases} dx = -(x\cos\theta - z\sin\theta)\sin\varphi + y\cos\varphi \\ dy = x\sin\theta + z\cos\theta \end{cases}$$



この場合は $(dx, dy) = (-z', y')$ となるから，次の変換公式を得る。

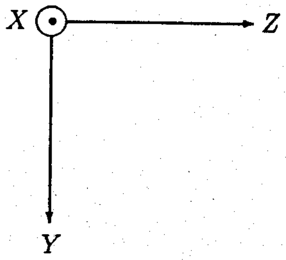
$$[46]\qquad \begin{cases} dx = -x\sin\theta - z\cos\theta \\ dy = -(x\cos\theta - z\sin\theta)\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$$



この場合は $(dx, dy) = (-y', -z')$ となるから，次の変換公式を得る。

$$[47]\qquad \begin{cases} dx = (x\cos\theta - z\sin\theta)\sin\varphi - y\cos\varphi \\ dy = -x\sin\theta - z\cos\theta \end{cases}$$

この場合は $(dx, dy) = (z', -y')$ となるから，次の変換公式を得る。

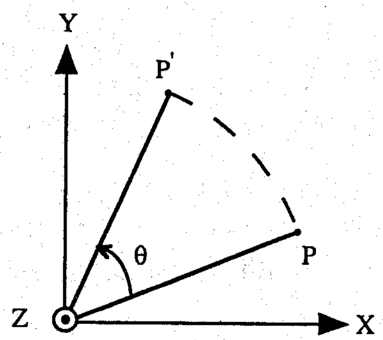


[48]
$$\begin{cases} dx = x\sin\theta + z\cos\theta \\ dy = (x\cos\theta - z\sin\theta)\sin\varphi - y\cos\varphi \end{cases}$$

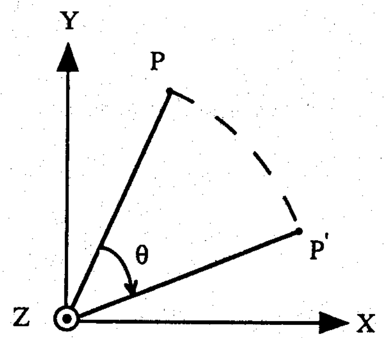
3．2　Z 軸の回りに回転移動した後に Y 軸の回りに回転移動する

下の左側には3次元空間の回転行列を，右側には座標系における回転の様子を示す。

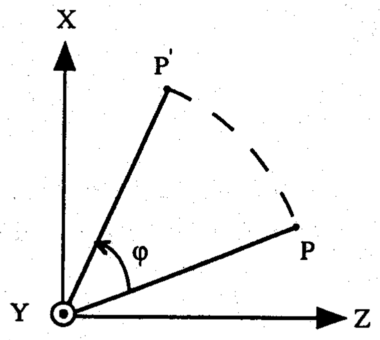
$$R_4(Z|X,Y,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



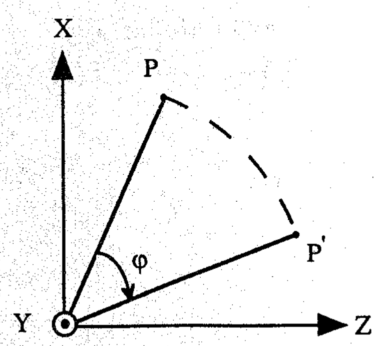
$$R_4(Z|Y,X,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$R_4(Y|Z,X,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$$



$$R_4(Y|X,Z,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$$



3．2．1　Z軸の回りにX軸からY軸の方向にθだけ回転し，ついでY軸の回りにZ軸からX軸の方向にφだけ回転する

3次元空間の点$P(x,y,z)$をZ軸の回りにX軸からY軸の方向にθだけ回転移動し，引き続きY軸の回りにZ軸からX軸の方向にφだけ回転移動した点を$P'(x',y',z')$とすると，2点P,P'の座標の間には次の関係式が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_4(Y|Z,X,\varphi)R_4(Z|X,Y,\theta)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

これを具体的に書き表せば次のようになる。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -\cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\sin\varphi\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

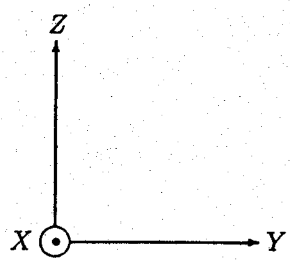
従って，次の関係式が得られる。

$$(3.5)\qquad \begin{cases} x' = (x\cos\theta - y\sin\theta)\cos\varphi + z\sin\varphi \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \\ z' = -(x\cos\theta - y\sin\theta)\sin\varphi + z\cos\varphi \end{cases}$$

上の式(3.5)より座標系の位置関係に応じて，以下の4つの変換公式が得られる。以下左側には変換公式を，右側には座標系を示す。

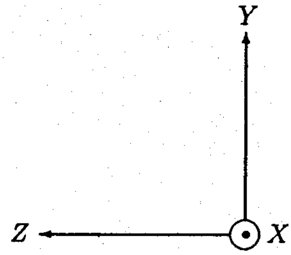
この場合は $(dx, dy) = (y', z')$ となるから，次の変換公式を得る。

[49] $$\begin{cases} dx = x\sin\theta + y\cos\theta \\ dy = -(x\cos\theta - y\sin\theta)\sin\varphi + z\cos\varphi \end{cases}$$



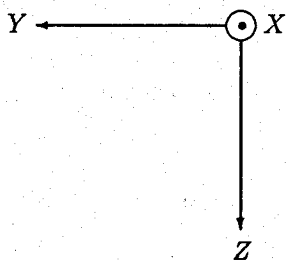
この場合は $(dx, dy) = (-z', y')$ となるから，次の変換公式を得る。

[50] $$\begin{cases} dx = (x\cos\theta - y\sin\theta)\sin\varphi - z\cos\varphi \\ dy = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$



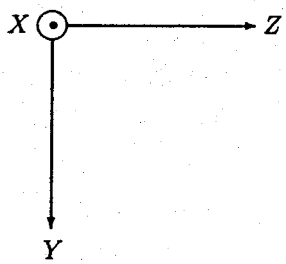
この場合は $(dx, dy) = (-y', -z')$ となるから，次の変換公式を得る。

