

水・空気均質二相流中の非線形波動の伝播

田中 忠芳¹・山崎 堯右²・神山 新一³・坪田 誠³・入 亮一郎⁴

Non-linear Wave Propagation in a Gas-Liquid Mixture

Tadayoshi TANAKA¹, Takasuke YAMASAKI²,
Shin-ichi KAMIYAMA³, Makoto TSUBOTA³, Ryoichiro HAIKU⁴

¹Kinki University Toyooka High School, ²Kochi University,

³Tohoku University, ⁴Maruyama Mfg. Co.

Abstract: On the relation with cavitation and multi-phase flow dynamics, many studies have been conducted about non-linear wave propagation in gas-liquid mixture. Even neglecting inertia terms at the bubble equation of motion such as Rayleigh-Plesset equation, the non-linear wave characteristics still might appear. Here, we discussed such non-linear finite amplitude wave of small bubbly mixture based purely on non-linearity of equation of state, and clarified partially the behavior of wave propagation and its relation to so-called KdV equation.

1. 諸 言

気液二相流中の圧力波の伝播に関する研究は、臨界現象や超音速流動の挙動の解明とも関連して、これまでも数多くの研究がなされている⁽¹⁾⁻⁽⁷⁾。しかし、波の非線形モードについては、十分な検討が行われているとは言い難いのが現状である。

従来、気液二相流中有限振幅波のモード解析に関しては、Wijngaarden⁽³⁾がKdV方程式に帰着できることを導き、ソリトン及び振動モードの波束の形で有限振幅波が伝播する可能性を予測して以来、一般的な非線形波動の問題との関連からも関心もたれるようになった。また、気泡の振動エネルギーの散逸を考慮したBurgers-KdV方程式に基づく検討も行われている⁽⁴⁾。ところが、Rayleigh-Plesset方程式の慣性項を無視した均質モデルでも気液二相流の状態方程式は液圧の変化に対して強い非線形を示す。流動下に生じる脈圧振幅も、この非線形性が問題になる程度に広範囲にわたっている場合が多い。しかし、従来の理論では、この様な条件下で状態方程式の非線形性が十分に考慮されているとは言い難い状況にある。

キャビテーション発生の初期段階では、微細気泡が分散した流れとなっているため、代表時間が十分大きければ、Rayleigh-Plesset方程式の慣性項を無視した扱いが可能である。ところが、従来この様な均質流としての扱いが可能で非線形波動を扱った研究は、あまり知見しない。古くは、Campbell-Pitcher⁽⁵⁾の実験で非線形波動特有の突っ立ち現象が観測されているにもかかわらず

らず、松本⁽⁶⁾の研究においても、これについては言及されていない。

ここでは、状態方程式⁽⁷⁾の非線形性を考慮し、均質二相流圧力波の伝播を記述する非線形波動方程式を導出し、初期波形の崩れ及び波動伝播の様相を数値計算の上から検討した。また、鉛直気液二相流衝撃波管を用いて圧力波の伝播特性を実験的に調べた。その結果、均質二相流においても突っ立ち現象が起こり、ここで扱う理論でその説明が可能であることが明らかになった。以下にその詳細を報告する。

2. 主 な 記 号

- a : Lagrange系の空間座標
- p : 圧力
- t : 時間
- x : 空間座標
- α : ボイド率
- ξ : 変位
- ρ : 密度
- 添字
- l : 液相
- ref : 基準状態
- v : 蒸気
- o : 初期平衡状態

3. 理 論

3・1 気液二相流状態方程式

Rayleigh-Plesset方程式において、気泡の代表半径 R_0 、代表時間 T_0 、平衡圧力 P_0 とすると、

$$R_0 \approx 10^{-4} [\text{m}], 0 < P_0 < 10^5 [\text{Pa}]$$

また、代表時間 T_0 の無次元表示 F_0 が

$$F_0^2 \gg 1, F_0^2 \equiv \frac{P_0 T_0^2}{\rho_l R_0^2} \quad (1)$$

の場合、慣性項と表面張力項を無視することができる。またここでは、波の減衰に関与する粘性項も省略する。その場合、Campbell-Pitcher⁽⁶⁾やKamiyama-Yamasaki⁽⁷⁾にならい、蒸気を除く混入ガス成分の圧縮性のみに着目して、均質二相流の状態方程式として次式を採用する。

$$\rho \equiv \frac{P_l - P_v}{P_l - P_v + K_{ref}} \rho_l \quad (2)$$

ただし、

$$K_{\text{ref}} \equiv \frac{\alpha_{\text{ref}}}{1 - \alpha_{\text{ref}}} (p_l - p_v)_{\text{ref}} \quad (3)$$

