二元二次連立方程式の研究について

中田　道孝・永尾　豊明
（理学部数理情報科学科・兵庫県立西脇高等学校）

On a study of system of quadratic equations with two unkowns

Michitaka NAKADA and Toyoaki NAGAO
Department of Mathmatics, Faculty of Science
Nishiwaki High School of Hyogo Prefecture

Abstract: The purpose of our paper is to find a general method of solution of the system of quadratic equations with two unknowns and furthermore we will partially try to solve the system of cubic and quartic equations with two unknowns.

キーワード：二元二次連立方程式，二元三次連立方程式，二元四次連立方程式，三元連立方程式，終結式

はじめに

この論文の目的は二元二次連立方程式を解く一般的な方法を研究し，更に二元三次や二元四次に拡張し，更に三元の連立方程式を考察することに到達することを目的とする。

二元二次連立方程式

x, y に関する二次連立方程式 $\begin{cases} F(x,y)=0 \\ G(x,y)=0 \end{cases}$ を解くのに $F(x,y), G(x,y)$ の一方が一次のときは，その一次式で，y か x の一方を他方で表して，二次式の方に代入すれば容易に求まる。また $F(x,y)$, $G(x,y)$ が共に二次式であっても，最初から一方が，例えば $F(x,y)=L(x,y)M(x,y)$ なる一次式 $L(x,y), M(x,y)$ によって因数分解されている場合は二組の連立方程式 $\begin{cases} L(x,y)=0 \\ G(x,y)=0 \end{cases}$ $\begin{cases} M(x,y)=0 \\ G(x,y)=0 \end{cases}$ を解くことと同値である。

私がここで述べることは一般的な二次式 $F(x,y)$, $G(x,y)$ に対して，一般的な解き方を試みることである。

1.1 ［1］二つの方程式を適当に加減して，一次式を導きだして解く方法

準備　x, y の二次方程式 $F(x,y)=ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ が二つの一次式に因数分解されるための条件を考える。

$F(x,y)$ が x, y の一次式に因数分解されることは，$F(x,y)=0$ において x, y のどちらか一方を定数と考えて他方をといたときに，解が一方の一次式になることにほかならない。

◎$a\neq 0$のときにxについて整頓すれば$F(x,y)=ax^2+2(hy+g)x+(by^2+2fy+c)$になる。二次方程式の根の公式により

$$F(x,y)=a\left(x+\frac{hy+g-\sqrt{(hy+g)^2-a(by^2+2fy+c)}}{a}\right)$$

$$\left(x+\frac{hy+g+\sqrt{(hy+g)^2-a(by^2+2fy+c)}}{a}\right)$$

$$=a\left(x+\frac{hy+g-\sqrt{(h^2-ab)y^2+2(gh-af)y+(g^2-ac)}}{a}\right)$$

$$\left(x+\frac{hy+g+\sqrt{(h^2-ab)y^2+2(gh-af)y+(g^2-ac)}}{a}\right)$$

と因数分解されるから$F(x,y)$がx,yの一次式に因数分解されるための条件は$h^5-ah\neq 0$のときは$(h^2-ab)y^2+2(gh-af)y+(g^2-ac)$がyの完全平方式になることで，即ち$(gh-af)^2-(h^2-ab)(g^2-ac)=0$となることである。

ここで$h^2-ab>0$とはいってなく，$h^2-ab<0$ならば虚の一次式に分解されることは，後の例で示される。

$h^2-ab=0$のときは根号内にyの一次の根があってはならず，$gh-af=0$となることで，これは上の$h^2-ab\neq 0$の場合に含まれる。

いずれの場合も条件は$abc-af^2-bg^2-ch^2+2fgh=0$と書き直せる。

◎$b\neq 0$のときはxとyの役目を入れ変えてやれば同じ式が出てくる。

◎$a=b=0$で$h\neq 0$のときは$F(x,y)=2hxy+2gx+2fy+c$

中間に次の問題を考える。

$Axy+Bx+Cy+D\ (A\neq 0)$がx,yの一次式に因数分解されるための条件を考える。$Axy+Bx+Cy+D=\alpha(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)$とする。$(\alpha\neq 0)$

a_1, a_2の両方が0ならば，右辺はyだけの式になり，左辺にAxyがあるから矛盾する。

だからa_1, a_2の少なくとも一方は0でない。$a_1\neq 0$として一般性を失わない。

このとき$a_2\neq 0$とすると右辺に$\alpha a_1a_2x^2$があり左辺にないから矛盾する。よって$a_2=0$

同様にして$b_1=0$，$b_2\neq 0$が導きだされ$Axy=\alpha(a_1x+c_1)(b_2y+c_2)$となる。いっそのこと$Axy+Bx+Cy+D=A(x+m)(y+n)$としてよい。

以上の考察のもとに$F(x,y)$が二つの一次式に分解されるためには$2hxy+2gx+2fy+c=2h(x+m)(y+n)$でなければならない。したがって$2g=2hn$, $2f=2hm$, $c=2hmn$となる。

よって$n=\dfrac{g}{h}$, $m=\dfrac{f}{h}$, $mn=\dfrac{c}{2h}$より$\dfrac{fg}{h^2}=\dfrac{c}{2h}$従って$2fgh=ch^2$この条件も$a=b=0$で$h\neq 0$として$abc-af^2-bg^2-ch^2+2fgh=0$に含まれる。

以上により全ての場合の条件は行列式を使えば$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}=0$と表される。

以上の議論は$F(x,y)$がx,yの二次式であること，即ちa,b,hの中に0でないものがあることを仮定していた。しかし，$a=b=h=0$即ち$F(x,y)$が一次式のときも

$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & g \\ 0 & 0 & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0$ である。以上を定理にまとめる。

（定理１） x, y の高々二次式 $F(x,y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c$ が一次式であるか，二つの一次式に因数分解される為の必要十分条件は $\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0$

となることである。

本論　定理１に帰着して二元二次連立方程式を解く。

$\begin{cases} F(x,y) = ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \\ G(x,y)=a'x^2+2h'xy+b'y^2+2g'x+2f'y+c'=0 \end{cases}$ を解くことは，λ を任意定数として

$\begin{cases} F(x,y)+\lambda G(x,y)=0 \\ G(x,y)=0 \end{cases}$ を解くことと同値である。

$F(x,y)+\lambda G(x,y)=(a+a'\lambda)x^2+2(h+h'\lambda)xy+(b+b'\lambda)y^2+2(g+g'\lambda)x+2(f+f'\lambda)y+(c+c'\lambda)$ から x, y の一次式が導かれるためには $\begin{vmatrix} a+a'\lambda & h+h'\lambda & g+g'\lambda \\ h+h'\lambda & b+b'\lambda & f+f'\lambda \\ g+g'\lambda & f+f'\lambda & c+c'\lambda \end{vmatrix} = 0$

これは λ に関する高々三次方程式である。

その一根 λ_1 がわかれば $F(x,y)+\lambda_1 G(x,y)=L_1(x,y)$ で $L_1(x,y)$ が一次式の場合と $F(x,y)+\lambda_1 G(x,y)=L_1(x,y)M_1(x,y)$ で $L_1(x,y)$, $M_1(x,y)$ が一次式の場合が考えられる。前者の場合はもとの連立方程式は $\begin{cases} L_1(x,y)=0 \\ G(x,y)=0 \end{cases}$ と同値で一般に二組の解を持つ。

後者の場合は二組の連立方程式 $\begin{cases} L_1(x,y)=0 \\ G(x,y)=0 \end{cases}$ $\begin{cases} M_1(x,y)=0 \\ G(x,y)=0 \end{cases}$ と同値で一般に四組の解を持つ。

更に λ に関して相異なる二根 $\lambda_1 \lambda_2$ がわかれば $\begin{cases} F(x,y)+\lambda_1 G(x,y)=L_1(x,y) \\ F(x,y)+\lambda_2 G(x,y)=L_2(x,y)M_2(x,y) \end{cases}$ の場合と $\begin{cases} F(x,y)+\lambda_1 G(x,y)=L_1(x,y)M_1(x,y) \\ F(x,y)+\lambda_2 G(x,y)=L_2(x,y)M_2(x,y) \end{cases}$ の場合が考えられる。

しかし $F(x,y)$, $G(x,y)$ が共に一次式でない限り $\begin{cases} F(x,y)+\lambda_1 G(x,y)=L_1(x,y) \\ F(x,y)+\lambda_2 G(x,y)=M_1(x,y) \end{cases}$ とはならないことは容易に証明される。

前者の場合は二組の連立方程式 $\begin{cases} L_1(x,y)=0 \\ L_2(x,y)=0 \end{cases}$ $\begin{cases} L_1(x,y)=0 \\ M_2(x,y)=0 \end{cases}$ と同値で，一般に二組の解を持つ。

後者の場合は四組の連立方程式 $\begin{cases} L_1(x,y)=0 \\ L_2(x,y)=0 \end{cases}$ $\begin{cases} L_1(x,y)=0 \\ M_2(x,y)=0 \end{cases}$ $\begin{cases} M_1(x,y)=0 \\ L_2(x,y)=0 \end{cases}$ $\begin{cases} M_1(x,y)=0 \\ M_2(x,y)=0 \end{cases}$ と同値で，一般に四組の解を持つ。

1.2 ［２］二つの方程式が共通根をもつ為の条件を考えることから解く方法

準備　二つの方程式

$\begin{cases} Ax^2+Bx+C=0\ (A \neq 0) \\ Lx^2+Mx+N=0 \end{cases}$

が共通根を持つための条件を考える。共通根があるとき，その根を α とすれば $A\alpha^2+B\alpha+C=0$, $L\alpha^2+M\alpha+N=0$ だから $0=L\times 0-A\times 0=L(A\alpha^2+B\alpha+C)-A(L\alpha^2+M\alpha+N)=(BL-AM)\alpha+(CL-AN)$ これより $CL-AN=-(BL-AM)\alpha$

従って $A(CL-AN)^2-B(CL-AN))(BL-AM)+C(BL-AM)^2=A(BL-AM)^2\alpha^2+B(BL-AM)^2\alpha+C(BL-AM)^2=(BL-AM)^2(A\alpha^2+B\alpha+C)=(BL-AM)^2\times 0=0$

逆に $A(CL-AN)^2-B(CL-AN)(BL-AM)+C(BL-AM)^2=0$ とする。

まず，$BL-AM\neq 0$ ならば

$A\left(-\dfrac{CL-AN}{BL-AM}\right)^2+B\left(-\dfrac{CL-AN}{BL-AM}\right)+C=0$ だから $\alpha=-\dfrac{CL-AN}{BL-AM}$ は $Ax^2+Bx+C=0$ の根である。

また明らかに $(BL-AM)x+(CL-AN)=L(Ax^2+Bx+C)-A(Lx^2+Mx+N)=0$ の根である。

$0=(BL-AM)\alpha+(CL-AN)=L(A\alpha^2+B\alpha+C)-A(L\alpha^2+M\alpha+N)$ で $A\alpha^2+B\alpha+C=0$ で $A\neq 0$ だから $L\alpha^2+M\alpha+N=0$ となる。

即ち α は $Ax^2+Bx+C=0$ と $Lx^2+Mx+N=0$ の共通根である。

次に $BL-AM=0$ ならば当然 $CL-AN=0$ であり，

$L=\dfrac{L}{A}A,\ M=\dfrac{L}{A}B,\ N=\dfrac{L}{A}C$ ここで $\dfrac{L}{A}=k$ とおけば二つの方程式は $\begin{cases}Ax^2+Bx+C=0\\ kAx^2+kBx+kC=0\end{cases}$ となり，

◎ $k\neq 0$ ならば二つの方程式は全く同値だから，二根とも共通根である。

◎ $k=0$ ならば二つの方程式は，$\begin{cases}Ax^2+Bx+C=0\ (A\neq 0)\\ 0\times x^2+0\times x+0=0\end{cases}$ で下の方程式は，x は何でも満たすから当然上の方程式の二根を満たし，共通根と考えられる。以上を定理にまとめる。

（定理２） $\begin{cases}Ax^2+Bx+C=0\ (A\neq 0)\\ Lx^2+Mx+N=0\end{cases}$ が共通根を持つための必要十分条件は $A(CL-AN)^2-B(CL-AN)(BL-AM)+C(BL-AM)^2=0$ となることである。

本論　定理２に帰着して二元二次連立方程式を解く。

$\begin{cases}F(x,y)=ax^2+hxy+by^2+gx+fy+c=0\\ G(x,y)=a'x^2+h'xy+b'y^2+g'x+f'y+c'=0\end{cases}$ を解くことを考える。

a, a' の少なくとも一方が０でないとき，例えば $a\neq 0$ のときについて述べる。

$\begin{cases}F(x,y)=ax^2+(hy+g)x+(by^2+fy+c)=0,\ A=a, B=hy+g, C=by^2+fy+c\\ G(x,y)=a'x^2+(h'y+g')x+(b'y^2+f'y+c')=0,\ L=a', M=h'y+g', N=b'y^2+f'y+c'\end{cases}$

準備より $A(CL-AN)^2-B(CL-AN)(BL-AM)+C(BL-AM)^2=0$ を満たす y の値 y_0 に対して $\begin{cases}F(x,y_0)=0\\ G(x,y_0)=0\end{cases}$ の共通根である x の値 x_0 が求まる。

このとき $A(CL-AN)^2-B(CL-AN)(BL-AM)+C(BL-AM)^2=0$ は y に関する高々四次方程式である。

b, b' の少なくとも一方が０でないときは x と y の役目を入れかえて，同様に解くことができる。$a=a'=b=b'=0$ のときは別の方法に委ねる。

1.3 ［3］終結式を用いて解く方法

準備　先ず終結式について説明する。

二つの多項式

$\begin{cases}f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m\\ g(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n\end{cases}\quad(a_0, b_0\neq 0)$

に対して

$$R(f,g)=\begin{array}{|cccccccccc|l}
a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{m-1} & a_m & & & & & \\
 & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{m-1} & a_m & & & & \\
 & & \cdots & & & & & & & & \left.\right\} n \\
 & & \cdots & & & & & & & & \\
 & & & & a_0 & a_1 & \cdots & a_{m-1} & a_m & & \\
b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_{n-1} & b_n & & & & & \\
 & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_{n-1} & b_n & & & & \left.\right\} m \\
 & & \cdots & \cdots & & & & & & & \\
 & & & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_{n-1} & b_n & &
\end{array}$$

なる行列式を $f(x)$ と $g(x)$ の終結式という。但し，空白の部分は0である。

（補題） 上の二つの多項式 $f(x)$ 及び $g(x)$ が共通因子を持つための必要十分条件は次数が n より小さい多項式 $h(x)$ と，次数が m より小さい多項式 $k(x)$ が存在して $h(x)f(x)=k(x)g(x)$ となることである。ただし，$h(x)$ と $k(x)$ は共に0でない多項式である。

証明

必要性：a_0, b_0は共に0でないから，$f(x)$ はm次の多項式で，$g(x)$ はn次の多項式である。

$f(x)$ と $g(x)$ の共通因子を $q(x)$ とすれば $f(x)=q(x)k(x)$, $g(x)=q(x)h(x)$ で $k(x), h(x)$ の次数はそれぞれ m, n より小さい。

