D_{2n}型格子の数理構造について

幸山　直人[1]・松本　哲也[2]・長沼　英久[3]
（[1]富山大学理学部数学教室・[2]NTT・[3]理学部情報科学教室）

On the mathematical structure of D_{2n}-lattices

Naoto Kouyama[1], Tetsuya Matsumoto[2], and Hidehisa Naganuma[3]
[1]*Department of Mathematics, Faculty of Science, Toyama University*
[2]*NTT* ; [3]*Department of Information Science, Faculty of Science*

Abstract: In this note we shall investigate the mathematical structure of D_{2n}-lattices, which are only infinite system coming from 2-adic codes. Firstly, we show that their theta functions become holomorphic modular forms of weight n with respect to certain congruence subgrops of $SL_2(\mathbf{Z})$. Secondly, we decompose them into Eisenstein series and cusp forms. As the application we obtain the following two facts : (1) Every even lattice $\Lambda\subset\mathbf{R}^6$ such that $\Lambda^*/\Lambda\cong\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ must be D_6-lattice. (2) We can construct a cusp form and also new form of $\Gamma_0(2)$ if $n\equiv 0\,(\mathrm{mod} 2)$ and the dimension of the space of all cusp forms of weight n with respect to $SL_2(\mathbf{Z})\leq 1$.

キーワード：D_{2n}型格子，正則保型形式.

結　果

既約な根格子は Witt の構造定理によって作られる Coxeter-Dynkin 図形により，$A_j\,(j\geq 1)$，$D_k\,(k\leq 4)$，$E_l\,(6\leq l\leq 8)$型に分類されるが，この中で２進符号から得られるものは，A_1，$D_{2n}\,(n\geq 2)$，E_7，E_8だけである(例えば,Ebeling[2] Chap.1 参照). 本論文では,その中で唯一つの無限系列であるD_{2n}型格子について調べる. 一般に,格子Λのテータ関数Θ_Λ(上半平面$\mathcal{H}$上の関数)を次の式で定義する.

$$\Theta_\Lambda(z)=\sum_{x\in\Lambda}e^{\pi i x^2 z}\qquad (z\in\mathcal{H})$$

また，Λの双対格子をΛ^*で表すことにする. D_{2n}型格子をD_{2n}で表せば，$D_{2n}^*/D_{2n}\cong\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$であるが，より一般に次の定理が成り立つ.

定理１　Λを$\Lambda^*/\Lambda\cong\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$であるような$2n$次元偶格子とすれば，$\Theta_\Lambda$は$\Gamma_1(4)$（定義は2.1を見よ)に関する重さ$n$の正則保型形式になる.

正整数n，上半平面$\mathcal{H}$の点z，$\mathcal{H}$上の関数f，$GL_2^+(\mathbf{Z})$の元$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$に対して

$$Az=\frac{az+b}{cz+d},$$
$$j(A,\ z)=cz+d \tag{1.1}$$
$$(f|_n A)(z)=(\det A)^{\frac{n}{2}}\ j(A,\ z)^{-n}f(Az)$$

と置く．D_{2n}格子のテータ関数をΘ_{2n}で表し，$\Gamma(\Theta_{2n})$を

$$\Gamma(\Theta_{2n})=\{\ \gamma\in SL_2(\boldsymbol{Z}):\Theta_{2n}|_n\gamma=\Theta_{2n}\}$$

で定義する．$\Gamma(\Theta_{2n})$は次のようになる．

定理 2　$$\Gamma(\Theta_{2n})=\begin{cases}\Gamma_0(2) & (n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)),\\ \Gamma_1(4) & (n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2)).\end{cases}$$

一般に$SL_2(\boldsymbol{Z})$の指数有限の部分群Γに対して，Γに関する重さnの正則保型形式の全体からなる線形空間を$M_n(\Gamma)$，尖点形式の全体からなる部分空間を$S_n(\Gamma)$，$M_n(\Gamma)$における$S_n(\Gamma)$の Petersson 内積に関する直交補空間を$\mathcal{N}_n(\Gamma)$で表す．$\mathcal{N}_n(\Gamma(\Theta_{2n}))$の次元は，$n=2$のとき1であり，$n>2$のとき2であるが，基底は次の Eisenstein 級数によって与えられる．χ_0で自明な，χでmod4の原始的な Dirichlet 指標を表すものとし，$\chi_1,\ \chi_2\in\{\chi_0,\ \chi\}$を$\chi_1\chi_2(-1)=(-1)^n$とする．また，$B_{n,\ \chi_1\chi_2}$で指標$\chi_1\chi_2$の$n$番目の一般化された Bernoulli 数を表し，$B_n=B_{n,\ \chi_0}$で表す．