この密度 ρ は、液圧 p_l に対して極めて強い非線形性を示す。ゆえに、式 (2) を $p_l = f(\rho)$ として、初期平衡圧力 p_{l0} のまわりに展開すると、液圧 p_l は次式で与えられる。

$$p_l = p_{l0} + \sum_{n=1} \frac{1}{n!} A_n \left(\frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right)^n \quad (4)$$

ただし、

$$\Delta \rho \equiv \rho - \rho_0,$$

$$A_n \equiv \rho_0^n \left(\frac{\partial^n p_l}{\partial \rho^n} \right)_0, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (5)$$

と定義する。

3・2 気液均質二相流非線形波動方程式の誘導

次に、均質二相流を連続体近似し、Lagrange 形式の一次元非線形波動方程式を誘導する。ここでは液相の熱容量は十分大きいことから等温変化を仮定し、エネルギー方程式を無視する。また、液相は非圧縮性であり、混入ガスの分圧のみが圧縮性を担うと仮定する。

まず、流体粒子の運動方程式は、粘性力及び重力を無視すると、

$$\rho_0 \xi_{tt} = -P_{l,a} \quad (6)$$

と表される (添字 $_{t,a}$ は偏微分を表す)。ここに ξ は流体粒子の Lagrange 座標 a からの変位であり、

$$\xi \equiv x - a \quad (7)$$

と定義する。一方、連続の式

$$\rho_0 \delta a = \rho \delta x = \rho (\delta a + \delta \xi) \quad (8)$$

は、式 (7) より、 $x_a = 1 + \xi_a$ であるので、

$$\rho = \rho_0 (1 + \xi_a)^{-1} \quad (9)$$

と表せる (ただし $\xi_a \neq -1$)。したがって式 (4)、(6)、(9) より、次の非線形波動方程式を

得る。

$$\xi_{tt} = \frac{A_1}{\rho_0} \left(\frac{1}{(1 + \xi_a)^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)!} \frac{A_n}{A_1} \frac{\xi_a^{n-1}}{(1 + \xi_a)^{n+1}} \right) \xi_{aa} \quad (10)$$

上式において、 $\xi_a \ll 1$ つまり $\Delta \rho \ll \rho_0$ の場合には、

$$\xi_{tt} = \frac{A_1}{\rho_0} \xi_{aa} = C_0^2 \xi_{aa} \quad (11)$$

となり、微小振幅波（音波）の伝播を表す線形波動方程式になる。ここに C_0 は微小振幅波の伝播速度で、

$$C_0^2 \equiv \frac{A_1}{\rho_0} = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_0 \quad (12)$$

と定義される。また式 (10) を ξ_a で展開し、 ξ_a^5 の項まで考慮すると、

$$\xi_{tt} = C_0^2 (1 - Z_1 \xi_a + Z_2 \xi_a^2 - Z_3 \xi_a^3 + Z_4 \xi_a^4 - Z_5 \xi_a^5) \xi_{aa} \quad (13)$$

ただし、

$$\begin{aligned} Z_1 &\equiv 2 + A_2 / A_1, \\ Z_2 &\equiv 3 + 3A_2 / A_1 + A_3 / (2A_1), \\ Z_3 &\equiv 4 + 6A_2 / A_1 + 2A_3 / A_1 + A_4 / (6A_1), \\ Z_4 &\equiv 5 + 10A_2 / A_1 + 5A_3 / A_1 + 5A_4 / (6A_1) + A_5 / (24A_1), \\ Z_5 &\equiv 6 + 15A_2 / A_1 + 10A_3 / A_1 + 5A_4 / (2A_1) + A_5 / (4A_1) + A_6 / (120A_1) \end{aligned} \quad (14)$$