このとき $h(x)f(x)=k(x)g(x)=q(x)h(x)k(x)$ で証明された。

十分性：逆に $h(x)f(x)=k(x)g(x)$ で $h(x), k(x)$ の次数がそれぞれ n, m より小さいとする。$f(x), g(x)$ が共通因子をもたなければ互いに素になる。左辺が $f(x)$ で割り切れるから，右辺も $f(x)$ で割り切れなければならないが，$f(x)$ と $g(x)$ は互いに素だから，次数が m より小さい多項式 $k(x)$ が次数mの多項式 $f(x)$ で割り切れることになり矛盾。

よって $f(x)$ と $g(x)$ は共通因子を持つ。

さて，$h(x)=c_0x^{n-1}+c_1x^{n-2}+\cdots+c_{n-2}+c_{n-1}$, $k(x)=d_0x^{m-1}+d_1x^{m-2}+\cdots+d_{m-2}x+d_{m-1}$とする。

そうすれば $(a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots a_{m-1}x+a_m)(c_0x^{n-1}+c_1x^{n-2}+\cdots+c_{n-2}x+c_{n-1})$

$=(b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n)(d_0x^{m-1}+d_1x^{m-2}+\cdots+d_{m-2}x+d_{m-1})$

両辺の係数を比較すれば

$a_0c_0=b_0d_0$

$a_1c_0+a_0c_1=b_1d_0+b_0d_1$

$\cdots$

$\cdots$

$a_mc_{n-2}+a_{m-1}c_{n-1}=b_nd_{m-2}+b_{n-1}d_{m-1}$

$a_mc_{n-1}=b_nd_{m-1}$

これは $m+n$ 個の未知数 $c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}, d_0, d_1, \cdots, d_{m-1}$

に関する一次同次連立方程式である。$h(x)$ と $k(x)$ が共に0でない多項式であることは，この $m+n$ 元一次連立方程式が自明でない解を持つことで，その為の条件はよく知られているように

$$\underbrace{\begin{vmatrix}
a_0 & & & & b_0 & & & \\
a_1 & a_0 & & & b_1 & b_0 & & \\
\cdot & a_1 & & & \cdot & b_1 & & \\
\cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & & \\
a_{m-1} & \cdot & & a_0 & b_{n-1} & \cdot & & b_0 \\
a_m & a_{m-1} & & a_1 & b_n & b_{n-1} & & b_1 \\
 & a_m & \cdots & \cdot & & b_n & \cdots & \cdot \\
 & & & \cdot & & & & \cdot \\
 & & & a_{m-1} & & & & b_{n-1} \\
 & & & a_m & & & & b_n
\end{vmatrix}}_{n \qquad\qquad m}=0$$

なることである。この左辺の行列式は終結式の行列式の転置行列式だから，終結式自身に等しい。以上を定理にまとめる。

(定理３)　二つの多項式

$$\begin{cases} f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m = 0 \\ g(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n = 0 \end{cases}$$ において，

a_0, b_0が共に０でないとき，$f(x)$と$g(x)$が共通因子をもつ為の必要十分条件は終結式$R(f,g) = 0$となることである。

本論　定理３を用いればx, yの任意次数の連立方程式を解くことができる。

連立方程式$\begin{cases} F(x,y) = 0 \\ G(x,y) = 0 \end{cases}$に対して，それぞれの式を，$x$の次数に整頓して

$$\begin{cases} F(x,y) = a_0(y)x^m + a_1(y)x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}(y)x + a_m(y) = 0 \\ G(x,y) = b_0(y)x^n + b_1(y)x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}(y)x + b_n(y) = 0 \end{cases}$$ とできる。

ここに$a_i(y)$や$b_j(y)$はyの多項式である。これから$R(F,G) = 0$はyの一元方程式になる。

この根y_0に対して$\begin{cases} F(x,y_0) = a_0(y_0)x^m + a_1(y_0)x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}(y_0)x + a_m(y_0) = 0 \\ G(x,y_0) = b_0(y_0)x^n + b_1(y_0)x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}(y_0)x + b_n(y_0) = 0 \end{cases}$

は，共通因子をもつから，xの方程式として共通根x_0をもつ。

そして，$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$が解である。そうはいっても$R(F,G) = 0$が$y$の非常に高次な方程式の時は，根が簡単に見つかるとは限らない。

取り敢えず，二元二次連立方程式を解くことに適用する。

$$\begin{cases} F(x,y) = Ax^2 + Hxy + By^2 + Gx + Fy + C = 0 \\ G(x,y) = A'x^2 + H'xy + B'y^2 + G'x + F'y + C' = 0 \end{cases}$$

をそれぞれxの次数に整頓すると

$$\begin{cases} F(x,y) = Ax^2 + (Hy + G)x + (By^2 + Fy + C) = 0 \\ G(x,y) = A'x^2 + (H'y + G')x + (B'y^2 + F'y + C') = 0 \end{cases}$$

A, A'の両方が０でなければ，

$$\begin{vmatrix} A & Hy + G & By^2 + Fy + C & 0 \\ 0 & A & Hy + G & By^2 + Fy + C \\ A' & H'y + G' & B'y^2 + F'y + C' & 0 \\ 0 & A' & H'y + G' & B'y^2 + F'y + C' \end{vmatrix} = 0$$

をとく。これはyの高々四次方程式である。

A, A'の一方が０で他方が０でないときは，たとえば$A \neq 0$で$A' = 0$ならば

$$\begin{cases} F(x,y) = Ax^2 + (Hy + G)x + (By^2 + Fy + C) = 0 \\ G(x,y) = (H'y + G')x + (B'y^2 + F'y + C') = 0 \end{cases}$$

とみて

$$\begin{vmatrix} A & Hy + G & By^2 + Fy + C \\ H'y + G' & B'y^2 + F'y + C' & 0 \\ 0 & H'y + G' & B'y^2 + F'y + C' \end{vmatrix} = 0$$

をとく。これもyの高々四次方程式である。

$A = A' = 0$のときは

$$\begin{cases} F(x,y) = (Hy + G)x + (By^2 + Fy + C) = 0 \\ G(x,y) = (H'y + G')x + (B'y^2 + F'y + C') = 0 \end{cases}$$ とみて

$\begin{vmatrix} Hy+G & By^2+Fy+C \\ H'y+G' & B'y^2+F'y+C' \end{vmatrix}=0$ を解く。これはyの高々三次方程式である。

以上の論法は初めからxとyの役目を入れかえても同様にできる。

1.4 ［4］xとyのどちらかを他方の有理式に直して，代入して解く方法

$$\begin{cases} F(x,y)=ax^2+hxy+by^2+gx+fy+c=0 \\ G(x,y)=a'x^2+h'xy+b'y^2+g'x+f'y+c=0 \end{cases}$$

a, a', b, b' の少なくとも一つが0のとき，たとえば $a=0$ とすると，

$F(x,y)=hxy+by^2+gx+fy+c=0$ となる。

よって，$(hy+g)x=-(by^2+fy+c)$

$hy+g$ と by^2+fy+c を同時に0にするyがなければ $x=-\dfrac{by^2+fy+c}{hy+g}$ を下の式に代入して，分母を払えば，yに関する高々四次方程式になり，それから $y=y_0$ なる根が解ければ $x=-\dfrac{by_0^2+fy_0+c}{hy_0+g}$ からxが求まる。

$hy+g$ と by^2+fy+c を同時に0にする $y=y_0$ があれば $y=y_0$ は一つの解で，それを下の式に代入して，xが求まる。またこのとき $by^2+fy+c=(y-y_0)(by+1)$, $hy+g=h(y-y_0)$ と出来て $x=-\dfrac{by+1}{h}$ を下の式に代入して，$y\neq y_0$ なるyの根が求まり，それを下の式に代入すればxが求まる。

a, a', b, b' が全て0でなければ，$a'F(x,y)-aG(x,y)$ は x^2 の係数が0だから，この式に今までの方法を適用すればよい。

例　　題

以下の例題を解くにあたって［2］の解法と［3］の解法の重複はさけて，どちらか一方にする。

2.1 例題1

$$\begin{cases} 7x^2+11xy-6y^2-9x-y+2=0 \\ 23x^2+24xy-8y^2-21x-10y-74=0 \end{cases}$$

［1］の解法：計算の便宜上 $\begin{cases} F=14x^2+22xy-12y^2-18x-2y+4=0 \\ G=46x^2+48xy-16y^2-42x-20y-148=0 \end{cases}$ とする

$$\begin{vmatrix} 14+46\lambda & 11+24\lambda & -9-21\lambda \\ 11+24\lambda & -12-16\lambda & -1-10\lambda \\ -9-21\lambda & -1-10\lambda & 4-148\lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2(23\lambda+7) & 24\lambda+11 & -3(7\lambda+3) \\ 24\lambda+11 & -4(4\lambda+3) & -(10\lambda+1) \\ -3(7\lambda+3) & -(10\lambda+1) & -4(37\lambda-1) \end{vmatrix}$$

$=206712\lambda^3+206712\lambda^2+45936\lambda=22968\lambda(9\lambda^2+9\lambda+2)=22968\lambda(3\lambda+1)(3\lambda+2)=0$

より $\lambda=0, -\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}$

◎ $\lambda=0$ のとき，$\dfrac{1}{2}(F+0G)=\dfrac{1}{2}F=7x^2+11xy-6y^2-9x-y+2$

$=7x^2+(11y-9)x-(2y-1)(3y+2)=\{x+(2y-1)\}\{7x-(3y+2)\}$

$=(x+2y-1)(7x-3y-2)=0$

◎ $\lambda=--\dfrac{1}{3}$ のとき，$\dfrac{3}{2}(F-\dfrac{1}{3}G)=\dfrac{3}{2}F-\dfrac{1}{2}G$

$=(21x^2+33xy-18y^2-27x-3y+6)-(23x^2+24xy-8y^2-21x-10y-74)$
$=-2x^2+9xy-10y^2-6x+7y+80=-\{2x^2-3(3y-2)x+(2y+5)(5y-16)\}$
$=-\{x-(2y+5)\}\{2x-(5y-16)\}=-(x-2y-5)(2x-5y+16)=0$

◎$\lambda=-\frac{2}{3}$のとき，$\frac{3}{2}(F-\frac{2}{3}G)=\frac{3}{2}F-G$
$=(21x^2+33xy-18y^2-27x-3y+6)-(46x^2+48xy-16y^2-42x-20y-148)$
$=-25x^2-15xy-2y^2+15x+17y+154=-\{25x^2+15(y-1)x+(y-14)(2y+11)\}$
$=-\{5x+(y-14)\}\{5x+(2y+11)\}=-(5x+y-14)(5x+2y+11)$

□$\lambda=0$と$\lambda=-\frac{1}{3}$を組み合わせると次の四組の連立方程式を解くことになる。

$\begin{cases}x+2y-1=0\\x-2y-5=0\end{cases}$ $\begin{cases}x+2y-1=0\\2x-5y+16=0\end{cases}$ $\begin{cases}7x-3y-2=0\\x-2y-5=0\end{cases}$ $\begin{cases}7x-3y-2=0\\2x-5y+16=0\end{cases}$

これらを解くことにより次の四組の解を得る

$\begin{cases}x=3\\y=-1\end{cases}$ $\begin{cases}x=-3\\y=2\end{cases}$ $\begin{cases}x=-1\\y=-3\end{cases}$ $\begin{cases}x=2\\y=4\end{cases}$

{□$\lambda=0$と$\lambda=-\frac{2}{3}$を組み合わせる方法
□$\lambda=-\frac{1}{3}$と$\lambda=-\frac{2}{3}$を組み合わせる方法 いずれで解いても同じ解を得るが省略する。

［2］の解法：まずxの次数に整頓すると

$\begin{cases}7x^2+(11y-9)x-(6y^2+y-2)=0 & A=7\quad B=11y-9\quad C=-(6y^2+y-2)\\23x^2+3(8y-7)x-2(4y^2+5y+37)=0 & L=23\quad M=3(8y-7)\quad N=-2(4y^2+5y+37)\end{cases}$

$CL-AN=-23(6y^2+y-2)+14(4y^2+5y+37)=-(82y^2-47y-564)$
$BL-AM=23(11y-9)-21(8y-7)=5(17y-12)$
$A(CL-AN)^2-B(CL-AN)(BL-AM)+C(BL-AM)^2$
$=7(82y^2-47y-564)^2+5(11y-9)(7y-12)(82y^2-47y-564)-25(6y^2+y-2)(17y-12)^2$
$=-264132y^4+528264y^3+3433716y^2-3697848y-6339168$
$=-264132(y^4-2y^3-13y^2+14y+24)=-264132(y+1)(y-2)(y+3)(y-4)=0$

$y=-1$のとき$\begin{cases}7x^2-20x-3=0\\23x^2-45x-72=0\end{cases}$ $\begin{cases}(x-3)(7x+1)=0\\(x-3)(23x+24)=0\end{cases}$ 共通根は$x=3$得られる解
$\begin{cases}x=3\\y=-1\end{cases}$

$y=2$のとき$\begin{cases}7x^2+13x-24=0\\23x^2+27x-126=0\end{cases}$ $\begin{cases}(x+3)(7x-8)=0\\(x+3)(23x-42)=0\end{cases}$ 共通根は$x=-3$得られる解
$\begin{cases}x=-3\\y=2\end{cases}$

$y=-3$のとき$\begin{cases}7x^2-42x-49=0\\23x^2-93x-116=0\end{cases}$ $\begin{cases}7(x+1)(x-7)=0\\(x+1)(23x-116)=0\end{cases}$ 共通根は$x=-1$得られる解
$\begin{cases}x=-1\\y=-3\end{cases}$

$y=4$のとき$\begin{cases}7x^2+35x-98=0\\23x^2+75x-242=0\end{cases}$ $\begin{cases}7(x-2)(x+7)=0\\(x-2)(23x+21)=0\end{cases}$ 共通根は$x=2$得られる解$\begin{cases}x=2\\y=4\end{cases}$

［4］の解法：

下の式を3倍すると$69x^2+72xy-24y^2-63x-30y-222=0$
上の式を4倍すると$28x^2+44xy-24y^2-36x-4y+8=0$
上から下を引くと，$41x^2+28xy-27x-26y-230=0$
$2(14x-13)y=-(41x^2-27x-230)$

$14x-13=0$ ならば左辺は 0 だが右辺は 0 にならない。

よって $14x-13\neq 0$ だから $y=-\dfrac{41x^2-27x-230}{2(14x-13)}$

さて連立方程式の上の式を y について整頓すると

$7x^2-9x+2+(11x-1)y-6y^2=0$ これに上の y を代入すると

$$7x^2-9x+2-(11x-1)\frac{41x^2-27x-230}{2(14x-13)}-\frac{6(41x^2-27x-230)^2}{4(14x-13)^2}=0$$

分母を払い

$$2(14x-13)^2(7x^2-9x+2)-(14x-13)(11x-1)(41x^2-27x-230)-3(41x^2-27x-230)^2$$
$$=-8613x^4+8613x^3+94743x^2-77517x-155034=-8613(x^4-x^3-11x^2+9x+18)$$
$$=-8613(x+1)(x-2)(x-3)(x+3)=0 \text{ より}, \ x=-1,2,3,-3$$