[51] $$\begin{cases} dx = -x\sin\theta - y\cos\theta \\ dy = (x\cos\theta - y\sin\theta)\sin\varphi - z\cos\varphi \end{cases}$$



この場合は $(dx, dy) = (z', -y')$ となるから，次の変換公式を得る。

[52] $$\begin{cases} dx = -(x\cos\theta - y\sin\theta)\sin\varphi + z\cos\varphi \\ dy = -x\sin\theta - y\cos\theta \end{cases}$$



3．2．2　Z軸の回りにX軸からY軸の方向にθだけ回転し，ついでY軸の回りにX軸からZ軸の方向にφだけ回転する

点 $P(x, y, z)$ を Z軸の回りに X軸から Y軸の方向にθだけ回転移動し，引き続き Y軸の回りに X軸から Z軸の方向にφだけ回転移動した点を $P'(x', y', z')$ とすると，2点 P, P'の座標の間には次の関係式が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_4(Y|X,Z,\varphi)R_4(Z|X,Y,\theta)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

これを具体的に書き表せば次のようになる。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -\cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \sin\varphi\cos\theta & -\sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

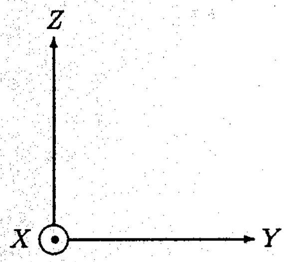
従って, 次の関係式が得られる。

(3.6)
$$\begin{cases} x' = (x\cos\theta - y\sin\theta)\cos\varphi - z\sin\varphi \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \\ z' = (x\cos\theta - y\sin\theta)\sin\varphi + z\cos\varphi \end{cases}$$

上の式 (3.6) より, 座標系の位置関係に応じて, 4 つの変換公式が得られる。以下左側には変換公式を, 右側には座標系を示す。

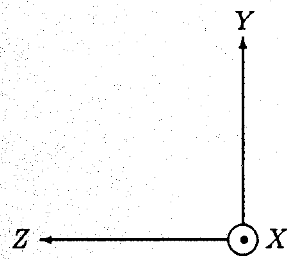
この場合は $(dx, dy) = (y', z')$ となるから, 次の変換公式を得る。

[53]
$$\begin{cases} dx = x\sin\theta + y\cos\theta \\ dy = (x\cos\theta - y\sin\theta)\sin\varphi + z\cos\varphi \end{cases}$$



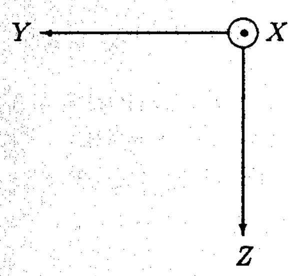
この場合は $(dx, dy) = (-z', y')$ となるから, 次の変換公式を得る。

[54]
$$\begin{cases} dx = -(x\cos\theta - y\sin\theta)\sin\varphi - z\cos\varphi \\ dy = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

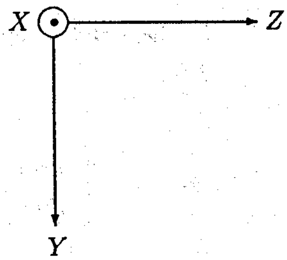


この場合は $(dx, dy) = (-y', -z')$ となるから, 次の変換公式を得る。

[55]
$$\begin{cases} dx = -x\sin\theta - y\cos\theta \\ dy = -(x\cos\theta - y\sin\theta)\sin\varphi - z\cos\varphi \end{cases}$$



この場合は $(dx, dy) = (z', -y')$ となるから，次の変換公式を得る。



[56]
$$\begin{cases} dx = (x\cos\theta - y\sin\theta)\sin\varphi + z\cos\varphi \\ dy = -x\sin\theta - y\cos\theta \end{cases}$$

3．2．3　Z軸の回りにY軸からX軸の方向にθだけ回転し，ついでY軸の回りにZ軸からX軸の方向にφだけ回転する

点 $P(x, y, z)$ を Z軸の回りに Y軸から X軸の方向にθだけ回転移動し，引き続き Y軸の回りに Z軸から X軸の方向にφ だけ回転移動した点を $P'(x', y', z')$ とすると，2点 P, P'の座標の間には，次の関係式が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_4(Y|Z, X, \varphi)R_4(Z|Y, X, \theta)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

これを具体的に書き表せば次のようになる。

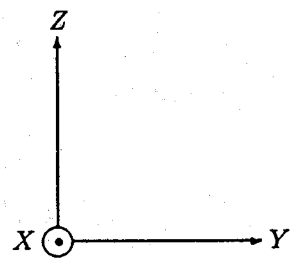
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\sin\varphi\cos\theta & -\sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

従って，次の関係式が得られる。

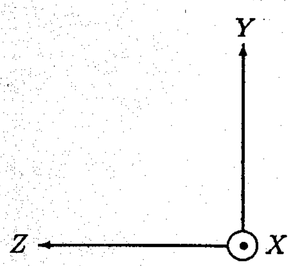
(3.7)
$$\begin{cases} x' = (x\cos\theta + y\sin\theta)\cos\varphi + z\sin\varphi \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \\ z' = -(x\cos\theta + y\sin\theta)\sin\varphi + z\cos\varphi \end{cases}$$

上の式 (3.7) より，座標系の位置関係に応じて，4つの変換公式が得られる。以下左側には変換公式を，右側には座標系を示す。

この場合は $(dx, dy) = (y', z')$ となるから，次の変換公式を得る。

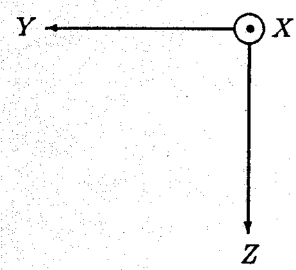


[57]
$$\begin{cases} dx = -x\sin\theta + y\cos\theta \\ dy = -(x\cos\theta + y\sin\theta)\sin\varphi + z\cos\varphi \end{cases}$$