$$\sum_{m=1}^{\infty}a_m(\chi_1,\ \chi_2;n)m^{-s}=L(s,\ \chi_1)L(s-n+1,\ \chi_2),$$
$$a_0(\chi_1,\ \chi_2;n)=\begin{cases}\dfrac{1}{8} & (n=2,\ \chi_1=\chi_2=\chi_0),\\[2ex] \dfrac{-B_{n,\ \chi_1\chi_2}}{2n} & (\text{その他の場合}),\end{cases}$$
$$f_n(z;\ \chi_1,\ \chi_2)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m(\chi_1,\ \chi_2;n)\,e^{2\pi imz}\qquad (z\in\mathcal{H})$$

と置けば，

$$\mathcal{N}_n(\Gamma(\Theta_{2n}))=\begin{cases}\boldsymbol{C}f_2(z;\ \chi_0,\ \chi_0) & (n=2),\\ \boldsymbol{C}f_n(z;\ \chi_0,\ \chi_0)\oplus\boldsymbol{C}f_n(2z;\ \chi_0,\ \chi_0) & (n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2),\ n>2),\\ \boldsymbol{C}f_n(z;\ \chi_0,\ \chi)\oplus\boldsymbol{C}f_n(2z;\ \chi,\ \chi_0) & (n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2))\end{cases}$$

となる．ここで，次に正規化された Eisenstein 級数を考えることにする．

$$E_n^{(1)}(z)=\begin{cases}a_0(\chi_0,\ \chi;n)^{-1}f_n(z;\ \chi_0,\ \chi) & (n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2)),\\ a_0(\chi_0,\ \chi_0;n)^{-1}f_n(z;\ \chi_0,\ \chi_0) & (n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)),\end{cases}$$
$$E_n^{(2)}(z)=\begin{cases}f_n(z;\ \chi,\ \chi_0) & (n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2)),\\ a_0(\chi_0,\ \chi_0;n)^{-1}f_n(2z;\ \chi_0,\ \chi_0) & (n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)).\end{cases}$$

$n=2$のとき，$M_2=(\Gamma(\Theta_4))=\mathcal{N}_2(\Gamma(\Theta_4))$となるので，$\Theta_4=E_2^{(1)}$を得る．そこで$n>2$とする．このとき

$$\Theta_{2n}=x_nE_n^{(1)}+y_nE_n^{(2)}+F$$

を満たす2つの複素数$x_n,\ y_n$と$S_n(\Gamma(\Theta_{2n}))$の元Fが一意に定まる．結果は次のとおりである．

定理 3　$n>2$とする．

$$x_n=\begin{cases}1 & (n\equiv 1(\mathrm{mod}2)),\\ \dfrac{-1+(-1)^n2^{2n-1}}{2^{2n-1}} & (n\equiv 0(\mathrm{mod}2)),\end{cases}$$

$$y_n=\begin{cases}\dfrac{n(-1)^{(1-3n)/2}2^{2n-1}}{B_{n,z}} & (n\equiv 1(\mathrm{mod}2)),\\ \dfrac{(2-(-1)^n)2^{2n-1}}{2^{2n}-1} & (n\equiv 0(\mathrm{mod}2)).\end{cases}$$

定理3のx_n, y_nを用いれば，$\Theta_{2n}-x_nE_n^{(1)}-y_nE_n^{(2)}$は$S_n(\Gamma(\Theta_{2n}))$の元，即ち，$\Gamma(\Theta_{2n})$に関する重さ$n$の尖点形式になる．これを$\Xi_n$と置く．

さて，E_8格子は8次元ユニモジュラー偶格子であるが，逆に，8次元ユニモジュラー偶格子ΛがE_8型格子になることを，$\Theta_\Lambda=E_4^{(1)}$から導くことができる(Ebeling[2] Prop. 2.5参照)．この事実の類似として次の結果を得る．

定理 4　Λを$\Lambda^*/\Lambda\cong\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$であるような6次元偶格子とすれば，$\Lambda$は$D_6$型格子である．