$x=-1$ のとき $y=-\dfrac{41+27-230}{2(-14-13)}=-3$ より $\begin{cases}x=-1\\y=-3\end{cases}$

$x=2$ のとき $y=-\dfrac{164-54-230}{2(28-13)}=4$ より $\begin{cases}x=2\\y=4\end{cases}$

$x=3$ のとき $y=-\dfrac{369-81-230}{2(42-13)}=-1$ より $\begin{cases}x=3\\y=-1\end{cases}$

$x=-3$ のとき $y=-\dfrac{369+81-230}{2(-42-13)}=2$ より $\begin{cases}x=-3\\y=2\end{cases}$

2.2 例題2

$$\begin{cases}x^2+xy+y^2-2x-2y+1=0\\2x^2+xy+y^2-2x-y=0\end{cases}$$

[1] の解法：計算の便宜上 $\begin{cases}F=2x^2+2xy+2y^2-4x-4y+2=0\\G=4x^2+2xy+2y^2-4x-2y=0\end{cases}$ とする

$$\begin{vmatrix}2+4\lambda & 1+\lambda & -2-2\lambda\\1+\lambda & 2+2\lambda & -2-\lambda\\-2-2\lambda & -2-\lambda & 2+0\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2(2\lambda+1) & \lambda+1 & -2(\lambda+1)\\\lambda+1 & 2(\lambda+1) & -(\lambda+2)\\-2(\lambda+1) & -(\lambda+2) & 2\end{vmatrix}$$

$=2(2\lambda+1)(2\lambda^2+2\lambda+1)=0$ より

$\lambda=-\dfrac{1}{2}$

$$F-\frac{1}{2}G=(2x^2+2xy+2y^2-4x-4y+2)-(2x^2+xy+y^2-2x-y)$$
$$=xy+y^2-2x-3y+2=(y-2)x+(y-2)(y-1)$$
$$=(y-2)\{x+(y-1)\}=(y-2)(x+y-1)=0 \text{ より}$$

$\begin{cases}y-2=0\\2x^2+xy+y^2-2x-y=0\end{cases}$ $y=2$ $2x^2+2=0$ $2(x^2+1)=0$

これらを解くことにより次の二組の解を得る

$\begin{cases}x=i\\y=2\end{cases}$ $\begin{cases}x=-i\\y=2\end{cases}$

$\begin{cases}x+y-1=0\\2x^2+xy+y^2-2x-y=0\end{cases}$ $y=1-x$ $2x^2-2x=0$ $2x(x-1)=0$

これらを解くことにより次の二組の解を得る

$\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$ $\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$

[2] の解法：x の次数に整理して

$$\begin{cases}x^2+(y-2)x+(y-1)^2=0 & A=1 \quad B=y-2 \quad C=(y-1)^2\\2x^2+(y-2)x+y(y-1)=0 & L=2 \quad M=y-2 \quad N=y(y-1)\end{cases}$$

$CL-AN=2(y-1)^2-y(y-1)=(y-1)(y-2)$

$BL-AM=2(y-2)-(y-2)=y-2$

$A(CL-AN)^2-B(CL-AN)(BL-AM)+C(BL-AM)^2$

$=(y-1)^2(y-2)^2-(y-2)(y-1)(y-2)(y-2)+(y-1)^2(y-2)^2=y(y-1)(y-2)^2=0$

より $y=0,1,2$

$y=0$ のとき $\begin{cases}x^2-2x+1=0\\2x^2-2x=0\end{cases}$ $\begin{cases}(x-1)^2=0\\2x(x-1)=0\end{cases}$ 共通根は $x=1$ 得られる解 $\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$

$y=1$ のとき $\begin{cases}x^2-x=0\\2x^2-x=0\end{cases}$ $\begin{cases}x(x-1)=0\\x(2x-1)=0\end{cases}$ 共通根は $x=0$ 得られる解 $\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$

$y=2$ のとき $\begin{cases}x^2+1=0\\2x^2+2=0\end{cases}$ $\begin{cases}x^2+1=0\\2(x^2+1)=0\end{cases}$ 共通根は $x=\pm i$ 得られる解 $\begin{cases}x=i\\y=2\end{cases}$ $\begin{cases}x=-i\\y=2\end{cases}$

［4］の解法：下の式から上の式を引くと $x^2+y-1=0$ より $y=1-x^2$

これを下の式に代入すると $x^4-x^3+x^2-x=0$

$x(x-1)(x^2+1)=0$ よって $x=0,1,\pm i$

$\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$ $\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$ $\begin{cases}x=i\\y=2\end{cases}$ $\begin{cases}x=-i\\y=2\end{cases}$

2.3　例題3

$$\begin{cases}x^2+y^2=25\\4xy-3y^2-15x+30y-75=0\end{cases}$$

［1］の解法：計算の便宜上 $\begin{cases}F=x^2+y^2-25=0\\G=8xy-6y^2-30x+60y-150=0\end{cases}$ とする

$$\begin{vmatrix}1+0\lambda & 0+4\lambda & 0-15\lambda\\0+4\lambda & 1-6\lambda & 0+30\lambda\\0-15\lambda & 0+30\lambda & -25-150\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 4\lambda & -15\lambda\\4\lambda & -(6\lambda-1) & 30\lambda\\-15\lambda & 30\lambda & -25(6\lambda+1)\end{vmatrix}$$

$=25(\lambda+1)(2\lambda+1)(3\lambda-1)=0$ より

$\lambda=-1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}$

◎ $\lambda=-1$ のとき $F-G=(x^2+y^2-25)-(8xy-6y^2-30x+60y-150)$

$=x^2-8xy+7y^2+30x-60y+125$

$=x^2-2(4y-15)x+(7y-25)(y-5)$

$=\{x-(7y-25)\}\{x-(y-5)\}=(x-7y+25)(x-y+5)=0$

◎ $\lambda=-\frac{1}{2}$ のとき $F-\frac{1}{2}G=(x^2+y^2-25)-(4xy-3y^2-15x+30y-75)$

$=x^2-4xy+4y^2+15x-30y+50$

$=x^2-(4y-15)x+2(y-5)(2y-5)$

$=\{x-2(y-5)\}\{x-(2y-5)\}=(x-2y+10)(x-2y+5)=0$

◎ $\lambda=\frac{1}{3}$ のとき $3(F+\frac{1}{3}G)=3F+G=(3x^2+3y^2-75)+(8xy-6y^2-30x+60y-150)$

$=3x^2+8xy-3y^2-30x+60y-225$

$=3x^2+2(4y-15)x-3(y-5)(y-15)$

$=\{x+3(y-5)\}\{3x-(y-15)\}=(x+3y-15)(3x-y+15)=0$

□ $\lambda=-1$ と $\lambda=-\frac{1}{2}$ を組み合わせると次の四組の連立方程式を解くことになる。

$\begin{cases}x-7y+25=0\\x-2y+10=0\end{cases}$ $\begin{cases}x-7y+25=0\\x-2y+5=0\end{cases}$ $\begin{cases}x-y+5=0\\x-2y+10=0\end{cases}$ $\begin{cases}x-y+5=0\\x-2y+5=0\end{cases}$

これらを解くことにより次の四組の解を得る

$\begin{cases} x=-4 \\ y=3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$ $\begin{cases} x=0 \\ y=5 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-5 \\ y=0 \end{cases}$

この外に $\begin{cases} \square\lambda=-1 \text{ と } \lambda=\dfrac{1}{3} \text{ を組み合わせる方法} \\ \square\lambda=-\dfrac{1}{2} \text{ と } \lambda=\dfrac{1}{3} \text{ を組み合わせる方法} \end{cases}$

もある。

［3］の解法

$\begin{cases} x^2+(y-5)(y+5)=0 \\ (4y-15)x-3(y-5)^2=0 \end{cases}$

終結式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & (y-5)(y+5) \\ 4y-15 & -3(y-5)^2 & 0 \\ 0 & 4y-15 & -3(y-5)^2 \end{vmatrix}=25y(y-3)(y-4)(y-5)=0$$

より $y=0,3,4,5$

$y=0$ のとき $\begin{cases} x^2-25=0 \\ -15x-75=0 \end{cases}$ $\begin{cases} (x-5)(x+5)=0 \\ -15(x+5)=0 \end{cases}$ 共通根は $x=-5$ 得られる解 $\begin{cases} x=-5 \\ y=0 \end{cases}$

$y=3$ のとき $\begin{cases} x^2-16=0 \\ -3x-12=0 \end{cases}$ $\begin{cases} (x-4)(x+4)=0 \\ -3(x+4)=0 \end{cases}$ 共通根は $x=-4$ 得られる解 $\begin{cases} x=-4 \\ y=3 \end{cases}$

$y=4$ のとき $\begin{cases} x^2-9=0 \\ x-3=0 \end{cases}$ $\begin{cases} (x-3)(x+3)=0 \\ x-3=0 \end{cases}$ 共通根は $x=3$ 得られる解 $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$

$y=5$ のとき $\begin{cases} x^2=0 \\ 5x=0 \end{cases}$ 共通根は $x=0$ 得られる解 $\begin{cases} x=0 \\ y=5 \end{cases}$

［4］の解法：下の式から $(4y-15)x=3y^2-30y+75=3(y-5)^2$

$4y-15=0$ ならば左辺が0で右辺が0でないから成り立たない。

よって $4y-15\neq 0$ だから $x=\dfrac{3(y-5)^2}{4y-15}$ これを上の式に代入して

$\dfrac{9(y-5)^4}{(4y-15)^2}+y^2=25$ $\quad 9(y-5)^4+(y^2-25)(4y-15)^2=0$

よって $25y(y-3)(y-4)(y-5)=0$ となり $y=0,3,4,5$

$y=0$ のとき $x=\dfrac{3\times 25}{-15}=-5$ $\quad \begin{cases} x=-5 \\ y=0 \end{cases}$

$y=3$ のとき $x=\dfrac{3\times 4}{12-15}=-4$ $\quad \begin{cases} x=-4 \\ y=3 \end{cases}$

$y=4$ のとき $x=\dfrac{3}{16-15}=3$ $\quad \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$

$y=5$ のとき $x=\dfrac{0}{20-15}=0$ $\quad \begin{cases} x=0 \\ y=5 \end{cases}$

2.4 例題4

$\begin{cases} x^2-2xy-y^2-x+y+1=0 \\ 3x^2-2xy+y^2-x+y-1=0 \end{cases}$

［1］の解法：計算の便宜上 $\begin{cases} F=2x^2-4xy-2y^2-2x+2y+2=0 \\ G=6x^2-4xy+2y^2-2x+2y-2=0 \end{cases}$ とする

$$\begin{vmatrix} 2+6\lambda & -2-2\lambda & -1-\lambda \\ -2-2\lambda & -2+2\lambda & 1+\lambda \\ -1-\lambda & 1+\lambda & 2-2\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(3\lambda+1) & -2(\lambda+1) & -(\lambda+1) \\ -2(\lambda+1) & 2(\lambda-1) & \lambda+1 \\ -(\lambda+1) & \lambda+1 & -2(\lambda-1) \end{vmatrix}$$

$=-4(\lambda-1)(5\lambda^2-6\lambda-3)=0$ より

$\lambda=1$

$\frac{1}{2}(F+G)=\frac{1}{2}F+\frac{1}{2}G=(x^2-2xy-y^2-x+y+1)+(3x^2-2xy+y^2-x+y-1)$

$=4x^2-4xy-2x+2y$

$=2\{2x^2-(2y+1)x+y\}=2(2x-1)(x-y)=0$ より

$$\begin{cases} 2x-1=0 \\ 3x^2-2xy+y^2-x+y-1=0 \end{cases} \quad x=\frac{1}{2} \quad y^2-\frac{3}{4}=0 \quad y=\frac{\pm\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=0 \\ 3x^2-2xy+y^2-x+y-1=0 \end{cases} \quad x=y \quad 2y^2-1=0 \quad y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \begin{cases} x=-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y=-\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

[2] の解法：

$$\begin{cases} x^2-(2y+1)x-(y^2-y-1)=0 & A=1 \quad B=-(2y+1) \quad C=-(y^2-y-1) \\ 3x^2-(2y+1)x+(y^2+y-1)=0 & L=3 \quad M=-(2y+1) \quad N=y^2+y-1 \end{cases}$$

$CL-AN=-3(y^2-y-1)-(y^2+y-1)=-2(2y^2-y-2)$

$BL-AM=-3(2y+1)+(2y+1)=-2(2y+1)$

$A(CL-AN)^2-B(CL-AN)(BL-AM)+C(BL-AM)^2$

$=4(2y^2-y-2)^2+4(2y+1)^2(2y^2-y-2)-4(y^2-y-1)(2y+1)^2$

$=4(8y^4-10y^2+3)$

$=4(2y^2-1)(4y^2-3)=0$ より $y=\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}$

このそれぞれのyの値をもとの方程式に代入して共通根を求めるのは厄介である。そこで次の便法を用いる。

両方程式の共通根は下の式から上の3倍を引いた式，即ち

$2(2y+1)x+2(2y^2-y-2)=0$ を満たさなければならない。

従って $x=-\frac{2y^2-y-2}{2y+1}=\frac{1}{2y+1}+1-y$ を満たさねばならない。

◎ $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，$x=\frac{1}{2\times\frac{1}{\sqrt{2}}+1}+1-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

◎ $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，$x=\frac{1}{2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+1}+1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\begin{cases} x=-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y=-\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

◎ $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，$x=\frac{1}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+1}+1-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}$ $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

◎ $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，$x=\frac{1}{2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1}+1-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{2}$ $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

[4] の解法：上の式と下の式を加えると

$4x^2-4xy-2x+2y=0 \quad 2(2x-1)y=2(2x-1)x$

$2x-1\neq 0$ のとき $y=\frac{2x-1}{2x-1}x=x$

これを上の式に代入すると $-2x^2+1=0 \quad x^2=\frac{1}{2} \quad x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \begin{cases} x=-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y=-\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

$2x-1=0$ のとき $x=\frac{1}{2}$ 上の式に代入すると $-y^2+\frac{3}{4}=0 \quad y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

2.5 例題

$\begin{cases} x^2+xy+y^2-y=0 \\ 2x^2+xy+y^2+2x=0 \end{cases}$

[1] の解法：計算の便宜上 $\begin{cases} F=2x^2+2xy+2y^2-2y=0 \\ G=4x^2+2xy+2y^2+4x=0 \end{cases}$ とする

$$\begin{vmatrix} 2+4\lambda & 1+\lambda & 0+2\lambda \\ 1+\lambda & 2+2\lambda & -1+0\lambda \\ 0+2\lambda & -1+0\lambda & 0+0\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(2\lambda+1) & \lambda+1 & 2\lambda \\ \lambda+1 & 2(\lambda+1) & -1 \\ 2\lambda & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$=-2(2\lambda+1)(2\lambda^2+2\lambda+1)=0$ より