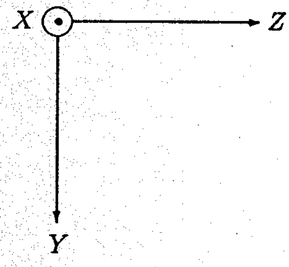
この場合は $(dx, dy) = (-z', y')$ となるから, 次の変換公式を得る。

$$
[58] \qquad \begin{cases} dx = (x\cos\theta + y\sin\theta)\sin\varphi - z\cos\varphi \\ dy = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}
$$



この場合は $(dx, dy) = (-y', -z')$ となるから, 次の変換公式を得る。

$$
[59] \qquad \begin{cases} dx = x\sin\theta - y\cos\theta \\ dy = (x\cos\theta + y\sin\theta)\sin\varphi - z\cos\varphi \end{cases}
$$



この場合は $(dx, dy) = (z', -y')$ となるから, 次の変換公式を得る。

$$
[60] \qquad \begin{cases} dx = -(x\cos\theta + y\sin\theta)\sin\varphi + z\cos\varphi \\ dy = x\sin\theta - y\cos\theta \end{cases}
$$

3.2.4 Z軸の回りにY軸からX軸の方向にθだけ回転し, ついでY軸の回りにX軸からZ軸の方向にφだけ回転する

点 $P(x, y, z)$ を Z軸の回りに Y軸から X軸の方向にθだけ回転移動し, 引き続き Y軸の回りに X軸から Z軸の方向にφ だけ回転移動した点を $P'(x', y', z')$ とすると, 2点 P, P'の座標の間には, 次の関係式が成り立つ。

$$
\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_4(Y|X, Z, \varphi)R_4(Z|Y, X, \theta)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}
$$

これにより

$$
\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \sin\varphi\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}
$$

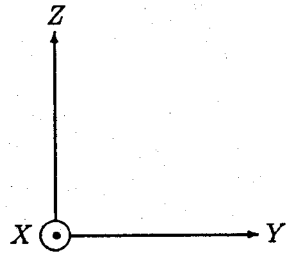
従って, 次の関係式が得られる。

$$
(3.8)\qquad
\begin{cases}
x' = (x\cos\theta + y\sin\theta)\cos\varphi - z\sin\varphi \\
y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \\
z' = (x\cos\theta + y\sin\theta)\sin\varphi + z\cos\varphi
\end{cases}
$$

上の式 (3.8) より，座標系の位置関係に応じて，4 つの変換公式が得られる。以下左側には変換公式を，右側には座標系を示す。

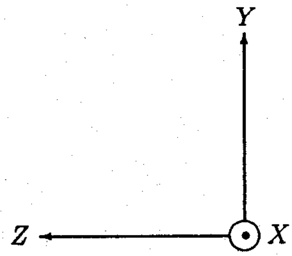
この場合は $(dx, dy) = (y', z')$ となるから，次の変換公式を得る。

$$
[61]\qquad
\begin{cases}
dx = -x\sin\theta + y\cos\theta \\
dy = (x\cos\theta + y\sin\theta)\sin\varphi + z\cos\varphi
\end{cases}
$$



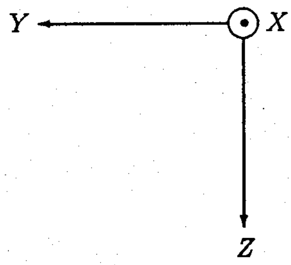
この場合は $(dx, dy) = (-z', y')$ となるから，次の変換公式を得る。

$$
[62]\qquad
\begin{cases}
dx = -(x\cos\theta + y\sin\theta)\sin\varphi - z\cos\varphi \\
dy = -x\sin\theta + y\cos\theta
\end{cases}
$$



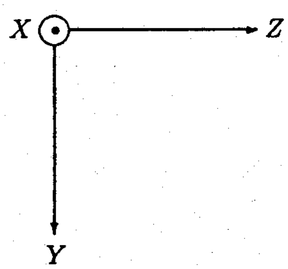
この場合は $(dx, dy) = (-y', -z')$ となるから，次の変換公式を得る。

$$
[63]\qquad
\begin{cases}
dx = x\sin\theta - y\cos\theta \\
dy = -(x\cos\theta + y\sin\theta)\sin\varphi - z\cos\varphi
\end{cases}
$$



この場合は $(dx, dy) = (z', -y')$ となるから，次の変換公式を得る。

$$
[64]\qquad
\begin{cases}
dx = (x\cos\theta + y\sin\theta)\sin\varphi + z\cos\varphi \\
dy = x\sin\theta - y\cos\theta
\end{cases}
$$

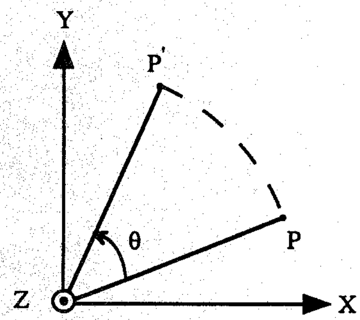


§4．Z軸およびX軸の回りの回転

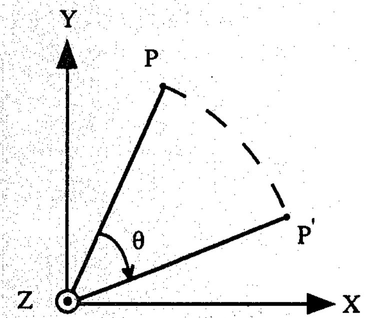
4．1　Z軸の回りに回転移動した後にX軸の回りに回転移動する

下の左側には3次元空間の回転行列を，右側には座標系における回転の様子を示す。

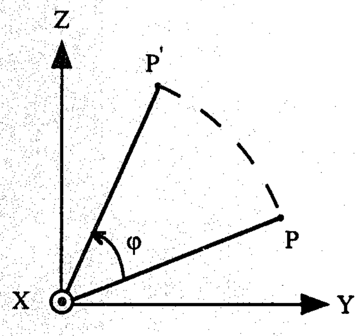
$$R_5(Z|X,Y,\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$