すなわち、双曲型準線形の非線形波動方程式となることがわかる。

3・3 KdV 方程式の誘導

実験により、一次元に伝播していく有限振幅波が小さいいくつかの波に分散する場合のあることが知られており、一方、理論的にも、分散性非線形波動を記述する KdV 方程式に関して多くの研究がなされている。ここでは、上で得られた非線形波動方程式が KdV 方程式に帰着する条件について考察する。

いま、式 (13) で

$$Z_3 \xi_a^3, Z_4 \xi_a^4, Z_5 \xi_a^5 \ll 1 \quad (15)$$

とすると、

$$C_0^2 (1 + Z_2 \xi_a^2) \xi_{aa} \equiv -\gamma \xi_{aaaa} \quad (16)$$

とおくことにより、式 (13) は KdV 方程式になることが予想される。ここで式 (16) をあらためて、

$$\xi_a \equiv u(a) \quad (17)$$

とおき、積分すれば、

$$u_{aa} + \left(\frac{C_0^2}{\gamma}\right) \left(u + \frac{Z_2}{3} u^3\right) = 0 \quad (18)$$

と表される。式 (18) は Duffing 方程式であり、楕円積分により、

$$a = \sqrt{\frac{\gamma'}{1+\theta}} \{-F(k, \sigma) + F(k, \pi/2)\} \quad (19)$$

が得られる。ただし、

$$\theta = u_0^2 Z_2 / 3,$$

$$F(K, \sigma) = \int_0^\sigma \frac{d\sigma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \sigma}},$$

$$u = u_0 \sqrt{\frac{1+\theta/2}{1+\theta}} \frac{\sin \sigma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \sigma}},$$

$$k = \{2(1+\theta^{-1})\}^{-1/2},$$

$$\gamma' = \gamma / C_0^2,$$

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{\gamma'}{1+\theta}} F(k, \pi/2) = \sqrt{\frac{\gamma'}{1+\theta}} \kappa \quad (20)$$

である。ここに u_0 は振幅、 T は周期を表す。ゆえに、式 (18) の解は、

$$u(a) = u_0 \frac{k}{\sqrt{1-k^2}} \sqrt{2/\theta+1} \operatorname{cn} \left(\sqrt{\frac{1+\theta}{\gamma'}} a \right) = u_0 \operatorname{cn} \left(\frac{4\kappa}{T} a \right) \quad (21)$$

で与えられる。ただし、解を持つための条件は、

$$\begin{aligned} \gamma' &= [(1-2k^2)(4\kappa/T)^2]^{-1}, \\ Z_2/\gamma' &= 2k^2(4\kappa/T)^2/u_0^2 \end{aligned} \quad (22)$$

結局、式(18)が式(22)の条件により解を持つと、式(13)は次のようになる。

$$\xi_{tt} + C_0^2 Z_1 \xi_{aa} + \gamma \xi_{aaaa} = 0 \quad (23)$$

いま、

$$\begin{aligned} \phi &\equiv (C_0/\gamma)^{1/2}(a - C_0 t), \\ \tau &\equiv - (C_0/\gamma)^{1/2} t, \\ U(\phi, \tau) &\equiv - \frac{C_0^2 Z_1}{6(C_0 \gamma)^{1/2}} \frac{\partial \xi(\phi, \tau)}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (24)$$

と定義すれば、式(23)は、

$$U_{\tau} - 6UU_{\phi} + \frac{C_0}{\gamma} U_{\phi\phi\phi} = 0 \quad (25)$$

と表せる。式(25)はKdV方程式であり、解は

$$U = -\frac{C_0}{2} \operatorname{sech}^2 \left\{ \frac{\gamma}{2} (\phi - C_0 \tau + X_0) \right\} \quad (26)$$