$\lambda=-\frac{1}{2}$

$F-\frac{1}{2}G=(2x^2+2xy+2y^2-2y)-(2x^2+xy+y^2+2x)$

$=xy+y^2-2x-2y=(y-2)x+(y-2)y$

$=(y-2)(x+y)=0$ より

$\begin{cases} y-2=0 \\ 2x^2+xy+y^2+2x=0 \end{cases}$ $y=2 \quad 2x^2+4x+4=0 \quad 2(x^2+2x+2)=0$

$\begin{cases} x=-1+i \\ y=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-1-i \\ y=2 \end{cases}$

$\begin{cases} y+x=0 \\ 2x^2+xy+y^2+2x=0 \end{cases}$ $y=-x \quad 2x^2+2x=0 \quad 2x(x+1)=0$

$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$

[2]の解法：

$\begin{cases} x^2+yx+y(y-1)=0 & A=1 \quad B=y \quad C=y(y-1) \\ 2x^2+(y+2)x+y^2=0 & L=2 \quad M=y+2 \quad N=y^2 \end{cases}$

$CL-AN=2y(y-1)-y^2=y(y-2)$

$BL-AM=2y-(y+2)=y-2$

$A(CL-AN)^2-B(CL-AN)(BL-AM)+C(BL-AM)^2$

$=y^2(y-2)^2-y^2(y-2)^2+y(y-1)(y-2)^2$

$=y(y-1)(y-2)^2=0$ より $y=0,1,2$

$y=0$ のとき $\begin{cases} x^2=0 \\ 2x^2+2x=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=0 \\ 2x(x+1)=0 \end{cases}$

共通根 $x=0$ 得られる解 $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

$y=1$ のとき $\begin{cases} x^2+x=0 \\ 2x^2+3x+1=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x(x+1)=0 \\ (x+1)(2x+1)=0 \end{cases}$

共通根 $x=-1$ 得られる解 $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$

$y=2$ のとき $\begin{cases} x^2+2x+2=0 \\ 2x^2+4x+4=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+2x+2=0 \\ 2(x^2+2x+2)=0 \end{cases}$

共通根 $x=-1\pm i$ 得られる解 $\begin{cases} x=-1+i \\ y=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1-i \\ y=2 \end{cases}$

[4]の解法：下の式から上の式を引くと

$x^2+2x+y=0 \quad y=-x(x+2)$

上の式を $x^2+(x-1)y+y^2=0$ とおいて代入すると

$x^2-(x-1)x(x+2)+x^2(x+2)^2=0 \quad x^4+3x^3+4x^2+2x=0$

$x(x+1)(x^2+2x+2)=0 \quad x=0,-1,-1\pm i$

$x=0$ のとき $y=0$ $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

$x=-1$ のとき $y=1$ $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$

$x=-1+i$ のとき $y=-(-1+i)(1+i)=2$ $\begin{cases} x=-1+i \\ y=2 \end{cases}$

$x=-1-i$ のとき $y=-(-1-i)(1-i)=2$ $\begin{cases} x=-1-i \\ y=2 \end{cases}$

2.6 例題6

$\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=12 \\ x^2+2xy-3y^2=32 \end{cases}$

[1]の解法：計算の便宜上 $\begin{cases} F=2x^2-6xy+4y^2-24=0 \\ G=x^2+2xy-3y^2-32=0 \end{cases}$ とする

$$\begin{vmatrix} 2+\lambda & -3+\lambda & 0+0\lambda \\ -3+\lambda & 4-3\lambda & 0+0\lambda \\ 0+0\lambda & 0+0\lambda & -24-32\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+2 & \lambda-3 & 0 \\ \lambda-3 & -(3\lambda-4) & 0 \\ 0 & 0 & -8(4\lambda+3) \end{vmatrix}$$

$=8(2\lambda-1)^2(4\lambda+3)=0$ より

$\lambda=\frac{1}{2},\ -\frac{3}{4}$

◎$\lambda=\frac{1}{2}$のとき，$2(F+\frac{1}{2}G)=2F+G=(4x^2-12xy+8y^2-48)+(x^2+2xy-3y^2-32)$

$=5x^2-10xy+5y^2-80=5(x^2-2xy+y^2-16)=5\{(x-y)^2-16\}$

$=5(x-y-4)(x-y+4)=0$

◎$\lambda=-\frac{3}{4}$のとき，$4(F-\frac{3}{4}G)=4F-3G=(8x^2-24xy+16y^2-96)-(3x^2+6xy-9y^2-96)$

$=5x^2-30xy+25y^2=5(x^2-6xy+5y^2)=5(x-y)(x-5y)=0$

□$\lambda=\frac{1}{2}$と$\lambda=-\frac{3}{4}$を組み合わせると次の四組の連立方程式を解くことになる。

$\begin{cases}x-y-4=0\\x-y=0\end{cases}\begin{cases}x-y-4=0\\x-5y=0\end{cases}\begin{cases}x-y+4=0\\x-y=0\end{cases}\begin{cases}x-y+4=0\\x-5y=0\end{cases}$

これらを解くことにより次の二組の解を得る

$\begin{cases}x=5\\y=1\end{cases}\begin{cases}x=-5\\y=-1\end{cases}$

[2]の解法：

$\begin{cases}x^2-3yx+2(y^2-6)=0 & A=1\quad B=-3y\quad C=2(y^2-6)\\x^2-2yx-(3y^2+32)=0 & L=1\quad M=2y\quad N=-(3y^2-32)\end{cases}$

$CL-AN=2(y^2-6)+(3y^2+32)=5(y^2+4)$

$BL-AM=-3y-2y=-5y$

$A(CL-AN)^2-B(CL-AN)(BL-AM)+C(BL-AM)^2$

$=25(y^2+4)^2-75y^2(y^2+4)+50y^2(y^2-6)$

$=-400(y^2-1)=-400(y-1)(y+1)=0$ より $y=1,\ -1$

$y=1$のとき $\begin{cases}x^2-3x-10=0\\x^2+2x-35=0\end{cases}\begin{cases}(x-5)(x+2)=0\\(x-5)(x+7)=0\end{cases}$ 共通根$x=5$得られる解 $\begin{cases}x=5\\y=1\end{cases}$

$y=-1$のとき $\begin{cases}x^2+3x-10=0\\x^2-2x-35=0\end{cases}\begin{cases}(x+5)(x-2)=0\\(x+5)(x-7)=0\end{cases}$ 共通根$x=-5$得られる解 $\begin{cases}x=-5\\y=-1\end{cases}$

[4]の解法：下の式から上の式を引くと

$5xy-5y^2=20\quad xy=y^2+4$

これは$y=0$では成り立たぬから$y\neq0$として$x=\frac{y^2+4}{y}$

これを上の式に代入すると$\frac{(y^2+4)^2}{y^2}-3(y^2+4)+2y^2=12$

$(y^2+4)^2-3y^2(y^2+4)+2y^4-12y^2=0\quad -16y^2+16=0\quad y^2=1$

$y=1$のとき$x=\frac{1+4}{1}=5\quad \begin{cases}x=5\\y=1\end{cases}$

$y=-1$のとき $x=\frac{1+4}{-1}=-5\quad \begin{cases}x=-5\\y=-1\end{cases}$

2.7 例題7

$\begin{cases}x^2+7xy+15y^2=2y\\xy=1-4y\end{cases}$

[1]の解法：計算の便宜上 $\begin{cases}F=2x^2+14xy+30y^2-4y=0\\G=2xy+8y-2=0\end{cases}$

$$\begin{vmatrix} 2+0\lambda & 7+\lambda & 0+0\lambda \\ 7+\lambda & 30+0\lambda & -2+4\lambda \\ 0+0\lambda & -2+4\lambda & 0-2\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & \lambda+7 & 0 \\ \lambda+7 & 30 & 2(2\lambda-1) \\ 0 & 2(2\lambda-1) & -2\lambda \end{vmatrix}$$

$=2(\lambda^3-2\lambda^2+5\lambda-4)=2(\lambda-1)(\lambda^2-\lambda+4)=0$ より $\lambda=1$

$\frac{1}{2}(F+G)=\frac{1}{2}F+\frac{1}{2}G=(x^2+7xy+15y^2-2y)+(xy+4y-1)$

$=x^2+8xy+15y^2+2y-1=x^2+8yx+(5y-1)(3y+1)$

$=\{x+(5y-1)\}\{x+(3y+1)\}=(x+5y-1)(x+3y+1)=0$ より

$\begin{cases} x+5y-1=0 \\ xy+4y-1=0 \end{cases}$ $x=1-5y$ $-5y^2+5y-1=0$ $5y^2-5y+1=0$

$y=\frac{5\pm\sqrt{25-20}}{10}=\frac{5\pm\sqrt{5}}{10}$ $x=1-5\times\frac{5\pm\sqrt{5}}{10}=-\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ $\begin{cases} x=-\frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ y=\frac{5+\sqrt{5}}{10} \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ y=\frac{5-\sqrt{5}}{10} \end{cases}$

$\begin{cases} x+3y+1=0 \\ xy+4y-1=0 \end{cases}$ $x=-3y-1$ $-3y^2+3y-1=0$ $3y^2-3y+1=0$

$y=\frac{3\pm\sqrt{9-12}}{6}=\frac{3\pm\sqrt{3}i}{6}$, $x=-3\times\frac{3\pm\sqrt{3}i}{6}-1=-\frac{5\pm\sqrt{3}i}{2}$ $\begin{cases} x=-\frac{5+\sqrt{3}i}{2} \\ y=\frac{3\pm\sqrt{3}i}{6} \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\frac{5-\sqrt{3}i}{2} \\ y=\frac{3-\sqrt{3}i}{6} \end{cases}$

[3]の解法: $\begin{cases} x^2+7yx+y(15y-2)=0 \\ yx+(4y-1)=0 \end{cases}$

終結式 $\begin{vmatrix} 1 & 7y & y(15y-2) \\ y & 4y-1 & 0 \\ 0 & y & 4y-1 \end{vmatrix}=15y^4-30y^3+23y^2-8y+1$

$=(5y^2-5y+1)(3y^2-3y+1)=0$ より $y=\frac{5\pm\sqrt{5}}{10}$ $y=\frac{3\pm\sqrt{3}i}{6}$

これらの各 y の値に対して，与えられた二つの方程式は共通根としての x の値をもつが，それは当然下の x に関する一次方程式を満たすから $x=\frac{1-4y}{y}=\frac{1}{y}-4$ としてストレートに x を求めればよい。

◎ $y=\frac{5+\sqrt{5}}{10}$ のとき

$\frac{1}{y}=\frac{10}{5+\sqrt{5}}=\frac{10(5-\sqrt{5})}{25-5}=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ $x=\frac{5-\sqrt{5}}{2}-4=-\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

$$\begin{cases} x=-\frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ y=\frac{5+\sqrt{5}}{10} \end{cases}$$

◎ $y=\frac{5-\sqrt{5}}{10}$ のとき

$\frac{1}{y}=\frac{10}{5-\sqrt{5}}=\frac{10(5+\sqrt{5})}{25-5}=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$ $x=\frac{5+\sqrt{5}}{2}-4=-\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

$$\begin{cases} x=-\frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ y=\frac{5-\sqrt{5}}{10} \end{cases}$$

◎ $y=\dfrac{3+\sqrt{3}i}{6}$ のとき $\dfrac{1}{y}=\dfrac{6}{3+\sqrt{3}i}=\dfrac{6(3-\sqrt{3}i)}{9+3}=\dfrac{3-\sqrt{3}i}{2}$　$x=\dfrac{3-\sqrt{3}i}{2}-4=-\dfrac{5+\sqrt{3}i}{2}$

$$\begin{cases} x=-\dfrac{5+\sqrt{3}i}{2} \\ y=\dfrac{3+\sqrt{3}i}{6} \end{cases}$$

◎ $y=\dfrac{3-\sqrt{3}i}{6}$ のとき $\dfrac{1}{y}=\dfrac{6}{3-\sqrt{3}i}=\dfrac{6(3+\sqrt{3}i)}{9+3}=\dfrac{3+\sqrt{3}i}{2}$　$x=\dfrac{3+\sqrt{3}i}{2}-4=-\dfrac{5-\sqrt{3}i}{2}$

$$\begin{cases} x=-\dfrac{5-\sqrt{3}i}{2} \\ y=\dfrac{3-\sqrt{3}i}{6} \end{cases}$$

［4］の解法：下の式は当然 $y=0$ では成り立たないから $y=\neq 0$ として $x=\dfrac{1-4y}{y}$ これを上の式に代入すると $\dfrac{(1-4y)^2}{y^2}+7(1-4y)+15y^2=2y$

$\therefore (1-4y)^2+7y^2(1-4y)+15y^4-2y^3=0$

$15y^4-30y^3+23y^2-8y+1=0$

これ以後は［3］の解法に同じ。

2.8　例題8

$$\begin{cases} x^2+2xy+2y^2+2x-2y+5=0 \\ 2x^2+2xy+y^2-2x+2y+5=0 \end{cases}$$

［1］の解法：$\begin{cases} F=x^2+2xy+2y^2+2x-2y+5=0 \\ G=2x^2+2xy+y^2-2x+2y+5=0 \end{cases}$ とする

$$\begin{vmatrix} 1+2\lambda & 1+\lambda & 1-\lambda \\ 1+\lambda & 2+\lambda & -1+\lambda \\ 1-\lambda & -1+\lambda & 5+5\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\lambda+1 & \lambda+1 & -(\lambda-1) \\ \lambda+1 & \lambda+2 & \lambda-1 \\ -(\lambda-1) & \lambda-1 & 5(\lambda+1) \end{vmatrix}$$

$=25\lambda(\lambda+1)=0$ より

$\lambda=0,\ -1$

◎ $\lambda=0$ のとき，$F+0G=F=x^2+2(y+1)x+(2y^2-2y+5)=0$ より

$x=-(y+1)\pm\sqrt{(y+1)^2-(2y^2-2y+5)}=-(y+1)\pm\sqrt{-(y^2-4y+4)}$

$=-(y+1)\pm\sqrt{-(y-2)^2}=-(y+1)\pm(y-2)i=-(1\mp i)y-(1\pm 2i)$

よって $F=[x+\{(1-i)y+(1+2i)\}][x+\{(1+i)y+(1-2i)\}]$

$=\{x+(1-i)y+(1+2i)\}\{x+(1+i)y+(1-2i)\}=0$

◎ $\lambda=-1$ のとき，$F-G=(x^2+2xy+2y^2+2x-2y+5)-(2x^2+2xy+y^2-2x+2y+5)$

$=-x^2+y^2+4x-4y=-\{x^2-4x-y(y-4)\}=-(x-y)\{x+(y-4)\}$

$=-(x-y)(x+y-4)=0$

□ $\lambda=0$ と $\lambda=-1$ を組み合わせると次の四組の連立方程式を解くことになる。

$\begin{cases} x+(1-i)y+(1+2i)=0 \\ x-y=0 \end{cases}$　$\begin{cases} x+(1-i)y+(1+2i)=0 \\ x+y-4=0 \end{cases}$　$\begin{cases} x+(1+i)y+(1-2i)=0 \\ x-y=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x+(1+i)y+(1-2i)=0 \\ x+y-4=0 \end{cases}$