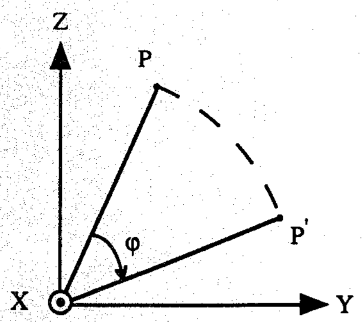
$$R_5(Z|Y,X,\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$



$$R_5(X|Y,Z,\varphi)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi\\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$$



$$R_5(X|Z,Y,\varphi)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi\\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$$



4．1．1　Z軸の回りにX軸からY軸の方向にθだけ回転し，ついでX軸の回りにY軸からZ軸の方向にφだけ回転する

3次元空間の点 $P(x,y,z)$ を Z軸の回りに X軸から Y軸の方向にθだけ回転移動し，引き続き X軸の回りに Y軸から Z軸の方向にφ だけ回転移動した点を $P'(x',y',z')$ とする。このとき，2点 P,P'の座標の間には次の関係式がある。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_5(X|Y,Z,\varphi)R_5(Z|X,Y,\theta)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

これを具体的に書き表わせば次のようになる。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \cos\varphi\sin\theta & \cos\varphi\cos\theta & -\sin\varphi \\ \sin\varphi\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

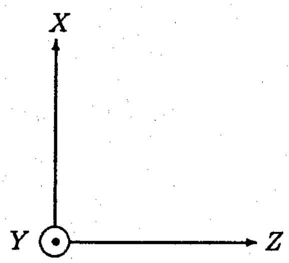
従って，次の関係式が得られる。

$$(4.1)\qquad \begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = (x\sin\theta + y\cos\theta)\cos\varphi - z\sin\varphi \\ z' = (x\sin\theta + y\cos\theta)\sin\varphi + z\cos\varphi \end{cases}$$

上の式 (4.1) より，座標系の位置関係に応じて，4つの変換公式が得られる。以下左側には変換公式，右側には座標系を示す。

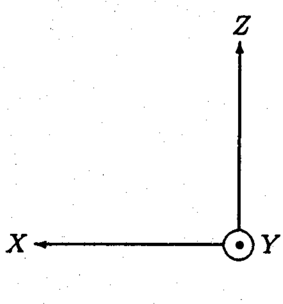
この場合は $(dx,dy)=(z',x')$ となるから，次の変換公式を得る。

$$[65]\qquad \begin{cases} dx = (x\sin\theta + y\cos\theta)\sin\varphi + z\cos\varphi \\ dy = x\cos\theta - y\sin\theta \end{cases}$$

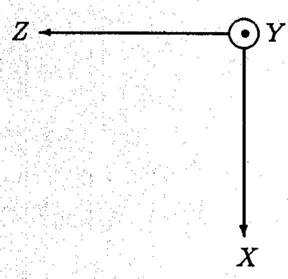


この場合は $(dx,dy)=(-x',z')$ となるから，次の変換公式を得る。

$$[66]\qquad \begin{cases} dx = -x\cos\theta + y\sin\theta \\ dy = (x\sin\theta + y\cos\theta)\sin\varphi + z\cos\varphi \end{cases}$$

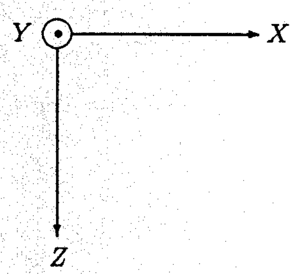


この場合は $(dx, dy) = (-z', -x')$ となるから，次の変換公式を得る。



[67]
$$\begin{cases} dx = -(x\sin\theta + y\cos\theta)\sin\varphi - z\cos\varphi \\ dy = -x\cos\theta + y\sin\theta \end{cases}$$

この場合は $(dx, dy) = (x', -z')$ となるから，次の変換公式を得る。



[68]
$$\begin{cases} dx = x\cos\theta - y\sin\theta \\ dy = -(x\sin\theta + y\cos\theta)\sin\varphi - z\cos\varphi \end{cases}$$

4．1．2　Z 軸の回りに X 軸から Y 軸の方向にθだけ回転し，ついで X 軸の回りに Z 軸から Y 軸の方向にφ だけ回転する

点 $P(x, y, z)$ を Z軸の回りに X軸から Y軸の方向にθだけ回転移動し，引き続き X軸の回りに Z軸から Y軸の方向にφ だけ回転移動した点を $P'(x', y', z')$ とすると，これら 2 点 P,P' の座標の間には次の関係式がある。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_5(X|Z, Y, \varphi)R_5(Z|X, Y, \theta)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

これを具体的に書き表わせば次のようになる。

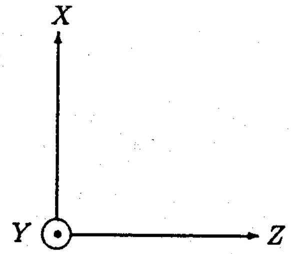
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \cos\varphi\sin\theta & \cos\varphi\cos\theta & \sin\varphi \\ -\sin\varphi\sin\theta & -\sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

従って，次の関係式が得られる。

(4.2)
$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = (x\sin\theta + y\cos\theta)\cos\varphi + z\sin\varphi \\ z' = -(x\sin\theta + y\cos\theta)\sin\varphi + z\cos\varphi \end{cases}$$

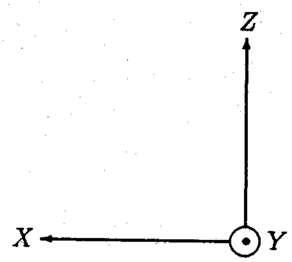
上の式 (4.2) より，座標系の位置関係に応じて，4 つの変換公式が得られる。以下左側には変換公式を，右側には座標系を示す。

この場合は $(dx, dy) = (z', x')$ となるから，次の変換公式を得る。



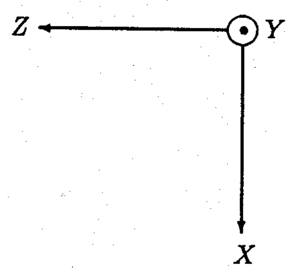
[69]
$$\begin{cases} dx = -(x\sin\theta + y\cos\theta)\sin\varphi + z\cos\varphi \\ dy = x\cos\theta - y\sin\theta \end{cases}$$