で与えられる (X_0 は定数)。

4. 数値計算

4・1 計算方法

式(13)を中心差分を用いて差分化すると、

$$\begin{aligned} \xi_{i,j+1} &= -\xi_{i,j-1} + 2\xi_{i,j} + \left(\frac{\Delta t}{\Delta a}\right)^2 C_0^2 \\ &\times (1 - NL_1 + NL_2 - NL_3 + NL_4 - NL_5) \times (\xi_{i+1,j} + \xi_{i-1,j} - 2\xi_{i,j}) \end{aligned} \quad (27)$$

ただし、

$$NL_n \equiv Z_n (\xi_{i+1,j} - \xi_{i-1,j}) / (2\Delta a), \quad n = 1, 2, 3, 4, 5 \quad (28)$$

と表される。ここに、 Δa は空間きざみ、 Δt は時間きざみであり、添字 i, j は各々空間格子、時間格子の番地を表す。空間座標は1000個の格子点に分けている。いま、式 (13) のエネルギー密度 \mathcal{E} を

$$\mathcal{E} \equiv \int da \left\{ \frac{1}{2} \xi_t^2 + C_0^2 \left(\frac{1}{2} \xi_a^2 + \frac{Z_1}{6} \xi_a^3 + \frac{Z_2}{12} \xi_a^4 + \frac{Z_3}{20} \xi_a^5 + \frac{Z_4}{30} \xi_a^6 + \frac{Z_5}{42} \xi_a^7 \right) \right\} \quad (29)$$