よって $\begin{cases} x=-i \\ y=-i \end{cases}$ $\begin{cases} x=2+5i \\ y=2-5i \end{cases}$ $\begin{cases} x=i \\ y=i \end{cases}$ $\begin{cases} x=2-5i \\ y=2+5i \end{cases}$

［2］の解法：

$$\begin{cases} x^2+2(y+1)x+(2y^2-2y+5)=0 & A=1 \quad B=2(y+1) \quad C=2y^2-2y+5 \\ 2x^2+2(y-1)x+(y^2+2y+5)=0 & L=2 \quad M=2(y-1) \quad N=y^2+2y+5 \end{cases}$$

$CL-AN=2(2y^2-2y+5)-(y^2+2y+5)=3y^2-6y+5$

$BL-AM=4(y+1)-2(y-1)=2(y+3)$

$A(CL-AN)^2-B(CL-AN)(BL-AM)+C(BL-AM)^2$

$=(3y^2-6y+5)^2-4(y+1)(y+3)(3y^2-6y+5)+4(2y^2-2y+5)(y+3)^2$

$=5y^4-20y^3+150y^2-20y+145=5(y^4-4y^3+30y^2-4y+29)=5(y^2+1)(y^2-4y+29)=0$

より $y=\pm i,\ 2\pm 5i$

これらをそれぞれ上の二つの方程式に代入して，x の共通根を求めるのは厄介である。そこで以下の便法を考える。それぞれの y の値に対して，上の二つの方程式の共通根としての x の値は当然上の二つの方程式を満たすから，上の方程式の 2 倍から下の方程式を引いた $2(y+3)x+(3y^2-6y+5)=0$ を満たさなければならない。だからそれぞれの y の値から $x=\dfrac{6y-3y^2-5}{2(y+3)}$ として求めればよい。

$y=i$ のとき $x=\dfrac{6i+3-5}{2(i+3)}=i$ $\begin{cases} x=i \\ y=i \end{cases}$

$y=-i$ のとき $x=\dfrac{-6i+3-5}{2(-i+3)}=-i$ $\begin{cases} x=-i \\ y=-i \end{cases}$

$y=2+5i$ のとき $x=\dfrac{6(2+5i)-3(2+5i)^2-5}{2(2+5i+3)}=2-5i$ $\begin{cases} x=2-5i \\ y=2+5i \end{cases}$

$y=2-5i$ のとき $x=\dfrac{6(2-5i)-3(2-5i)^2-5}{2(2-5i+3)}=2+5i$ $\begin{cases} x=2+5i \\ y=2-5i \end{cases}$

［4］の解法：

上の式を 2 倍すると $2x^2+4xy+4y^2+4x-4y+10=0$

これから下の式を引くと $2xy+3y^2+6x-6y+5=0$

$2(y+3)x=-(3y^2-6y+5)$

$y=-3$ は左辺を 0 にして右辺を 0 にしないから成り立たない。

よって $y\neq -3$ で $x=-\dfrac{3y^2-6y+5}{2(y+3)}$

上の式を $x^2+2x(y+1)+2y^2-2y+5=0$ と変形して代入すると

$$\frac{(3y^2-6y+5)^2}{4(y+3)^2}-\frac{(3y^2-6y+5)(y+1)}{y+3}+2y^2-2y+5=0$$

よって $(3y^2-6y+5)^2-4(3y^2-6y+5)(y+1)(y+3)+4(2y^2-2y+5)(y+3)^2=0$

これ以後は［2］の解法と同じ。

2.9 例題 9

$$\begin{cases} x^2-2xy+3y^2+x-y-2=0 \\ x^2-2xy+3y^2+4x-4y-2=0 \end{cases}$$

［1］の解法：計算の便宜上 $\begin{cases} F=2x^2-4xy+6y^2+2x-2y-4=0 \\ G=x^2-2xy+3y^2+4x-4y-2=0 \end{cases}$ とする

$$\begin{vmatrix} 2+\lambda & -2-\lambda & 1+2\lambda \\ -2-\lambda & 6+3\lambda & -1-2\lambda \\ 1+2\lambda & -1-2\lambda & -4-2\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+2 & -(\lambda+2) & 2\lambda+1 \\ -(\lambda+2) & 3(\lambda+2) & -(2\lambda+1) \\ 2\lambda+1 & -(2\lambda+1) & -2(\lambda+2) \end{vmatrix}$$

$=6(\lambda+2)(2\lambda^2+4\lambda+3)=0$ より $\lambda=-2$

$\frac{1}{2}(F-2G)=\frac{1}{2}F-G=(x^2-2xy+3y^2+x-y-2)-(x^2-2xy+3y^2+4x-4y-2)$

$=-3x+3y=-3(x-y)=0$

$$\begin{cases} x-y=0 \\ x^2-2xy+3y^2+4x-4y-2=0 \end{cases}$$

$x=y \quad 2y^2-2=2(y-1)(y+1)=0$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$$

［2］の解法：

$$\begin{cases} x^2-(2y-1)x+(3y+2)(y-1)=0 & A=1 \quad B=-(2y-1) \quad C=(3y+2)(y-1) \\ x^2-2(y-2)x+(3y^2-4y-2)=0 & L=1 \quad M=-2(y-2) \quad N=3y^2-4y-2 \end{cases}$$

$CL-AN=(3y+2)(y-1)-(3y^2-4y-2)=3y$

$BL-AM=-(2y-1)+2(y-2)=-3$

$A(CL-AN)^2-B(CL-AN)(BL-AM)+C(BL-AM)^2$

$=9y^2-9y(2y-1)+9(3y+2)(y-1)$

$=18(y-1)(y+1)=0$ より $y=1,-1$

$y=1$ のとき $\begin{cases} x^2-x=0 \\ x^2+2x-3=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x(x-1)=0 \\ (x-1)(x+3)=0 \end{cases}$ 共通根は $x=1$ 得られる解 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

$y=-1$ のとき $\begin{cases} x^2+3x+2=0 \\ x^2+6x+5=0 \end{cases}$ $\begin{cases} (x+1)(x+2)=0 \\ (x+1)(x+5)=0 \end{cases}$ 共通根は $x=-1$ 得られる解 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$

［4］の解法：

下の式から上の式を引くと $3x-3y=0 \quad x=y$

それ以後は［1］の解法と同じ

2.10 例題10

$$\begin{cases} 3xy+7x+3y-1=0 \\ 5xy-3x-5y+3=0 \end{cases}$$

［1］の解法：計算の便宜上 $\begin{cases} F=6xy+14x+6y-2=0 \\ G=10xy-6x-10y+6=0 \end{cases}$ とする

$$\begin{vmatrix} 0+0\lambda & 3+5\lambda & 7-3\lambda \\ 3+5\lambda & 0+0\lambda & 3-5\lambda \\ 7-3\lambda & 3-5\lambda & -2+6\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5\lambda+3 & -(3\lambda-7) \\ 5\lambda+3 & 0 & -(5\lambda-3) \\ -(3\lambda-7) & -(5\lambda-3) & 2(3\lambda-1) \end{vmatrix}$$

$=-48(5\lambda+3)(2\lambda-1)=0$ より

$\lambda=-\frac{3}{5},\frac{1}{2}$

◎ $\lambda=-\frac{3}{5}$ のとき $\frac{5}{2}\left(F-\frac{3}{5}G\right)=\frac{5}{2}F-\frac{3}{2}G=(15xy+35x+15y-5)-(15xy-9x-15y+9)$

$=44x+30y-14=2(22x+15y-7)=0$

◎ $\lambda=\frac{1}{2}$ のとき $F+\frac{1}{2}G=(6xy+14x+6y-2)+(5xy-3x-5y+3)=11xy+11x+y+1$

$=(11x+1)(y+1)=0$

□ $\lambda=-\frac{3}{5}$ と $\lambda=\frac{1}{2}$ を組み合わせると次の連立方程式を解くことになる。

$\begin{cases} 22x+15y-7=0 \\ 11x+1=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 22x+15y-7=0 \\ y+1=0 \end{cases}$

根は $\begin{cases} x=-\dfrac{1}{11} \\ y=\dfrac{3}{5} \end{cases}$ $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$

[3] の解法: $\begin{cases} (3y+7)x+(3y-1)=0 \\ (5y-3)x-(5y-3)=0 \end{cases}$

終結式 $\begin{vmatrix} 3y+7 & 3y-1 \\ 5y-3 & -(5y-3) \end{vmatrix}=-6(5y-3)(y+1)=0$ より $y=\dfrac{3}{5}, -1$

$y=\dfrac{3}{5}$ のとき $\begin{cases} \dfrac{44}{5}x+\dfrac{4}{5}=0 \\ 0x-0=0 \end{cases}$ 共通根は $x=-\dfrac{1}{11}$ 得られる解 $\begin{cases} x=-\dfrac{1}{11} \\ y=\dfrac{3}{5} \end{cases}$

$y=-1$ のとき $\begin{cases} 4x-4=0 \\ -8x+8=0 \end{cases}$ 共通根は $x=1$ 得られる解 $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$

[4] の解法:

下の式より $5(x-1)y=3(x-1)$ $x-1\neq 0$ のとき, $y=\dfrac{3(x-1)}{5(x-1)}=\dfrac{3}{5}$

これを上の式に代入すると $\dfrac{44}{5}x+\dfrac{4}{5}=0$ $x=-\dfrac{1}{11}$ $\begin{cases} x=-\dfrac{1}{11} \\ y=\dfrac{3}{5} \end{cases}$

$x-1=0$ のとき $x=1$ これを上の式に代入すると $6y+6=0$ $y=-1$ $\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$

2.11 例題11

$\begin{cases} xy+5x-5y-1=0 \\ xy-5x+5y-1=0 \end{cases}$

[1] の解法: 計算の便宜上 $\begin{cases} F=2xy+10x-10y-2=0 \\ G=2xy-10x+10y-2=0 \end{cases}$ とする

$$\begin{vmatrix} 0+0\lambda & 1+\lambda & 5-5\lambda \\ 1+\lambda & 0+0\lambda & -5+5\lambda \\ 5-5\lambda & -5+5\lambda & -2-2\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \lambda+1 & -5(\lambda-1) \\ \lambda+1 & 0 & 5(\lambda-1) \\ -5(\lambda-1) & 5(\lambda-1) & -2(\lambda+1) \end{vmatrix}$$

$=-8(3\lambda-2)(2\lambda-3)(\lambda+1)=0$ より

$\lambda=\dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{2}, -1$

◎ $\lambda=\dfrac{2}{3}$ のとき $\dfrac{3}{2}\left(F+\dfrac{2}{3}G\right)=\dfrac{3}{2}F+G=(3xy+15x-15y-3)+(2xy-10x+10y-2)$
$=5xy+5x-5y-5=5(xy+x-y-1)=5(x-1)(y+1)=0$

◎ $\lambda=\dfrac{3}{2}$ のとき $F+\dfrac{3}{2}G=(2xy+10x-10y-2)+(3xy-15x+15y-3)=5xy-5x+5y-5$
$=5(xy-x+y-1)=5(x+1)(y-1)=0$

◎ $\lambda=-1$ のとき $\dfrac{1}{2}(F-G)=\dfrac{1}{2}F-\dfrac{1}{2}G=(xy+5x-5y-1)-(xy-5x+5y-1)=10x-10y$
$=10(x-y)=0$

□ $\lambda=\dfrac{2}{3}$ と $\lambda=\dfrac{3}{2}$ を組み合わせると次の四組の連立方程式を解くことになる。

$\begin{cases} x-1=0 \\ x+1=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x-1=0 \\ y-1=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y+1=0 \\ x+1=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y+1=0 \\ y-1=0 \end{cases}$

これらより求まる解は $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

□$\lambda=\dfrac{2}{3}$と$\lambda=-1$を組み合わせる方法

□$\lambda=\dfrac{3}{2}$と$\lambda=-1$を組み合わせる方法

いずれも同じ解 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$ を得る

［3］の解法：$\begin{cases} (y+5)x-(5y+1)=0 \\ (y-5)x+(5y-1)=0 \end{cases}$

終結式 $\begin{vmatrix} y+5 & -(5y+1) \\ y-5 & 5y-1 \end{vmatrix}=10(y-1)(y+1)=0$ より $y=1, -1$

$y=1$ のとき $\begin{cases} 6x-6=0 \\ -4x+4=0 \end{cases}$

共通根は $x=1$ 得られる解 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

$y=-1$ のとき $\begin{cases} 4x+4=0 \\ -6x-6=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 4(x+1)=0 \\ -6(x+1)=0 \end{cases}$

共通根は $x=-1$ 得られる解 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$

［4］の解法：

上の式から $(y+5)x=5y+1$ 　$y=-5$ のとき左辺が0で右辺が0でないから成り立たない。

だから $y\neq-5$ としてよい。$x=\dfrac{5y+1}{y+5}$ これを下の式を $(y-5)x+5y-1=0$ と変形して代入すると $(y-5)\dfrac{5y+1}{y+5}+5y-1=0$ 　$(y-5)(5y+1)+(y+5)(5y-1)=0$ 　$10y^2-10=0$ 　$y^2=1$ 　$y=\pm1$

$y=1$ のとき $x=\dfrac{5+1}{1+5}=1$ $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

$y=-1$ のとき $x=\dfrac{-5+1}{-1+5}=-1$ $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$

2.12 例題12

$$\begin{cases} x^2+y^2=3 \\ x^2+3y^2=1 \end{cases}$$

［1］の解法：$\begin{cases} F=x^2+y^2-3=0 \\ G=x^2+3y^2-1=0 \end{cases}$ とする

$$\begin{vmatrix} 1+\lambda & 0+0\lambda & 0+0\lambda \\ 0+0\lambda & 1+3\lambda & 0+0\lambda \\ 0+0\lambda & 0+0\lambda & -3-\lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & 0 \\ 0 & 3\lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & -(\lambda+3) \end{vmatrix}$$

$=-(3\lambda+1)(\lambda+1)(\lambda+3)=0$ より

$\lambda=-\dfrac{1}{3}, -1, -3$

◎$\lambda=-\dfrac{1}{3}$ のとき $3(F-\dfrac{1}{3}G)=3F-G=(3x^2+3y^2-9)-(x^2+3y^2-1)=2x^2-8=2(x-2)(x+2)=0$

◎$\lambda=-1$ のとき $F-G=(x^2+y^2-3)-(x^2+3y^2-1)=-2y^2-2=-2(y^2+1)=-2(y-i)(y+i)=0$

◎$\lambda=-3$ のとき $F-3G=(x^2+y^2-3)-(3x^2+9y^2-3)=-2x^2-8y^2=-2(x^2+4y^2)=-2(x-2iy)(x+2iy)=0$

□$\lambda=-\dfrac{1}{3}$ と $\lambda=-1$ を組み合わせると次の四組の連立方程式を解くことになる。

$\begin{cases} x-2=0 \\ y-i=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x-2=0 \\ y+i=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x+2=0 \\ y-i=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x+2=0 \\ y+i=0 \end{cases}$