この場合は $(dx, dy) = (-x', z')$ となるから，次の変換公式を得る。



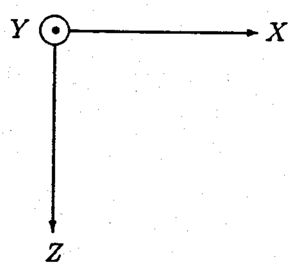
[70]
$$\begin{cases} dx = -x\cos\theta + y\sin\theta \\ dy = -(x\sin\theta + y\cos\theta)\sin\varphi + z\cos\varphi \end{cases}$$

この場合は $(dx, dy) = (-z', -x')$ となるから，次の変換公式を得る。



[71]
$$\begin{cases} dx = (x\sin\theta + y\cos\theta)\sin\varphi - z\cos\varphi \\ dy = -x\cos\theta + y\sin\theta \end{cases}$$

この場合は $(dx, dy) = (x', -z')$ となるから，次の変換公式を得る。



[72]
$$\begin{cases} dx = x\cos\theta - y\sin\theta \\ dy = (x\sin\theta + y\cos\theta)\sin\varphi - z\cos\varphi \end{cases}$$

4．1．3　Z軸の回りにY軸からX軸の方向にθだけ回転し，ついでX軸の回りにY軸からZ軸の方向にφだけ回転する

点 $P(x, y, z)$ を Z軸の回りに Y軸から X軸の方向にθだけ回転移動し，引き続き X軸の回りに Y軸から Z軸の方向にφ だけ回転移動した点を $P'(x', y', z')$ とすると，これら2点 P, P' の座標の間には，次の関係式が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_5(X|Y,Z,\varphi)R_5(Z|Y,X,\theta)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

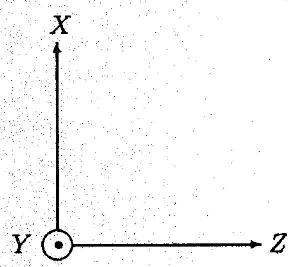
これを具体的に書き表わせば次のようになる。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\cos\varphi\sin\theta & \cos\varphi\cos\theta & -\sin\varphi \\ -\sin\varphi\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

これにより次の関係式を得る。

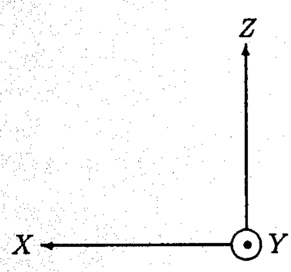
$$(4.3) \quad \begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -(x\sin\theta - y\cos\theta)\cos\varphi - z\sin\varphi \\ z' = -(x\sin\theta - y\cos\theta)\sin\varphi + z\cos\varphi \end{cases}$$

上の式 (4.3) より, 座標系の位置関係に応じて, 4 つの変換公式が得られる。以下左側には変換公式を, 右側には座標系を示す。



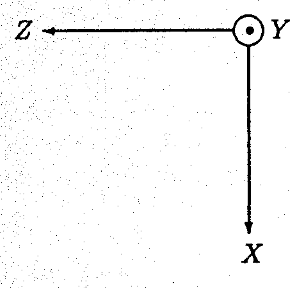
この場合は $(dx, dy) = (z', x')$ となるから, 次の変換公式を得る。

$$[73] \quad \begin{cases} dx = -(x\sin\theta - y\cos\theta)\sin\varphi + z\cos\varphi \\ dy = x\cos\theta + y\sin\theta \end{cases}$$



この場合は $(dx, dy) = (-x', z')$ となるから, 次の変換公式を得る。

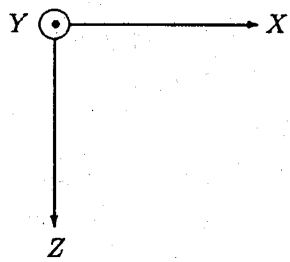
$$[74] \quad \begin{cases} dx = -x\cos\theta - y\sin\theta \\ dy = -(x\sin\theta - y\cos\theta)\sin\varphi + z\cos\varphi \end{cases}$$



この場合は $(dx, dy) = (-z', -x')$ となるから, 次の変換公式を得る。

$$[75] \quad \begin{cases} dx = (x\sin\theta - y\cos\theta)\sin\varphi - z\cos\varphi \\ dy = -x\cos\theta - y\sin\theta \end{cases}$$

この場合は $(dx, dy) = (x', -z')$ となるから，次の変換公式を得る。



[76]
$$\begin{cases} dx = x\cos\theta + y\sin\theta \\ dy = (x\sin\theta - y\cos\theta)\sin\varphi - z\cos\varphi \end{cases}$$

4．1．4　Z軸の回りにY軸からX軸の方向にθだけ回転し，ついでX軸の回りにZ軸からY軸の方向にφだけ回転する

点 $P(x, y, z)$ を Z軸の回りに Y軸から X軸の方向にθだけ回転移動し，引き続き X軸の回りに Z軸から Y軸の方向にφ だけ回転移動した点を $P'(x', y', z')$ とすると，これら2点 P,P' の座標の間には，次の関係式が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_5(X|Z, Y, \varphi)R_5(Z|Y, X, \theta)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

これを具体的に書き表わせば次のようになる。

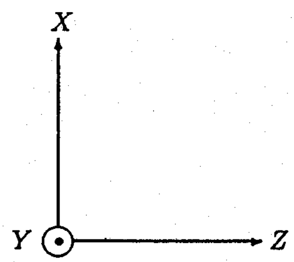
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\cos\varphi\sin\theta & \cos\varphi\cos\theta & \sin\varphi \\ \sin\varphi\sin\theta & -\sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

従って，次の関係式が得られる。

(4.4)
$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -(x\sin\theta - y\cos\theta)\cos\varphi + z\sin\varphi \\ z' = (x\sin\theta - y\cos\theta)\sin\varphi + z\cos\varphi \end{cases}$$