と定義する。式 (13) はエネルギー保存系と見なされるので、ここでは、式 (29) で与えられる \mathcal{E} が保存している範囲内で計算を行った。

4・2 計算結果

初期波形として孤立波とステップ波の2種類を与え、それらの時間発展を調べた。その代表的な計算例をFig. 1、Fig. 2に示す。縦軸に、

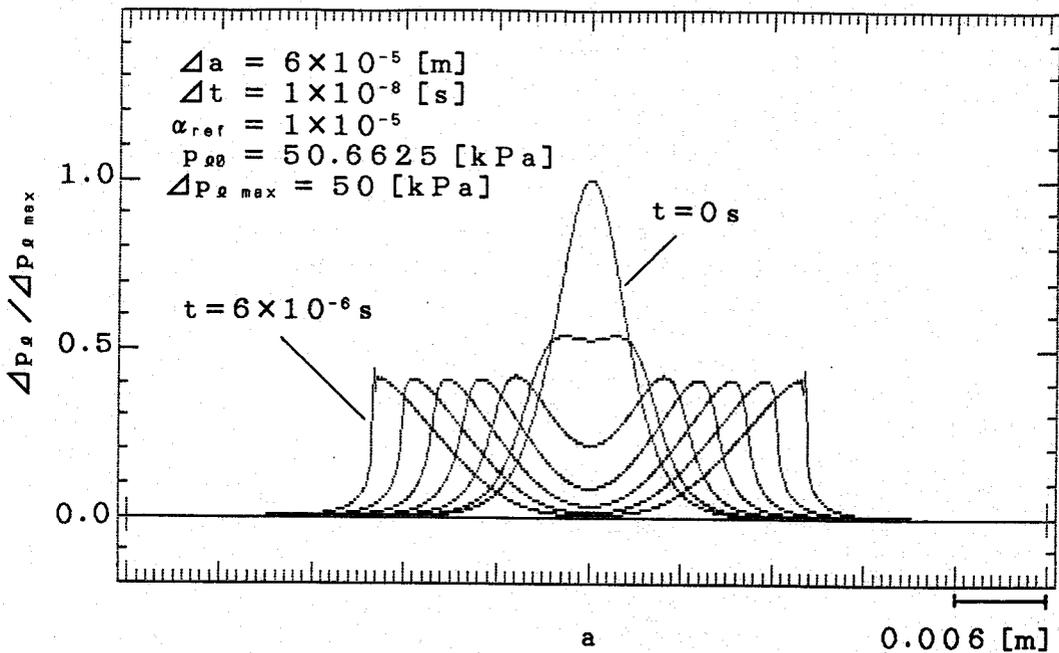


Fig. 1 Computed solitary waveforms

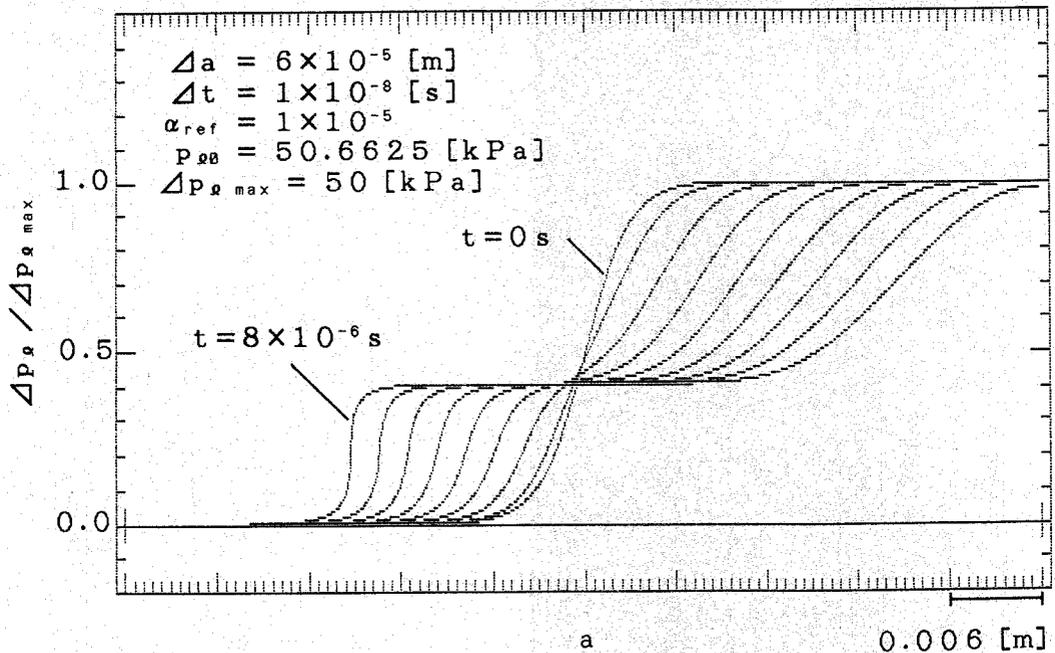


Fig. 2 Computed stepwisely waveforms

$$\Delta p_i \equiv p_i - p_i^0 \quad (30)$$

で定義される。 Δp_i を初期最大値 $\Delta p_{i_{max}}$ で規格化したものを取り、横軸にはLagrange系の空間座標 a をとる。グラフは $250 \times \Delta t$ [s]ごとに描かれている。

Fig. 1は初期波形に孤立波を与えた場合である。 $t = 1.25 \times 10^{-4}$ [s]のところでは砕波が起り始めているのがわかる。Fig. 2は初期波形にステップ波を与えた場合で、左右に衝撃波と膨張波が形成されるのがわかる。 $t = 1.75 \times 10^{-4}$ [s]のところでは、非線形波動特有の突っ立ちが顕著になっている。これらの数値計算において、砕波するまでのエネルギー密度 \mathcal{E} は、Fig. 1、Fig. 2ともに、5桁のオーダーで保存されている。

5. 実験

5・1 実験方法

Fig. 3に実験装置の概略図を示す。衝撃波管(内径4 cm、外径6 cm)の高圧側へはコンプレッサーから圧縮空気が送り込まれ、およそ0.15~0.30 [MPa]で隔膜が破れて衝撃波が低圧側に伝わる。低圧側は、予め、真空ポンプで空気を吸引して大気圧以下に保たれ、同時にその負圧により流量調節弁を介して気泡発生装置へ空気が送られている。高圧側から伝わってきた圧力波は各センサー(一次固有振動数40 kHzの半導体圧力計)で感知され、ブリッジ回路を介してレコーダに記録される。