これらより求まる根は $\begin{cases} x=2 \\ y=i \end{cases}$ $\begin{cases} x=2 \\ y=-i \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2 \\ y=i \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2 \\ y=-i \end{cases}$

□$\lambda=-\frac{1}{3}$ と $\lambda=-3$ を組み合わせる方法
□$\lambda=-1$ と $\lambda=-3$ を組み合わせる方法
いずれも同じ解を得る

［2］の解法：

$\begin{cases} x^2+(y^2-3)=0 & A=1 \quad B=0 \quad C=y^2-3 \\ x^2+(3y^2-1)=0 & L=1 \quad M=0 \quad N=3y^2-1 \end{cases}$

$CL-AN=(y^2-3)-(3y^2-1)=-2(y^2+1)$

$BL-AM=0$

$A(CL-AN)^2-B(CL-AN)(BL-AM)+C(BL-AM)^2$

$=4(y^2+1)^2=0$ より $y=i, -i$

$y=i$ のとき $\begin{cases} x^2-4=0 \\ x^2-4=0 \end{cases}$ $\begin{cases} (x-2)(x+2)=0 \\ (x-2)(x+2)=0 \end{cases}$ 共通根は $x=2, -2$

得られる解 $\begin{cases} x=2 \\ y=i \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2 \\ y=i \end{cases}$

$y=-i$ のとき $\begin{cases} x^2-4=0 \\ x^2-4=0 \end{cases}$ 上と同様にして得られる解 $\begin{cases} x=2 \\ y=-i \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2 \\ y=-i \end{cases}$

［4］の解法：

下の式から上の式を引くと $2y^2=-2$　$y^2=-1$ これを上，下どちらの式に代入しても $x^2=4$

そして，全ての解は $\begin{cases} x=2 \\ y=i \end{cases}$ $\begin{cases} x=2 \\ y=-i \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2 \\ y=i \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2 \\ y=-i \end{cases}$

2.13　例題13

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x+2y+1=0 \\ x^2+y^2-2x-2y+1=0 \end{cases}$$

［1］の解法：$\begin{cases} F=x^2+y^2+2x+2y+1=0 \\ G=x^2+y^2-2x-2y+1=0 \end{cases}$ とおく

$$\begin{vmatrix} 1+\lambda & 0+0\lambda & 1-\lambda \\ 0+0\lambda & 1+\lambda & 1-\lambda \\ 1-\lambda & 1-\lambda & 1+\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & -(\lambda-1) \\ 0 & \lambda+1 & -(\lambda-1) \\ -(\lambda-1) & -(\lambda-1) & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$=-(\lambda+1)(\lambda^2-6\lambda+1)=0$ より

$\lambda=-1$

$F-G=(x^2+y^2+2x+2y+1)-(x^2+y^2-2x-2y+1)=4(x+y)=0$ より

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x^2+y^2-2x-2y+1=0 \end{cases}$$

$x=-y$　$2y^2+1=0$　$y^2=-\frac{1}{2}$　$y=\pm\frac{i}{\sqrt{2}}$

得られる解は $\begin{cases} x=\frac{i}{\sqrt{2}} \\ y=-\frac{i}{\sqrt{2}} \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\frac{i}{\sqrt{2}} \\ y=\frac{i}{\sqrt{2}} \end{cases}$

［2］の解法：

$$\begin{cases} x^2+2x+(y+1)^2=0 & A=1 \quad B=2 \quad C=(y+1)^2 \\ x^2-2x+(y-1)^2=0 & L=1 \quad M=-2 \quad N=(y-1)^2 \end{cases}$$

$CL-AN=(y+1)^2-(y-1)^2=4y$

$BL-AM=2-(-2)=4$

$A(CL-AN)^2-B(CL-AN)(BL-AM)+C(BL-AM)^2$

$=16y^2-32y+16(y+1)^2=32y^2+16=16(2y^2+1)=0$ より $2y^2+1=0 \quad y^2=-\dfrac{1}{2} \quad y=\pm\dfrac{i}{\sqrt{2}}$

ここで y の一つ一つを上の方程式に代入して共通根を求めるのは厄介である。ここで便法を用いる。上の方程式の共通根は上の式から下の式を引いた方程式 $4x+(y+1)^2-(y-1)^2=0$ を満たす。即ち $4x=(y-1)^2-(y+1)^2=-4y$ を満たすから $x=-y$ である。だから

$y=\dfrac{i}{\sqrt{2}}$ のとき $x=-\dfrac{i}{\sqrt{2}}$ $\begin{cases} x=-\dfrac{i}{\sqrt{2}} \\ y=\dfrac{i}{\sqrt{2}} \end{cases}$ $y=-\dfrac{i}{\sqrt{2}}$ のとき $x=\dfrac{i}{\sqrt{2}}$ $\begin{cases} x=\dfrac{i}{\sqrt{2}} \\ y=-\dfrac{i}{\sqrt{2}} \end{cases}$

［4］の解法：

上の式から下の式を引くと $4x+4y=4(x+y)=0 \quad x=-y$ 以下は［1］の解法と同じ事になる。

2.14 例題14

$$\begin{cases} 2x^2+xy-y^2-4x-y+2=0 \\ x^2-y^2+2y-1=0 \end{cases}$$

［1］の解法：計算の便宜上 $\begin{cases} F=4x^2+2xy-2y^2-8x-2y+4=0 \\ G=x^2-y^2+2y-1=0 \end{cases}$ とする。

$$\begin{vmatrix} 4+\lambda & 1+0\lambda & -4+0\lambda \\ 1+0\lambda & -2-\lambda & -1+\lambda \\ -4+0\lambda & -1+\lambda & 4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+4 & 1 & -4 \\ 1 & -(\lambda+2) & \lambda-1 \\ -4 & \lambda-1 & -(\lambda-4) \end{vmatrix}$$

これは λ の如何を問わず，恒等的に 0 になる。だから λ が何であっても $F+\lambda G$ は一次式に分解される。

◎ $\lambda=-2$ にすると $\dfrac{1}{2}(F-2G)=\dfrac{1}{2}F-G=(2x^2+xy-y^2-4x-y+2)-(x^2-y^2+2y-1)$

$=x^2+xy-4x-3y+3=x^2+(y-4)x-3(y-1)=(x-3)\{x+(y-1)\}=(x-3)(x+y-1)=0$

◎ $\lambda=-4$ にすると $\dfrac{1}{2}(F-4G)=\dfrac{1}{2}F-2G=(2x^2+xy-y^2-4x-y+2)-(2x^2-2y^2+4y-2)$

$=xy+y^2-4x-5y+4=(y-4)x+(y-4)(y-1)=(y-4)\{x+(y-1)\}=(y-4)(x+y-1)=0$

□ $\lambda=-2$ と $\lambda=-4$ を組み合わせると次の四組の連立方程式を解くことになる。

$\begin{cases} x-3=0 \\ y-4=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x-3=0 \\ x+y-1=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y-1=0 \\ y-4=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y-1=0 \\ x+y-1=0 \end{cases}$

これらより $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$ $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-3 \\ y=4 \end{cases}$ 直線 $x+y-1=0$ 上の全ての点

ところが $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$ 及び $\begin{cases} x=-3 \\ y=4 \end{cases}$ は $x+y-1=0$ 上の点である。

$x+y-1=0$ において，$y=t$ とおけば $x=1-y=1-t$ だから $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で表される。

以上より全ての解は $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$ 及び $\begin{cases} x=1-t \\ y=t \end{cases}$

[2]の解法：

$$\begin{cases} 2x^2+(y-4)x-(y+2)(y-1)=0 \\ x^2-(y-1)^2=0 \end{cases}$$

$A=2\quad B=y-4\quad C=-(y+2)(y-1)$

$L=1\quad M=0\quad N=-(y-1)^2$

$CL-AN=-(y+2)(y-1)+2(y-1)^2=(y-1)(y-4)$

$BL-AM=y-4$

$A(CL-AN)^2-B(CL-AN)(BL-AM)+C(BL-AM)^2$

$=2(y-1)^2(y-4)^2-(y-1)(y-4)^3-(y-1)(y-4)^2(y+2)=0$ は恒等的に0だから，y は何でも上の方程式が x としての共通根をもつ。さて，共通根は上の二つの式を満たすから当然上の式から下の式の2倍を引いた $(y-4)x-(y+2)(y-1)+2(y-1)^2=0$ を満たさなければならない。従って $(y-4)x=-(y-1)(y-4)$ である。

さて，y は何でも共通根としての x が存在するから $y=t$ とおく。

$t\neq 4$ ならば $(t-4)x=-(t-1)(t-4)$ より $x=-(t-1)=1-t$ よって，$t\neq 4$ ならば $\begin{cases} x=1-t \\ y=t \end{cases}$ が解である。

$t=4$ のときは別に考える。このとき $y=4$ をもとの方程式のそれぞれに入れると $\begin{cases} 2x^2-18=0 \\ x^2-9=0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2(x-3)(x+3)=0 \\ (x-3)(x+3)=0 \end{cases}$ 共通根は $x=3$ 及び $x=-3$

これから $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$ 及び $\begin{cases} x=-3 \\ y=4 \end{cases}$ が得られるが $\begin{cases} x=-3 \\ y=4 \end{cases}$ は $t=4$ として $\begin{cases} x=1-t \\ y=t \end{cases}$ に含まれてしまう。

以上より全ての解は $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$ 及び $\begin{cases} x=1-t \\ y=t \end{cases}$ (t は全ての実数)

[4]の解法：

上の式から下の式の2倍を引くと $xy+y^2-4x-5y+4=0$

$(y-4)x=-(y^2-5y+4)=-(y-4)(y-1)$

$y\neq 4$ のとき $x=-(y-1)=1-y$

これを上の式に入れても下の式に入れても恒等的に0になってしまう。だから直線 $x+y-1=0$ 上の点なら何でもよい。

即ち $\begin{cases} x=1-t \\ y=t \end{cases}$ (t は4以外の実数)

$y=4$ のとき下の式に代入すると $x^2-9=0$ で $x=\pm 3$

しかし $x=-3$ は $t=4$ のときの $1-4$ である。

よってすべての解は $\begin{cases} x=1-t \\ y=t \end{cases}$ (t は全ての実数) 及び $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$

2.15　例題15

$\begin{cases} 2x^2+2y^2=4 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$ この連立方程式は下の式を2倍すれば上の式が得られるから，

実質的には $x^2+y^2=2$ 一つしかないのと同じで原点中心，半径 $\sqrt{2}$ の円周上の全ての点である。

$\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos\theta \\ y=\sqrt{2}\sin\theta \end{cases}$ θ は任意　という表し方もできる。

2.16　例題16

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

この連立方程式は結局の所，$4 \neq 1$ なので解は存在しない。

二次曲線の交点について

私が今までに述べた各解法のどれが簡単なのかは問題によって異なるが，特に例題の1は答えが簡単なのに，計算をやり通すのは相当の忍耐が必要である。勝手に問題を作ったからといって容易に解けるとは限らない。中間に出てくる高々三次方程式や高々四次方程式がカルダンの解法やフェラリの解法に帰着する非常に難しい場合もある。多くの実例で明らかなように全部が実根の場合もあり，実根と虚根が混じっている場合もあり，全部が虚根の場合もある。虚実を含めて根が全くない場合もある。これらのことから，今までは見向きもされなかった二次曲線の虚の交点が脚光を浴びることになろう。

二つの二次曲線 $\begin{cases} F(x,y)=0 \\ G(x,y)=0 \end{cases}$ が実虚を含めて交点をもたないのは $F(x,y)+\lambda G(x,y)$ が二次の項，一次の項を全て消してしまい，0でない定数になるような λ が存在するときである。また0になってしまう場合は実質的に $G(x,y)=0$ の一つしかないのと同じ事で，$G(x,y)=0$ 上の全ての点が交点である。

三次方程式，四次方程式への応用

一元三次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ を解くには $x^2=y$ とおけば二元二次連立方程式
$\begin{cases} x^2-y=0 \\ axy+cx+by+d=0 \end{cases}$ 或は $\begin{cases} x^2-y=0 \\ bx^2+axy+cx+d=0 \end{cases}$ に帰着する。
一元四次方程式 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ を解くには $x^2=y$ とおけば二元二次連立方程式
$\begin{cases} x^2-y=0 \\ bxy+ay^2+dx+cy+e=0 \end{cases}$ 或は $\begin{cases} x^2-y=0 \\ cx^2+bxy+ay^2+dx+e=0 \end{cases}$ に帰着する。
二元二次連立方程式を解くのに，中間に高々三次方程式や高々四次方程式が登場するが，逆に三次方程式や四次方程式を解くのに二元二次連立方程式に帰着させる。どちらかで解ければよいが，下手をすれば循環論法に陥るかも知れない。

二元三次，二元四次方程式への挑戦

5.1　例題1

$$\begin{cases} x^3+x^2y+xy^2+y^3=1 \\ x^3+4xy^2+6y^3=2 \end{cases}$$

上の式の2倍から下の式を引くと $x^3+2x^2y-2xy^2-4y^3=0$

$(x-\sqrt{2}y)(x+\sqrt{2}y)(x+2y)=0$

$$\begin{cases} x-\sqrt{2}y=0 \\ x^3+4xy^2+6y^3=2 \end{cases}$$

$x=\sqrt{2}y \quad 6(\sqrt{2}+1)y^3=2 \quad y^3=\dfrac{1}{3(\sqrt{2}+1)}$

$$\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3(\sqrt{2}+1)}} \\ y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3(\sqrt{2}+1)}} \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}\,\omega}{\sqrt[3]{3(\sqrt{2}+1)}} \\ y=\dfrac{\omega}{\sqrt[3]{3(\sqrt{2}+1)}} \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}\,\omega^2}{\sqrt[3]{3(\sqrt{2}+1)}} \\ y=\dfrac{\omega^2}{\sqrt[3]{3(\sqrt{2}+1)}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+\sqrt{2}y=0 \\ x^3+4xy^2+6y^3=2 \end{cases}$$

$x=-\sqrt{2}y \quad 6(1-\sqrt{2})y^3=2 \quad y^3=-\dfrac{1}{3(\sqrt{2}+1)}$

$$\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3(\sqrt{2}-1)}} \\ y=-\dfrac{1}{\sqrt[3]{3(\sqrt{2}-1)}} \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}\,\omega}{\sqrt[3]{3(\sqrt{2}-1)}} \\ y=-\dfrac{\omega}{\sqrt[3]{3(\sqrt{2}-1)}} \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}\,\omega^2}{\sqrt[3]{3(\sqrt{2}-1)}} \\ y=-\dfrac{\omega^2}{\sqrt[3]{3(\sqrt{2}-1)}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y=0 \\ x^3+4xy^2+6y^3=2 \end{cases}$$

$x=-2y \quad 10y^3=2 \quad y^3=-\dfrac{1}{5}$

$$\begin{cases} x=\dfrac{2}{\sqrt[3]{5}} \\ y=-\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}} \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{2\omega}{\sqrt[3]{5}} \\ y=-\dfrac{\omega}{\sqrt[3]{5}} \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{2\omega^2}{\sqrt[3]{5}} \\ y=-\dfrac{\omega^2}{\sqrt[3]{5}} \end{cases}$$