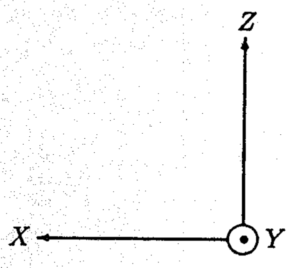
上の式 (4.4) より，座標系の位置関係に応じて，次の4つの変換公式が得られる。以下左側には変換公式を，右側には座標系を示す。

この場合は $(dx, dy) = (z', x')$ となるから，次の変換公式を得る。



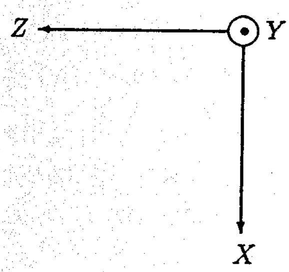
[77]
$$\begin{cases} dx = (x\sin\theta - y\cos\theta)\sin\varphi + z\cos\varphi \\ dy = x\cos\theta + y\sin\theta \end{cases}$$

この場合は $(dx, dy) = (-x', z')$ となるから，次の変換公式を得る。



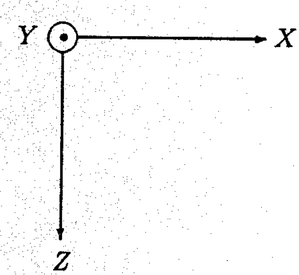
[78]
$$\begin{cases} dx = -x\cos\theta - y\sin\theta \\ dy = (x\sin\theta - y\cos\theta)\sin\varphi + z\cos\varphi \end{cases}$$

この場合は $(dx, dy) = (-z', -x')$ となるから，次の変換公式を得る。



[79]
$$\begin{cases} dx = -(x\sin\theta - y\cos\theta)\sin\varphi - z\cos\varphi \\ dy = -x\cos\theta - y\sin\theta \end{cases}$$

この場合は $(dx, dy) = (x', -z')$ となるから，次の変換公式を得る。

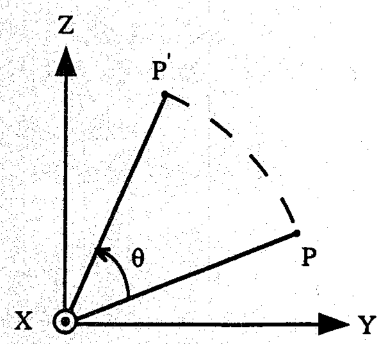


[80]
$$\begin{cases} dx = x\cos\theta + y\sin\theta \\ dy = -(x\sin\theta - y\cos\theta)\sin\varphi - z\cos\varphi \end{cases}$$

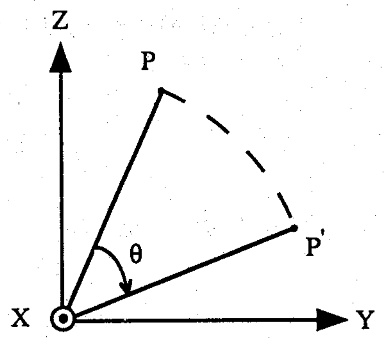
4.2 X軸の回りに回転移動した後にZ軸の回りに回転移動する

下の左側には3次元空間の回転行列を，右側には座標系における回転の様子を示す。

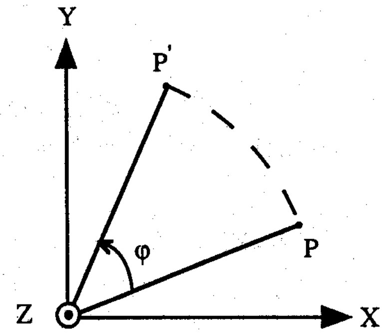
$$R_6(X|Y, Z, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$



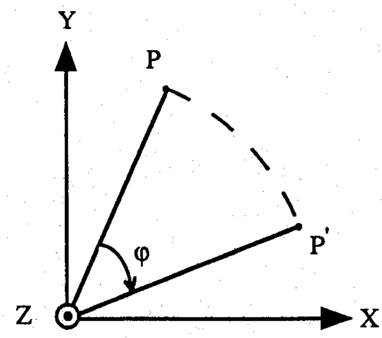
$$R_6(X|Z,Y,\theta)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$



$$R_6(Z|X,Y,\varphi)=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$



$$R_6(Z|Y,X,\varphi)=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$



4．2．1　X軸の回りにY軸からZ軸の方向にθだけ回転し，ついでZ軸の回りにX軸からY軸の方向にφだけ回転する

3次元空間の点$P(x,y,z)$をX軸の回りにY軸からZ軸の方向にθだけ回転移動し，引き続きZ軸の回りにX軸からY軸の方向にφだけ回転移動した点を$P'(x',y',z')$とすると，2点P,P'の座標の間には次の関係式が成り立つ。

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=R_6(Z|X,Y,\varphi)R_6(X|Y,Z,\theta)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

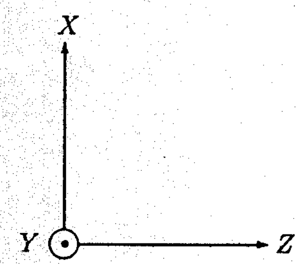
これを具体的に書き表わせば次のようになる。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi & \cos\varphi\cos\theta & -\cos\varphi\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

従って, 次の関係式が得られる。

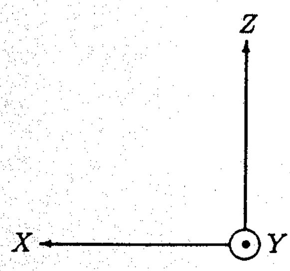
$$(4.5) \qquad \begin{cases} x' = x\cos\varphi - (y\cos\theta - z\sin\theta)\sin\varphi \\ y' = x\sin\varphi + (y\cos\theta - z\sin\theta)\cos\varphi \\ z' = y\sin\theta + z\cos\theta \end{cases}$$