次に，nを偶数とするとき，$S_n(\Gamma(\Theta_{2n}))=S_n(\Gamma_0(2))$は部分空間

$$S_n^1(\Gamma_0(2))=S_n(\Gamma(1))\oplus\{f(2z):f\in S_n(\Gamma(1))\}$$

及び，その直交補空間$S_n^0(\Gamma_0(2))$との直和に分解される．$\dim S_n(\Gamma(1))=1$の場合を考える．その正規化された基底$g_n(=E_{n-12}^{(1)}\Delta)$を用いれば，

$$\Xi_n(z)=z_ng_n(z)+w_ng_n(2x)+F_0(z) \tag{1.2}$$

を満たす2つの複素数z_n, w_nと$S_n^0(\Gamma_0(2))$の元F_0とが一意に定まる．

定理 5　nを偶数とするとき，(1.2)を満たすz_nとw_nとが具体的に求まる(§3.5)．従って，$S_n^0(\Gamma_0(2))$の元

$$\Theta_{2n}(z)-x_nE_n^{(1)}(z)-y_nE_n^{(2)}(z)-z_ng_n(z)-w_ng_n(2z)$$

を得る．

保型形式についての準備

2.1 合同部分群$\Gamma_0(2)$, $\Gamma_1(4)$

正整数n, 上半平面$\mathcal{H}$の点z, $\mathcal{H}$の関数fと$GL_2^+(\boldsymbol{R})$の元$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$とに対して，次のように定義する．

$$a(A)=a,\ b(A)=b,\ c(A)=c,\ d(A)=d.$$

また，Az, $j(A,z)$, $(f|_nA)(z)$を(1.1)のように定義すれば，$GL_2^+(\boldsymbol{R})$の任意の2元A, Bに対して，

$$f|_nAB=(f|_nA)|_nB$$

が成り立つ（例えば，Miyake[3]の§2.1参照）．

本論文では，$SL_2(\boldsymbol{Z})$ の次の2つの部分群を扱うことになる．

$$\Gamma_0(2) = \{A \in SL_2(\boldsymbol{Z}) : c(A) \equiv 0 \pmod 2\},$$
$$\Gamma_1(4) = \{A \in SL_2(\boldsymbol{Z}) : a(A) - 1 \equiv c(A) \equiv d(A) - 1 \equiv 0 \pmod 4\}.$$

これらの群の生成元を記述するために，次のように置く．

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ V = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ W = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

このとき，次の事実が知られている．(例えば，Rankin[4]参照)．

補題 1　(1)　$\Gamma_0(2)$ は U と W^2 で生成される．
(2)　$\Gamma_1(4)$ は U と W^4 で生成される．

補題 2　$\Gamma_1(4)$ は $SL_2(\boldsymbol{Z})$ の部分群で $-I$ を含まないものの中で，極大元である．

2.2 作用素 ω_n と Tr_n

$$\delta = \begin{cases} 2 & (n \equiv 0 \pmod 2)), \\ 4 & (n \equiv 1 \pmod 2)), \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\omega_n = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \delta_n & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta_n = \begin{bmatrix} \delta_n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

と置けば，$\omega_n^{-1}\Gamma(\Theta_{2n})\omega_n = \Gamma(\Theta_{2n})$ が成り立つので，任意の $f \in M_n(\Gamma(\Theta_{2n}))$ に対して，$f|_n\omega_n \in M_n(\Gamma(\Theta_{2n}))$ が成り立つ．特に，

$$c_n = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}} & (n \equiv 0 \pmod 2)), \\ \dfrac{i2^n n}{B_{n,\chi}} & (n \equiv 1 \pmod 2)) \end{cases} \tag{2.2}$$

と置けば，正規化されたEisenstein 級数 $E_n^{(1)}$, $E_n^{(2)}$ について

$$\begin{aligned} &E_n^{(1)}|_n\omega_n = c_n E_n^{(2)}, \\ &E_n^{(2)}|_n\omega_n = (-1)^n c_n E_n^{(1)} \end{aligned} \tag{2.3}$$

が成り立つ．また，任意の $f \in S_n(\Gamma(\Theta_{2n}))$ に対して，$f|_n\omega_n \in S_n(\Gamma(\Theta_{2n}))$ も成り立ち，n が偶数のとき，$f \in S_n^0(\Gamma_0(2))$ に対して，$f|_n\omega_n \in S_n^0(\Gamma_0(2))$ が成り立つ．

nが偶数のとき，$f \in M_n(\Gamma_0(2))$ に対して，トレース写像 Tr_n を

$$Tr_n(f) = f + f|_nV + f|_nW$$

によって定義する．$\{I,\ V,\ W\}$ は $\Gamma_0(4)\backslash\Gamma(1)$ の完全代表系だから，$Tr_n(f) \in M_n(\Gamma(1))$ であることが分かる．特に，$f \in M_n(\Gamma(1))$対しては，

$$Tr_n(f) = 3f,$$
$$Tr_n(f|_n\omega_n) = 2^{1-n}T_n(2)f$$

が成り立つ．但し，$T_n(2)$ は $M_n(\Gamma(1))$上のHecke作用素である．また，$f \in S_n^0(\Gamma_0(2))$に対しては，$Tr_n(f) = 0$ となることも分かる．