5.2　例題2

$$\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=21 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases}$$

［3］の解法 $\begin{cases} x^4+y^2x^2+(y^4-21)=0 \\ x^2+yx+(y^2-7)=0 \end{cases}$

終結式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & y^2 & 0 & y^4-21 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y^2 & 0 & y^4-21 \\ 1 & y & y^2-7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & y & y^2-7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y & y^2-7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & y & y^2-7 \end{vmatrix}$

$=196y^4-980y^2+784$

$=196(y^4-5y^2+4)=196(y^2-1)(y^2-4)=196(y-1)(y+1)(y-2)(y+2)=0$ より

$y=1,\ -1,\ 2,\ -2$

$y=1$ のとき $\begin{cases} x^4+x^2-20=0 \\ x^2+x-6=0 \end{cases}$ $\begin{cases} (x^2+5)(x-2)(x+2)=0 \\ (x-2)(x+3)=0 \end{cases}$ 共通根は $x=2$ 得られる解

$$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

$y=-1$ のとき $\begin{cases} x^4+x^2-20=0 \\ x^2-x-6=0 \end{cases}$ $\begin{cases} (x^2+5)(x-2)(x+2)=0 \\ (x+2)(x-3)=0 \end{cases}$ 共通根は $x=-2$ 得られる解

$$\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$$

$y=2$ のとき $\begin{cases} x^4+4x^2-5=0 \\ x^2+2x-3=0 \end{cases}$ $\begin{cases} (x^2+5)(x-1)(x+1)=0 \\ (x-1)(x+3)=0 \end{cases}$ 共通根は $x=1$ 得られる解

$$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

$y=-2$ のとき $\begin{cases} x^4+4x^2-5=0 \\ x^2-2x-3=0 \end{cases}$ $\begin{cases} (x^2+5)(x-1)(x+1)=0 \\ (x+1)(x-3)=0 \end{cases}$ 共通根は $x=-1$ 得られる解

$$\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$$

三元連立方程式への挑戦

6.1　例題1

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x^3+y^3+z^3=36 \\ xyz=6 \end{cases}$$

xに関して整頓すると $\begin{cases} x+(y+z-6)=0 \cdots(1) \\ x^3+(y^3+z^3-36)=0 \cdots(2) \\ (yz)x-6=0 \cdots(3) \end{cases}$

(1)と(2)がxに関して共通根を持つためには

$$\begin{vmatrix} 1 & y+z-6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & y+z-6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y+z-6 \\ 1 & 0 & 0 & y^3+z^3-36 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & y+z-6 & 0 & -(y^3+z^3-36) \\ 0 & 1 & y+z-6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y+z-6 \\ 1 & 0 & 0 & y^3+z^3-36 \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} y+z-6 & 0 & -(y^3+z^3-36) \\ 1 & y+z-6 & 0 \\ 0 & 1 & y+z-6 \end{vmatrix}$$

$=-\{(y+z-6)^3-(y^3+z^3-36)\}=(y^3+z^3-36)-(y+z-6)^3$

$=(y^3+z^3-36)-(y^3+3y^2z+3yz^2+z^3-18y^2-36yz-18z^2+108y+108z-216)$

$=-3y^2z-3yz^2+18y^2+36yz+18z^2-108y-108z+180=0$

即ち $y^2z+yz^2-6y^2-12yz-6z^2+36y+36z-60=0 \cdots(4)$

(1)と(3)がxに関して共通根を持つためには

$\begin{vmatrix} 1 & y+z-6 \\ yz & -6 \end{vmatrix} =-6-yz(y+z-6)=-y^2z-yz^2+6yz-6=0$

即ち $y^2z+yz^2-6yz+6=0 \cdots(5)$

(2)と(3)がxに関して共通根を持つためには

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & y^3+z^3-36 \\ yz & -6 & 0 & 0 \\ 0 & yz & -6 & 0 \\ 0 & 0 & yz & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 0 & 0 \\ yz & -6 & 0 \\ 0 & yz & -6 \end{vmatrix} -yz \begin{vmatrix} 0 & 0 & y^3+z_3-36 \\ yz & -6 & 0 \\ 0 & yz & -6 \end{vmatrix}$$

$$=(-6)^3-yz(y^3+z^3-36)\begin{vmatrix} yz & -6 \\ 0 & yz \end{vmatrix}$$

$=-216-y^3z^3(y^3+z^3-36)=-y^6z^3-y^3z^6+36y^3z^3-216=0$

即ち $y^6z^3+y^3z^6-36y^3z^3+216=0 \cdots(6)$

即ちもとの連立方程式が解をもつ為には，y, zに関する連立方程式

$\begin{cases} y^2z+yz^2-6y^2-12yz-6z^2+36y+36z-60=0 \cdots(4) \\ y^2z+yz^2-6yz+6=0 \cdots(5) \\ y^6z+y^3z^6-36y^3z^3+216=0 \cdots(6) \end{cases}$

が解をもたなければならない。

(4)と(5)をそれぞれyに関して整頓すると

$\begin{cases} (z-6)y^2+(z-6)^2y-6(z^2-6z+10)=0 \cdots(4) \\ zy^2+z(z-6)y+6=0 \cdots(5) \end{cases}$

(4)と(5)がyとしての共通根を持つためには

$$\begin{vmatrix} z-6 & (z-6)^2 & -6(z^2-6z+10) & 0 \\ 0 & z-6 & (z-6)^2 & -6(z^2-6z+10) \\ z & z(z-6) & 6 & 0 \\ 0 & z & z(z-6) & 6 \end{vmatrix}$$

$=36z^6-432z^5+2088z^4-5184z^3+6948z^2-4752z+1296$

$=36(z^6-12z^5+58z^4-144z^3+193z^2-132z+36)$

$=36(z-1)^2(z-2)^2(z-3)^2=0$

◎ $z=1$ のとき(4), (5)に代入すると

$\begin{cases}-5y^2+25y-30=0\\ y^2-5y+6=0\end{cases}$ $\begin{cases}-5(y-2)(y-3)=0\\ (y-2)(y-3)=0\end{cases}$ 得られる解 $\begin{cases}y=2\\ z=1\end{cases}$ $\begin{cases}y=3\\ z=1\end{cases}$

ところで $\begin{cases}y=2\\ z=1\end{cases}$ も $\begin{cases}y=3\\ z=1\end{cases}$ も(6)を満たすことはすぐ分かる。

○ $\begin{cases}y=2\\ z=1\end{cases}$ を(1)(2)(3)に代入すると

$\begin{cases}x-3=0\\ x^3-27=0\\ 2x-6=0\end{cases}$ $\begin{cases}x-3=0\\ (x-3)(x^2+3x+9)=0\\ 2(x-3)=0\end{cases}$

共通根として $x=3$ 得られる解 $\begin{cases}x=3\\ y=2\\ z=1\end{cases}$

○ $\begin{cases}y=3\\ z=1\end{cases}$ を(1)(2)(3)に代入すると

$\begin{cases}x-2=0\\ x^3-8=0\\ 3x-6=0\end{cases}$ $\begin{cases}x-2=0\\ (x-2)(x^2+2x+4)=0\\ 3(x-2)=0\end{cases}$

共通根として $x=2$ 得られる解 $\begin{cases}x=2\\ y=3\\ z=1\end{cases}$

◎ $z=2$ のとき(4), (5)に代入すると

$\begin{cases}-4y^2+16y-12=0\\ 2y^2-8y+6=0\end{cases}$ $\begin{cases}-4(y-1)(y-3)=0\\ 2(y-1)(y-3)=0\end{cases}$ 得られる解 $\begin{cases}y=1\\ z=2\end{cases}$ $\begin{cases}y=3\\ z=2\end{cases}$

ところで $\begin{cases}y=1\\ z=2\end{cases}$ $\begin{cases}y=3\\ z=2\end{cases}$ (6)を満たすことはすぐ分かる。

○ $\begin{cases}y=1\\ z=2\end{cases}$ を(1)(2)(3)に代入すると

$\begin{cases}x-3=0\\ x^3-27=0\\ 2x-6=0\end{cases}$ $\begin{cases}x-3=0\\ (x-3)(x^2+3x+9)=0\\ 2(x-3)=0\end{cases}$ 共通根として $x=3$ 得られる解 $\begin{cases}x=3\\ y=1\\ z=2\end{cases}$

○ $\begin{cases}y=3\\ z=2\end{cases}$ を(1)(2)(3)に代入すると

$\begin{cases}x-1=0\\ x^3-1=0\\ 6x-6=0\end{cases}$ $\begin{cases}x-1=0\\ (x-1)(x^2+x+1)=0\\ 6(x-1)=0\end{cases}$ 共通根として $x=1$ 得られる解 $\begin{cases}x=1\\ y=3\\ z=2\end{cases}$

◎ $z=3$ のとき(4), (5)に代入すると

$\begin{cases}-3y^2+9y-6=0\\ 3y^2-9y+6=0\end{cases}$ $\begin{cases}-3(y-1)(y-2)=0\\ 3(y-1)(y-2)=0\end{cases}$

得られる解 $\begin{cases}y=1\\ z=3\end{cases}$ $\begin{cases}y=2\\ z=3\end{cases}$

ところで $\begin{cases}y=1\\ z=3\end{cases}$ も $\begin{cases}y=2\\ z=3\end{cases}$ も(6)を満たすことはすぐ分かる。

○ $\begin{cases}y=1\\ z=3\end{cases}$ を(1)(2)(3)に代入すると $\begin{cases}x-2=0\\ x^3-8=0\\ 3x-6=0\end{cases}$ $\begin{cases}x-2=0\\ (x-2)(x^2+2x+4)=0\\ 3(x-2)=0\end{cases}$

共通根として $x=2$ 得られる解 $\begin{cases}x=2\\ y=1\\ z=3\end{cases}$

○ $\begin{cases}y=2\\ z=3\end{cases}$ を(1)(2)(3)に代入すると $\begin{cases}x-1=0\\ x^3-1=0\\ 6x-6=0\end{cases}$ $\begin{cases}x-1=0\\ (x-1)(x^2+x+1)=0\\ 6(x-1)=0\end{cases}$

共通根として $x=1$ 得られる解 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$

6.2　例題2

$\begin{cases} yz=a(x+y+z) \\ zx=b(x+y+z) \\ xy=c(x+y+z) \end{cases}$　a, b, c は全て0と異なるとする

$\begin{cases} ax-(yz-ay-az)=0 \cdots(1) \\ (z-b)x-b(y+z)=0 \cdots(2) \\ (y-c)x-c(y+z)=0 \cdots(3) \end{cases}$

(1)と(2)が x に関して共通根を持つためには

$$\begin{vmatrix} a & -(yz-ay-az) \\ z-b & -b(y+z) \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a & -(yz-ay-az)-a(y+z) \\ z-b & -b(y+z)-(z-b)(y+z) \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a & -yz \\ z-b & -z(y+z) \end{vmatrix}=z\begin{vmatrix} a & -y \\ z-b & -(y+z) \end{vmatrix}$$

$$=z\{-a(y+z)+y(z-b)\}=z\{yz-(a+b)y-az\}=0$$

(1)と(3)が x に関して共通根を持つためには

$$\begin{vmatrix} a & -(yz-ay-az) \\ y-c & -c(y+z) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & -(yz-ay-az)-a(y+z) \\ y-c & -c(y+z)-(y-c)(y+z) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & -yz \\ y-c & -y(y+z) \end{vmatrix}$$

$$=y\begin{vmatrix} a & -z \\ y-c & -(y+z) \end{vmatrix}=y\{-a(y+z)+z(y-c)\}=y\{yz-ay-(a+c)z\}=0$$

(2)と(3)が x に関して共通根を持つためには

$$=\begin{vmatrix} z-b & -b(y+z) \\ y-c & -c(y+z) \end{vmatrix}=(y+z)\begin{vmatrix} z-b & -b \\ y-c & -c \end{vmatrix}=(y+z)\begin{vmatrix} z & -b \\ y & -c \end{vmatrix}=(y+z)(by-cz)=0$$

$\begin{cases} z\{yz-(a+b)y-az\}=0 \cdots(4) \\ y\{yz-ay-(a+c)z\}=0 \cdots(5) \\ (y+z)(by-cz)=0 \cdots(6) \end{cases}$

今(4)より $z=0$ とすると(5)に代入して $y(-ay)=-ay^2=0$ よって $y=0$

また(5)より $y=0$ とすると(4)に代入して $z(-az)=-az^2=0$ よって $z=0$

よって y, z は共に0か0でないかである。共に0ならば当然(6)を満たす。

$\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$ を(1)(2)(3)に代入すると $\begin{cases} ax=0 \\ -bx=0 \\ -cx=0 \end{cases}$ より $x=0$ よって $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$ なる解をうる。

$y, z\neq 0$ ならば(4)(5)より

$\begin{cases} yz-(a+b)y-az=0 \\ yz-ay-(a+c)z=0 \end{cases}$ を満たす

$\begin{cases} (z-a-b)y-az=0 \cdots(7) \\ (z-a)y-(a+c)z=0 \cdots(8) \end{cases}$

これが y としての共通根を持つためには

$$\begin{vmatrix} z-a-b & -az \\ z-a & -(a+c)z \end{vmatrix}=z\begin{vmatrix} z-a-b & -a \\ z-a & -(a+c) \end{vmatrix}=z\begin{vmatrix} -b & c \\ z-a & -(a+c) \end{vmatrix}$$

$$=z\{b(a+c)-c(z-a)\}=z(-cz+bc+ca+ab)=0$$

$z\neq 0$ より $z=\dfrac{bc+ca+ab}{c}$

これを(8)に代入すると

$$y=\frac{(a+c)z}{z-a}=\frac{(a+c)\dfrac{bc+ca+ab}{c}}{\dfrac{bc+ca+ab}{c}-a}=\frac{(a+c)(bc+ca+ab)}{bc+ca+ab-ca}=\frac{(a+c)(bc+ca+ab)}{b(a+c)}=\frac{bc+ca+ab}{b}$$

で当然(7)を満たす

従って(4)(5)を満たす。そして(6)を満たすことも直ちに分かる。

このことから(1)(2)は共通根をもつが

$$ax=yz-ay-az$$

$$=\frac{(bc+ca+ab)^2}{bc}-\frac{a(bc+ca+ab)}{b}-\frac{a(bc+ca+ab)}{c}$$

$$=\frac{(bc+ca+ab)^2-ac(bc+ca+ab)-ab(bc+ca+ab)}{bc}=\frac{(bc+ca+ab)bc}{bc}=bc+ca+ab$$

よって $x=\dfrac{bc+ca+ab}{a}$ で

これは(1)(2)の共通根でもあり，(1)(3)の共通根でもあり，従って(1)(2)(3)の全てを満たす。

これより $\begin{cases} x=\dfrac{bc+ca+ab}{a} \\ y=\dfrac{bc+ca+ab}{b} \\ z=\dfrac{bc+ca+ab}{c} \end{cases}$ も解である。