上の式 (4.5) より座標系の位置関係に応じて, 以下の 4 つの変換公式が得られる。以下左側には変換公式を, 右側には座標系を示す。



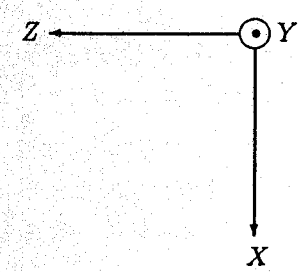
この場合は $(dx, dy) = (z', x')$となるから, 次の変換公式を得る。

$$[81] \qquad \begin{cases} dx = y\sin\theta + z\cos\theta \\ dy = x\cos\varphi - (y\cos\theta - z\sin\theta)\sin\varphi \end{cases}$$



この場合は $(dx, dy) = (-x', z')$ となるから, 次の変換公式を得る。

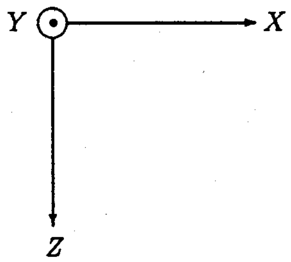
$$[82] \qquad \begin{cases} dx = -x\cos\varphi + (y\cos\theta - z\sin\theta)\sin\varphi \\ dy = y\sin\theta + z\cos\theta \end{cases}$$



この場合は $(dx, dy) = (-z', -x')$ となるから, 次の変換公式を得る。

$$[83] \qquad \begin{cases} dx = -y\sin\theta - z\cos\theta \\ dy = -x\cos\varphi + (y\cos\theta - z\sin\theta)\sin\varphi \end{cases}$$

この場合は $(dx, dy) = (x', -z')$ となるから，次の変換公式を得る。



[84] $$\begin{cases} dx = x\cos\varphi - (y\cos\theta - z\sin\theta)\sin\varphi \\ dy = -y\sin\theta - z\cos\theta \end{cases}$$

4.2.2 X軸の回りにY軸からZ軸の方向にθだけ回転し，ついでZ軸の回りにY軸からX軸の方向にφだけ回転する

点 $P(x, y, z)$ を X軸の回りに Y軸から Z軸の方向にθだけ回転移動し，引き続き Z軸の回りに Y軸から X軸の方向にφだけ回転移動した点を $P'(x', y', z')$ とすると，2点 P,P'の座標の間には次の関係式が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_6(Z|Y, X, \varphi)R_6(X|Y, Z, \theta)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

これを具体的に書き表せば次のようになる。

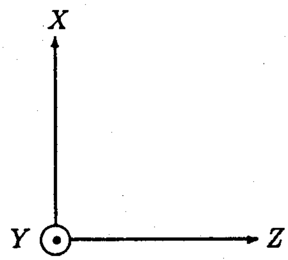
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi\cos\theta & -\sin\varphi\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi\cos\theta & -\cos\varphi\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

従って，次の関係式が得られる。

(4.6) $$\begin{cases} x' = x\cos\varphi + (y\cos\theta - z\sin\theta)\sin\varphi \\ y' = -x\sin\varphi + (y\cos\theta - z\sin\theta)\cos\varphi \\ z' = y\sin\theta + z\cos\theta \end{cases}$$

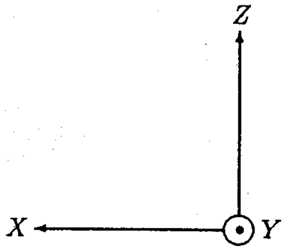
上の式 (4.6) より，座標系の位置関係に応じて，4つの変換公式が得られる。以下左側には変換公式を，右側には座標系を示す。

この場合は $(dx, dy) = (z', x')$ となるから，次の変換公式を得る。



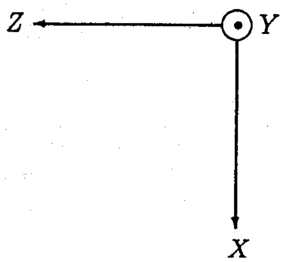
[85] $$\begin{cases} dx = y\sin\theta + z\cos\theta \\ dy = x\cos\varphi + (y\cos\theta - z\sin\theta)\sin\varphi \end{cases}$$

この場合は $(dx, dy) = (-x', z')$ となるから，次の変換公式を得る。



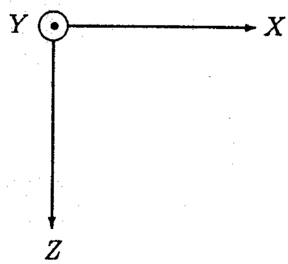
[86]
$$\begin{cases} dx = -x\cos\varphi - (y\cos\theta - z\sin\theta)\sin\varphi \\ dy = y\sin\theta + z\cos\theta \end{cases}$$

この場合は $(dx, dy) = (-z', -x')$ となるから，次の変換公式を得る。



[87]
$$\begin{cases} dx = -y\sin\theta - z\cos\theta \\ dy = -x\cos\varphi - (y\cos\theta - z\cos\theta)\sin\varphi \end{cases}$$

この場合は $(dx, dy) = (x', -z')$ となるから，次の変換公式を得る。



[88]
$$\begin{cases} dx = x\cos\varphi + (y\cos\theta - z\sin\theta)\sin\varphi \\ dy = -y\sin\theta - z\cos\theta \end{cases}$$

4．2．3 X軸の回りにZ軸からY軸の方向にθだけ回転し，ついでZ軸の回りにX軸からY軸の方向にφだけ回転する

点 $P(x, y, z)$ を X軸の回りに Z軸から Y軸の方向にθだけ回転移動し，引き続き Z軸の回りに X軸から Y軸の方向にφだけ回転移動した点を $P'(x', y', z')$ とすると，2点 P, P'の座標の間には，次の関係式が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_6(Z|X, Y, \varphi)R_6(X|Z, Y, \theta)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

これを具体的に書き表わせば次のようになる。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi\cos\theta & -\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi & \cos\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