証　明

3.1 定理1の証明

Λを定理１の仮定を満たす$2n$次元偶格子とする．まず，Λは偶格子であるから，$\{x^2 : x \in \Lambda\} \subseteq 2\boldsymbol{Z}$である．従って，

$$(\Theta_\Lambda |_n U)(z) = \Theta_\Lambda(z+1) = \Theta_\Lambda(z) \tag{3.1}$$

が成り立つ．また，$\Lambda^*/\Lambda \cong \boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$より，$2\Lambda^* \subseteq \Lambda$となるので，$\{(2y)^2 : y \in \Lambda^*\} \subseteq 2\boldsymbol{Z}$となる．従って，

$$(\Theta_{\Lambda^*} |_n U^4)(z) = \Theta_{\Lambda^*}(z+4) = \Theta_{\Lambda^*}(z) \tag{3.2}$$

が成り立つ．

一般に，$2n$次元格子Λについて，Poisson の和公式から，次の式が成り立つ．

$$(\Theta_\Lambda |_n V) = i^{-n}(\Lambda^* : \Lambda)^{-1/2}\Theta_{\Lambda^*}$$

今，Λが定理１の仮定を満たすとすれば，$\Lambda^*/\Lambda \cong \boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}(\Lambda^*/\Lambda) = 4$，従って，

$$(\Theta_\Lambda |_n V) = i^{-n} 2^{-1} \Theta_{\Lambda^*} \tag{3.3}$$

となる．(3.3)と(3.2)とにより，$\Theta_\Lambda |_n W^4 = \Theta_\Lambda |_n VU^{-4}V^{-1} = (\Theta_\Lambda |_n V) |_n U^{-4} V^{-1}$
$= (i^{-n} 2^{-1} \Theta_{\Lambda^*}) |_n U^{-4} V^{-1} = i^{-n} 2^{-1} (\Theta_{\Lambda^*} |_n U^{-4}) |_n V^{-1} = i^{-n} 2^{-1} \Theta_{\Lambda^*} |_n V^{-1} = \Theta_\Lambda$ となり，

$$\Theta_\Lambda |_n W^4 = \Theta_\Lambda \tag{3.4}$$

が成り立つ．偶格子Λについては，Θ_Λの正則性は明らかであるから，(3.1)と(3.4)と補題１とから，$\Theta_\Lambda \in M_n(\Gamma_1(4))$ が示された．これで定理１は証明された．

3.2 定理２の証明

格子D_{2n}は定理1の仮定を満たすから，$\Gamma(\Theta_{2n}) \supseteq \Gamma_1(4)$である．そこで，$n$を奇数とすれば，補題２より．$\Gamma_1(4)$が$SL_2(\boldsymbol{Z})$の部分群で$-I$を含まないものの中で極大元であることから，
$\Gamma(\Theta_{2n}) = \Gamma_1(4)$が分かる．次に，$n$を偶数とする．このとき，$D_{2n}^*$の全ての元に対して$y^2 \in \boldsymbol{Z}$が成り立つから，$D_{2n}^*$のテータ関数を$\Theta_{2n}^*$で表すとき，次の式が成り立つ．

$$\Theta_{2n}^* |_n U^2 = \Theta_{2n}^*(z+2) = \Theta_{2n}^* \tag{3.5}$$

従って．(3.3)と(3.5)とにより，$\Theta_{2n} |_n W^2 = \Theta_{2n} |_n VU^{-2}V^{-1} = (\Theta_{2n} |_n V) |_n U^{-2} V^{-1} =$
$(i^{-n}2^{-1})(\Theta_{2n}^* |_n V^{-1}) = (i^{-n}2^{-1})(i^n 2\Theta_{2n}) = \Theta_{2n}$となり，

$$\Theta_{2n} |_n W^2 = \Theta_{2n} \tag{3.6}$$

が示された．この結果，補題１から，$\Gamma(\Theta_{2n}) \supseteq \Gamma_0(2)$が分かる．$V \notin \Gamma(\Theta_{2n})$から$\Gamma(\Theta_{2n}) \neq SL_2(\boldsymbol{Z})$であるので，$\Gamma(\Theta_{2n}) = \Gamma_0(2)$が証明できた．