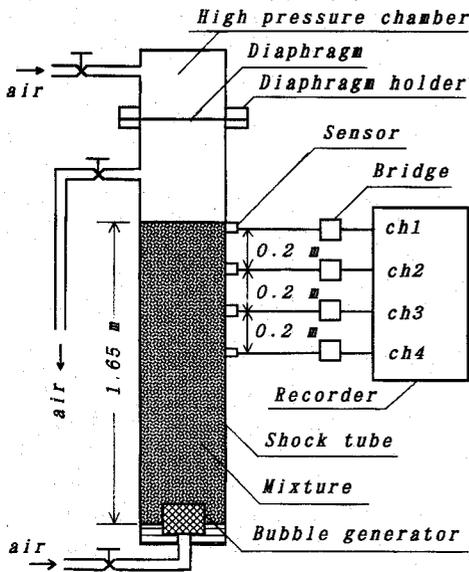


Fig. 3 Layout of experimental apparatus

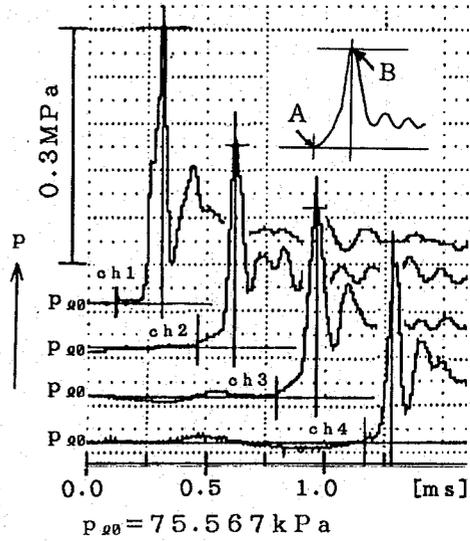


Fig. 4 Experimental pressure wave patterns

5・2 実験結果および考察

Fig. 4は突っ立ちがみられる場合の圧力波の伝播の様相を示し、写真1はその圧力波入射直前の気泡の分布状態 ($\alpha_0 \sim 2 \times 10^{-4}$) を表す。ここで、気泡半径は 10^{-4} [m] のオーダーであり、式(1)の条件を満足している。また、Fig. 4の波形のピークをもつ部分は孤立波状になっており、伝播につれて圧力の立ち上がり角度 (Fig. 4中A, B間の勾配) が急峻化しているのがわかる。

6. 結 論

水・空気系の気液二相均質流における波動伝播中の突っ立ち現象に着目して非線形波動方程式を導き、その様相を理論的かつ実験的に検討した。その結果、気泡の成長方程式の慣性項が無視できる場合でも、著しい非線形性が現れることが明らかになった。なお、砕波点までの伝播距離や減衰率を説明するためには、粘性項などの非線形項も考慮する必要があると思われる。

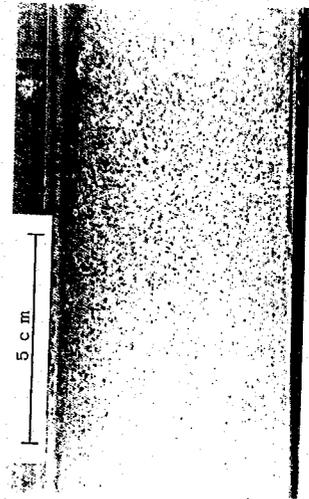


Photo.
Bubbles mixture pattern
in shock tube

Keywords: Bubble Mixture, Wave Propagation, Non-linear

文 献

- (1) Borisov, A. A., Gelfand, B. E. and Timofeev, E. I., *Int. J. Multiphase Flow*, 9-5, 531-543 (1983).
- (2) Noorzi, L. and Wijngaarden, L. van, *J. Fluid Mech.* 66, 115-122 (1974).
- (3) Wijngaarden, L. van, *J. Fluid Mech.* 4-8, 465-474 (1968).
- (4) Kuznetsov, V. V., Nakoryakov, V. E., Pokusaev, B. G. and Shreiber, I. R., *J. Fluid Mech.* 85, 85-96 (1978).
- (5) Campbell, I. J. and Pitcher, A. S., *Proc. Roy. Soc. A* 243, 534-545 (1958).
- (6) 松本・西川・大橋、機論、56-525 (B), 15-20 (1990).
- (7) Kamiyama, S. and Yamasaki, T., *Trans. of ASME, J. Fluids Eng.* 103, 551-556 (1981).

平成6 (1994)年9月30日受理

平成6 (1994)年12月26日発行