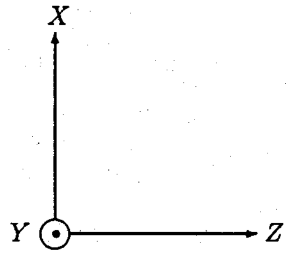
従って次の関係式が得られる。

$$
(4.7)\qquad
\begin{cases}
x' = x\cos\varphi - (y\cos\theta + z\sin\theta)\sin\varphi \\
y' = x\sin\varphi + (y\cos\theta + z\sin\theta)\cos\varphi \\
z' = -y\sin\theta + z\cos\theta
\end{cases}
$$

上の式 (4.7) より，座標系の位置関係に応じて，4つの変換公式が得られる。以下左側には変換公式を，右側には座標系を示す。

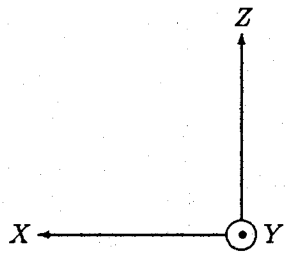
この場合は $(dx, dy) = (z', x')$ となるから，次の変換公式を得る。

$$
[89]\qquad
\begin{cases}
dx = -y\sin\theta + z\cos\theta \\
dy = x\cos\varphi - (y\cos\theta + z\sin\theta)\sin\varphi
\end{cases}
$$



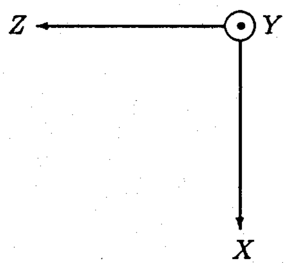
この場合は $(dx, dy) = (-x', z')$ となるから，次の変換公式を得る。

$$
[90]\qquad
\begin{cases}
dx = -x\cos\varphi + (y\cos\theta + z\sin\theta)\sin\varphi \\
dy = -y\sin\theta + z\cos\theta
\end{cases}
$$



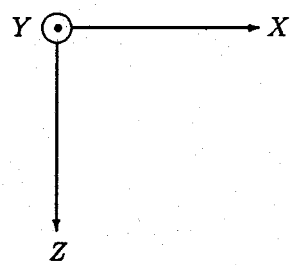
この場合は $(dx, dy) = (-z', -x')$ となるから，次の変換公式を得る。

$$
[91]\qquad
\begin{cases}
dx = y\sin\theta - z\cos\theta \\
dy = -x\cos\theta + (y\cos\theta + z\sin\theta)\sin\varphi
\end{cases}
$$



この場合は $(dx, dy) = (x', -z')$ となるから，次の変換公式を得る。

$$
[92]\qquad
\begin{cases}
dx = x\cos\varphi - (y\cos\theta + z\sin\theta)\sin\varphi \\
dy = y\sin\theta - z\cos\theta
\end{cases}
$$



4．2．4 X軸の回りにZ軸からY軸の方向にθだけ回転し，ついでZ軸の回りにY軸からX軸の方向にφだけ回転する

点$P(x,y,z)$をX軸の回りにZ軸からY軸の方向にθだけ回転移動し，引き続きZ軸の回りにY軸からX軸の方向にφだけ回転移動した点を$P'(x',y',z')$とすると，2点P,P'の座標の間には，次の関係式が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_6(Z|Y,X,\varphi)R_6(X|Z,Y,\theta)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

これを具体的に書き表わせば次のようになる。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

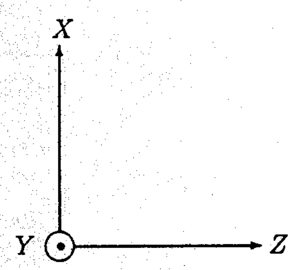
従って，次の関係式が得られる。

$$(4.8)\qquad \begin{cases} x' = x\cos\varphi + (y\cos\theta + z\sin\theta)\sin\varphi \\ y' = -x\sin\varphi + (y\cos\theta + z\sin\theta)\cos\varphi \\ z' = -y\sin\theta + z\cos\theta \end{cases}$$

上の式(4.8)より，座標系の位置関係に応じて，4つの変換公式が得られる。以下左側には変換公式を，右側には座標系を示す。

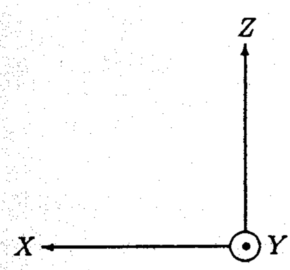
この場合は$(dx,dy)=(z',x')$となるから，次の変換公式を得る。

$$[93]\qquad \begin{cases} dx = -y\sin\theta + z\cos\theta \\ dy = x\cos\varphi + (y\cos\theta + z\sin\theta)\sin\varphi \end{cases}$$

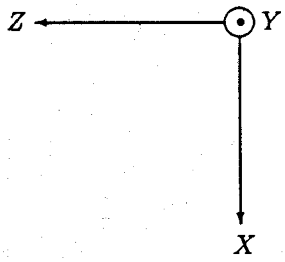


この場合は$(dx,dy)=(-x',z')$となるから，次の変換公式を得る。

$$[94]\qquad \begin{cases} dx = -x\cos\varphi - (y\cos\theta + z\sin\theta)\sin\varphi \\ dy = -y\sin\theta + z\cos\theta \end{cases}$$

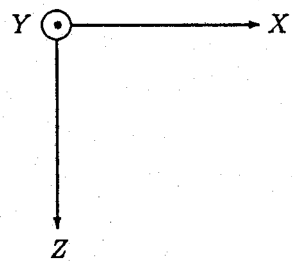


この場合は $(dx, dy) = (-z', -x')$ となるから，次の変換公式を得る。



[95]
$$\begin{cases} dx = y\sin\theta - z\cos\theta \\ dy = -x\cos\varphi - (y\cos\theta + z\sin\theta)\sin\varphi \end{cases}$$

この場合は $(dx, dy) = (x', -z')$ となるから，次の変換公式を得る。



[96]
$$\begin{cases} dx = x\cos\varphi + (y\cos\theta + z\sin\theta)\sin\varphi \\ dy = y\sin\theta - z\cos\theta \end{cases}$$

参考文献

新関章三他，パソコンで学ぶやさしい関数グラフィックス，森北出版，1992, p.109—111.

（平成４年９月30日受理）
（平成４年12月28日発行）