3.3 定理3の証明

$n > 2$とし，

$$\Theta_{2n} = x_n E_n^{(1)} + y_n E_n^{(2)} + F$$
$$x_n,\ y_n \in \boldsymbol{C},\quad F \in S_n(\Gamma(\Theta_{2n})) \tag{3.7}$$

とする．(2.1)から

$$\Theta_{2n} |_n \omega_n = x_n c_n E_n^{(2)} + y_n(-1)^n c_n^{-1} E_n^{(1)} + F|_n \omega_n \tag{3.8}$$

を得る．一方，

$$\Theta_{2n}|_n\omega_n=\Theta_{2n}|_n V\Delta_n=i^{-n}2^{-1}\Theta_{2n}^*|_n\Delta_n=i^{-n}2^{-1}\delta_n\Theta_{2n}^*(\delta_n z)$$

であることと(3.7)と(3.8)の定数項を考えれば，次の式を得る．

$$x_n+(1+(-1)^n)2^{-1}y_n=1 \tag{3.9}$$

$$(1+(-1)^n)2^{-1}c_n x_n+(-1)^n c_n^{-1}y_n=i^{-n}2^{-1}\delta_n \tag{3.10}$$

従って，(2.1)，(2.2)より定理3を得る．

3.4 定理4の証明

Λを6次元偶格子で，$\Lambda^*/\Lambda\cong\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$であるとする．定理1から，$\Theta_\Lambda\in M_3(\Gamma_1(4))$であるが，$M_3(\Gamma_1(4))=\boldsymbol{C}E_3^{(1)}\oplus\boldsymbol{C}E_3^{(2)}$であるから，

$$\Theta_\Lambda=uE_3^{(1)}+vE_3^{(2)}$$

となる．まず，$u=1$が分かるが，$B_{3,\chi}=\dfrac{2}{3}$であることから，

$$E_3^{(1)}|_3\omega_4=-16iE_3^{(2)}$$

が成り立つので，

$$\Theta_\Lambda|_3\omega_4=u(-16i)E_3^{(2)}+v(16i)^{-1}E_3^{(1)}$$

となる．従って，$i^{-3}2^2=v(16i)^{-1}$となり，$v=-64$が得られる．即ち，$\Theta_\Lambda=E_3^{(1)}-64E_3^{(2)}=\Theta_6$となり，$|R_\Lambda|=\left(-\dfrac{6}{(3/2)}\right)+64=60$となる．いま，$\Lambda'$を$R_\Lambda$で生成される部分格子とすれば，$\Lambda'$は6次元よりは小さい次元の根格子になるが，$|R_{\Lambda'}|=|R_\Lambda|=60$となる．このような$\Lambda'$が$D_6$しかないことは容易に確かめられる．$D_6=\Lambda'\subset\Lambda\subset\Lambda^*\subset(\Lambda')=D_6^*$と$(\Lambda^*:\Lambda)=(D_6^*:D_6)=4$より，$\Lambda=D_6$が示される．

3.5 定理5の証明

nを偶数で，$n>2$とする．このとき，定理2から$\Gamma(\Theta_{2n})=\Gamma_0(2)$であり，定理3の$x_n$，$y_n$を用いて，$\Xi_n=\Theta_{2n}-x_nE_n^{(1)}-y_nE_n^{(2)}$と置けば，$\Xi_n\in S_n(\Gamma_0(2))$．従って，$\Xi_n|_n\omega_n\in S_n(\Gamma_0(2))$であるから(2.3)を考えれば，

$$Tr_n(\Xi_n)=(3z_n+w_n2^{1-n}c(2,g_n))g_n \tag{3.11}$$

$$Tr_n(\Xi_n|_n\omega_n)=(2^{1-n/2}c(2,g_n)+3\cdot2^{-n/2})g_n \tag{3.12}$$

を得る．但し，$c(2,g_n)$はg_nのq^2の係数である．

一方，Conway and Sloane[1)]によれば，Θ_{2n}が Jacobi のテータ関数で表されることを用いると次の補題が分かる．

補題3　(1)　$Tr_n(\Theta_{2n})=2+8\cdot{}_{2n}C_{2q}+\cdots$

(2)　$Tr_n(\Theta_{2n}|_n\omega_n)=((-1)^{n/2}2^{n/2-1}+2^{1-n/2})$
$$+((-1)^{n/2}2^{1+n/2}n+2^{3-n/2}(n+4\cdot{}_{2n}C_4))q+\cdots$$

証明　3つのJacobiのテータ関数

$$\theta_n(z)=2q^{1/8}\prod_{j=1}^{\infty}(1-q^j)(1+q^j)^2,$$

$$\theta_2(z) = \prod_{j=1}^{\infty}(1-q^j)(1+q^{j-1/2})^2$$
$$\theta_3(z) = \prod_{j=1}^{\infty}(1-q^j)(1-q^{j-1/2})^2$$

を用いれば，

$$\Theta_{2n} = \frac{\theta_3^{2n}+\theta_4^{2n}}{2}$$

となる．$\theta_i(i=1,\ 2,\ 3)$ の変換公式によれば，

$$Tr_n(\Theta_{2n}) = (\theta_2^{2n}+\theta_3^{2n}+\theta_4^{2n})(1+(-1)^{n/2})/2$$
$$\begin{aligned} Tr_n(\Theta_{2n}|_n\omega_n) = {} & 2^{n/2}(-1)^{n/2}\theta_3(2z)^{2n} + 2^{n/2}(-1)^{n/2}\theta_2(2z)^{2n} \\ & + 2^{n/2}\theta_3(z/2)^{2n} + 2^{-n/2}\theta_4(z/2)^{2n} \\ & + 2^{-n/2}\theta_4((z+1)/2)^{2n} + 2^{-n/2}\theta_4((z+1)/2)^{2n} \end{aligned}$$

を得るので，これからの補題の主張が得られる．

補題3から次の2式を得る．

$$Tr_n(\Xi_n) = (1+(-1)^{n/2})(4\cdot{}_{2n}C_2+2nB_n^{-1})q+\cdots$$
$$Tr_n(\Xi_n|_n\omega_n) = (((-1)^{n/2}2^{n/2}+2^{2-n/2})(2+B_n^{-1})\,2n+2^{5-n/2}\,{}_{2n}C_4)q+\cdots$$

これより，

$$3z_n + 2^{1-n}c(2,\ g_n)w_n = (1+(-1)^{n/2})(4\cdot{}_{2n}C_2)+2nB_n^{-1}$$
$$2^{1-n/2}c(2,\ g_n)z_n + 3\cdot 2^{1-n/2}w_n = ((-1)^{n/2}2^{n/2}+2^{2-n/2})(2+B_n^{-1})n+2^{5-n/2}+{}_{2n}C_4$$

となり，この2式から，z_n, w_n を求めれば次のようになる．

n	z_n	w_n
$n\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 4)$	$2c(2,\ g_n)P_n$	$-3\cdot 2^n P_n$
$n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4)$	$\{2(4\cdot{}_{2n}C_2+2nB_n^{-1})+2^{-n/2}c(2,\ g_n)Q_n\}/3$	$-Q_n$

但し，P_n, Q_n は次の式で与えられる．

$$P_n = \frac{-32\,{}_{2n}C_4+(4-2^n)\,2n}{9\cdot 2^n-4c(2,\ g_n)^2} + \frac{(4-2^n)\,2nB_n^{-1}}{18\cdot 2^n-8c(2,\ g_n)^2}$$
$$Q_n = \frac{16\cdot 2^{n/2}\,{}_{2n}C_2-3\cdot 2^{n/2}(32\,{}_{2n}C_4+2n(4+2^n))}{9\cdot 2^{n/2}-4c(2,\ g_n)^2} + \frac{(8\cdot 2^{n/2}c(2,\ g_n)\,2n-3\cdot 2^{n/2}(4+2^n)B_n^{-1}}{18\cdot 2^{n/2}-8c(2,\ g_n)^2}$$

注意　$\dim S_n(\Gamma(1))=1$ が成り立つのは $n=12,\ 16,\ 18,\ 20,\ 22,\ 26$ のときである．

文　献

1) J.H.Conway and N.J.A.Sloane : Sphere Packings, Lattices and Groups, Springer-Verlag, 1988.
2) W.Ebeling : Lattices and Codes, Vieweg Publishing, 1994.
3) T.Miyake : Modular Forms, Springer-Verlag, 1989.
4) R.Rankin : Modular forms and functions, Cambridge Univ. Press, 1977.

平成 9 (1997)年 9 月 5 日受理
平成 9 (1997)年12月25日発行