6.3　例題3

$$\begin{cases} (y+z)(x+y+z)=16 \\ (z+x)(x+y+z)=12 \\ (x+y)(x+y+z)=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y+z)x+(y^2+2yz+z^2-16)=0 \cdots(1) \\ x^2+(y+2z)x+(yz+z^2-12)=0 \cdots(2) \\ x^2+(2y+z)x+(y^2+yz-4)=0 \cdots(3) \end{cases}$$

(1)と(2)が x としての共通根を持つためには

$$\begin{vmatrix} y+z & y^2+2yz+z^2-16 & 0 \\ 0 & y+z & y^2+2yz+z^2-16 \\ 1 & y+2z & yz+z^2-12 \end{vmatrix}$$

$$=(y+z)^2(yz+z^2-12)+(y^2+2yz+z^2-16)^2-(y+z)(y+2z)(y^2+2yz+z^2-16)$$

$$=-28y^2-40yz-12z^2+256=0$$

よって $7y^2+10yz+3z^2-64=0 \cdots(4)$

(1)と(3)が x としての共通根を持つためには

$$\begin{vmatrix} y+z & y^2+2yz+z^2-16 & 0 \\ 0 & y+z & y^2+2yz+z^2-16 \\ 1 & 2y+z & y^2+yz-4 \end{vmatrix}$$

$$=(y+z)^2(y^2+yz-4)+(y^2+2yz+z^2-16)^2-(y+z)(2y+z)(y^2+2yz+z^2-16)$$

$$=-4y^2-24yz-20z^2+256=0$$

よって $y^2+6yz+5z^2-64=0 \cdots(5)$

(2)と(3)が x としての共通根を持つためには

$$\begin{vmatrix} 1 & y+2z & yz+z^2-12 & 0 \\ 0 & 1 & y+2z & yz+z^2-12 \\ 1 & 2y+z & y^2+yz-4 & 0 \\ 0 & 1 & 2y+z & y^2+yz-4 \end{vmatrix}=-4y^2+16yz-12z^2+64=0$$

$y^2-4yz+3z^2-16=0\cdots(6)$

もとの連立方程式が解をもつ為には y, z に関する連立方程式

$\begin{cases}7y^2+10yz+3z^2-64=0\cdots(4)\\ y^2+6yz+5z^2-64=0\cdots(5)\\ y^2-4yz+3z^2-16=0\cdots(6)\end{cases}$ が解をもたなければならぬ。

$\begin{cases}F=7y^2+10yz+3z^2-64=0\cdots(4)\\ G=y^2+6yz+5z^2-64=0\cdots(5)\end{cases}$

$$\begin{vmatrix}7+\lambda & 5+3\lambda & 0+0\lambda\\ 5+3\lambda & 3+5\lambda & 0+0\lambda\\ 0+0\lambda & 0+0\lambda & -64-64\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+7 & 3\lambda+5 & 0\\ 3\lambda+5 & 5\lambda+3 & 0\\ 0 & 0 & -64(\lambda+1)\end{vmatrix}$$

$$=-64(\lambda+1)\begin{vmatrix}\lambda+7 & 3\lambda+5\\ 3\lambda+5 & 5\lambda+3\end{vmatrix}=-64(\lambda+1)\{(\lambda+7)(5\lambda+3)-(3\lambda+5)^2\}$$

$$=-64(\lambda+1)(-4\lambda^2+8\lambda-4)=256(\lambda+1)(\lambda-1)^2=0$$

◎ $\lambda=-1$ のとき

$F-G=6y^2+4yz-2z^2=2(3y^2+2yz-z^2)=2(3y-z)(y+z)=0$

◎ $\lambda=1$ のとき

$F+G=8y^2+16yz+8z^2-128=8(y^2+2yz+z^2-16)=8(y+z-4)(y+z+4)=0$

□ $\lambda=-1$ と $\lambda=1$ を組み合わせると次の四組の連立方程式を解くことになる。

$\begin{cases}3y-z=0\\ y+z-4=0\end{cases}$ $\begin{cases}3y-z=0\\ y+z+4=0\end{cases}$ $\begin{cases}y+z=0\\ y+z-4=0\end{cases}$ $\begin{cases}y+z=0\\ y+z+4=0\end{cases}$

これらより $\begin{cases}y=1\\ z=3\end{cases}$ $\begin{cases}y=-1\\ z=-3\end{cases}$

$\begin{cases}y=1\\ z=3\end{cases}$ 及び $\begin{cases}y=-1\\ z=-3\end{cases}$ が(6)を満たすことは容易に確かめられる。

$\begin{cases}y=1\\ z=3\end{cases}$ を(1)(2)(3)に代入すると $\begin{cases}4x=0\\ x^2+7x=0\\ x^2+5x=0\end{cases}$ $\begin{cases}4x=0\\ x(x+7)=0\\ x(x+5)=0\end{cases}$

共通根として $x=0$ $\begin{cases}x=0\\ y=1\\ z=3\end{cases}$

$\begin{cases}y=-1\\ z=-3\end{cases}$ を(1)(2)(3)に代入すると

$\begin{cases}-4x=0\\ x^2-7x=0\\ x^2-5x=0\end{cases}$ $\begin{cases}-4x=0\\ x(x-7)=0\\ x(x-5)=0\end{cases}$ 共通根として $x=0$ $\begin{cases}x=0\\ y=-1\\ z=-3\end{cases}$

6.4　例題4

$\begin{cases}x^2-x+1=y\\ x^2-x-1=z\\ 2x^2-2x-1=yz\end{cases}$

$\begin{cases}x^2-x-(y-1)=0\cdots(1)\\ x^2-x-(z+1)=0\cdots(2)\\ 2x^2-2x-(yz+1)=0\cdots(3)\end{cases}$

(1)と(2)が x としての共通根を持つためには

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & -(y-1) & 0\\ 0 & 1 & -1 & -(y-1)\\ 1 & -1 & -(z+1) & 0\\ 0 & 1 & -1 & -(z+1)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1 & -(y-1) & 0\\ 0 & 1 & -1 & -(y-1)\\ 0 & 0 & y-z-2 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -(z+1)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1 & -(y-1)\\ 0 & y-z-2 & 0\\ 1 & -1 & -(z+1)\end{vmatrix}$$

$$=(y-z-2)\begin{vmatrix}1 & -(y-1)\\ 1 & -(z+1)\end{vmatrix}=(y-z-2)^2=0$$

(1)と(3)がxとして共通根を持つためには

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & -(y-1) & 0\\ 0 & 1 & -1 & -(y-1)\\ 2 & -2 & -(yz+1) & 0\\ 0 & 2 & -2 & -(yz+1)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1 & -(y-1) & 0\\ 0 & 1 & -1 & -(y-1)\\ 0 & 0 & -(yz-2y+3) & 0\\ 0 & 2 & -2 & -(yz+1)\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & -1 & -(y-1)\\ 0 & -(yz-2y+3) & 0\\ 2 & -2 & -(yz+1)\end{vmatrix}=-(yz-2y+3)\begin{vmatrix}1 & -(y-1)\\ 2 & -(yz+1)\end{vmatrix}=(yz-2y+3)^2=0$$

(2)と(3)がxとしての共通根を持つためには

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & -(z+1) & 0\\ 0 & 1 & -1 & -(z+1)\\ 2 & -2 & -(yz+1) & 0\\ 0 & 2 & -2 & -(yz+1)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1 & -(z+1) & 0\\ 0 & 1 & -1 & -(z+1)\\ 0 & 0 & -(yz-2z-1) & 0\\ 0 & 2 & -2 & -(yz+1)\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & -1 & -(z+1)\\ 0 & -(yz-2z-1) & 0\\ 2 & -2 & -(yz+1)\end{vmatrix}=-(yz-2z-1)\begin{vmatrix}1 & -(z+1)\\ 2 & -(yz+1)\end{vmatrix}=(yz-2z-1)^2=0$$

以上より原方程式が解をもつ為には次のy, zに関する連立方程式が解をもたなければならない。

$$\begin{cases}y-z-2=0 \cdots(4)\\ yz-2y+3=0 \cdots(5)\\ yz-2z-1=0 \cdots(6)\end{cases}$$

(4)より $y=z+2$　(5)に代入すると $(z+2)z-2(z+2)+3=0$

$z^2-1=0$　$z=\pm1$

(6)に代入すると $(z+2)z-2z-1=0$

$z^2-1=0$　$z=\pm1$

$z=1$ のとき $y=3$　　$z=-1$ のとき $y=1$

$\begin{cases}y=3\\ z=1\end{cases}$ を(1)(2)(3)に代入すると $\begin{cases}x^2-x-2=0\\ x^2-x-2=0\\ 2x^2-2x-4=0\end{cases}$

共通根として $x=-1, 2$

$\begin{cases}x=-1\\ y=3\\ z=1\end{cases}$　$\begin{cases}x=2\\ y=3\\ z=1\end{cases}$

$\begin{cases}y=1\\ z=-1\end{cases}$ を(1)(2)(3)に代入すると $\begin{cases}x^2-x=0\\ x^2-x=0\\ 2x^2-2x=0\end{cases}$

共通根として $x=0, 1$

$\begin{cases}x=0\\ y=1\\ z=-1\end{cases}$　$\begin{cases}x=1\\ y=1\\ z=-1\end{cases}$

6.5 例題5

$$\begin{cases}x^2+3x+y=0 \cdots(1)\\ x^2+4x+z=0 \cdots(2)\\ x^2+5x+yz=0 \cdots(3)\end{cases}$$

(1)と(2)がxとしての共通根を持つためには

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & y & 0 \\ 0 & 1 & 3 & y \\ 1 & 4 & z & 0 \\ 0 & 1 & 4 & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & y & 0 \\ 0 & 1 & 3 & y \\ 0 & 1 & z-y & 0 \\ 0 & 1 & 4 & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & y \\ 1 & z-y & 0 \\ 1 & 4 & z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & y \\ 0 & z-y-3 & -y \\ 0 & 1 & z-y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z-y-3 & -y \\ 1 & z-y \end{vmatrix} = y^2-2yz+z^2+4y-3z=0 \cdots(4)$$

(1)と(3)が x としての共通根を持つためには

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & y & 0 \\ 0 & 1 & 3 & y \\ 1 & 5 & yz & 0 \\ 0 & 1 & 5 & yz \end{vmatrix} = y \begin{vmatrix} 1 & 3 & y & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & yz & 0 \\ 0 & 1 & 5 & z \end{vmatrix} = y \begin{vmatrix} 1 & 3 & y & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & yz-y & 0 \\ 0 & 1 & 5 & z \end{vmatrix}$$

$$= y \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & yz-y & 0 \\ 1 & 5 & z \end{vmatrix} = y \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & yz-y-6 & -2 \\ 0 & 2 & z-1 \end{vmatrix} = y \begin{vmatrix} yz-y-6 & -2 \\ 2 & z-1 \end{vmatrix}$$

$$= y(yz^2-2yz+y-6z+10)=0 \cdots(5)$$

(2)と(3)が x としての共通根を持つためには

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & z & 0 \\ 0 & 1 & 4 & z \\ 1 & 5 & yz & 0 \\ 0 & 1 & 5 & yz \end{vmatrix} = z \begin{vmatrix} 1 & 4 & z & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & yz & 0 \\ 0 & 1 & 5 & y \end{vmatrix} = z \begin{vmatrix} 1 & 4 & z & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & yz-z & 0 \\ 0 & 1 & 5 & y \end{vmatrix}$$

$$= z \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & yz-z & 0 \\ 1 & 5 & y \end{vmatrix} = z \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & yz-z-4 & -1 \\ 0 & 1 & y-1 \end{vmatrix} = z \begin{vmatrix} yz-z-4 & -1 \\ 1 & y-1 \end{vmatrix}$$

$$= z(y^2z-2yz-4y+z+5)=0 \cdots(6)$$

だから元の方程式を解くためにはまず次の y, z に関する連立方程式を解かなければならない。

$$\begin{cases} y^2-2yz+z^2+4y-3z=0 \cdots(4) \\ y(yz^2-2yz+y-6z+10)=0 \cdots(5) \\ z(y^2z-2yz-4y+z+5)=0 \cdots(6) \end{cases}$$

これは次の四組の連立方程式を解くことと同値である。

$$\begin{cases} y^2-2yz+z^2+4y-3z=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \cdots(イ)$$

$$\begin{cases} y^2-2yz+z^2+4y-3z=0 \\ y=0 \\ y^2z-2yz-4y+z+5=0 \end{cases} \cdots(ロ)$$

$$\begin{cases} y^2-2yz+z^2+4y-3z=0 \\ yz^2-2yz+y-6z+10=0 \\ z=0 \end{cases} \cdots(ハ)$$

$$\begin{cases} y^2-2yz+z^2+4y-3z=0 \\ yz^2-2yz+y-6z+10=0 \\ y^2z-2yz-4y+z+5=0 \end{cases} \cdots(ニ)$$

(イ)の解は $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$ である。

(ロ)と(ハ)が解をもたないことは容易に確かめられる。

(ニ)が解をもつか否かが最後の問題となる。

$$\begin{cases} y^2-2yz+z^2+4y-3z=0 \cdots(7) \\ yz^2-2yz+y-6z+10=0 \cdots(8) \\ y^2z-2yz-4y+z+5=0 \cdots(9) \end{cases}$$

(7)(8)(9)をそれぞれ y の次数に整頓すると

$$\begin{cases} y^2-2(z-2)y+z(z-3)=0 \cdots(7) \\ (z-1)^2y-2(3z-5)=0 \cdots(8) \\ zy^2-2(z+2)y+(z+5)=0 \cdots(9) \end{cases}$$

(7)と(8)が y として共通解を持つためには

$$\begin{vmatrix} 1 & -2(z-2) & z(z-3) \\ (z-1)^2 & -2(3z-5) & 0 \\ 0 & (z-1)^2 & -2(3z-5) \end{vmatrix} = 4(3z-5)^2+z(z-3)(z-1)^4-4(z-1)^2(z-2)(3z-5)$$

$$=z^6-7z^5+6z^4+46z^3-91z^2+z+60=(z-3)(z^3-5z^2+3z+5)(z^2+z-4)=0$$

(7)と(9)が y としての共通根をもつ為には

$$\begin{vmatrix} 1 & -2(z-2) & z(z-3) & 0 \\ 0 & 1 & -2(z-2) & z(z-3) \\ z & -2(z+2) & z+5 & 0 \\ 0 & z & -2(z+2) & z+5 \end{vmatrix} = z^6-10z^5+27z^4+16z^3-133z^2+58z+105=$$

$$(z-3)(z^3-5z^2+3z+5)(z^2-2z-7)=0$$

(8)と(9)が y としての共通根をもつ為には

$$\begin{vmatrix} (z-1)^2 & -2(3z-5) & 0 \\ 0 & (z-1)^2 & -2(3z-5) \\ z & -2(z+2) & z+5 \end{vmatrix} = (z-1)^4(z+5)+4z(3z-5)^2-4(z-1)^2(z+2)(3z-5)$$

$$=z^5-11z^4+42z^3-58z^2-3z+45=(z-3)^2(z^3-5z^2+3z+5)=0$$

従って(7)(8)(9)の連立方程式を解くためには

$$\begin{cases} (z-3)(z^3-5z^2+3z+5)(z^2+z-4)=0 \\ (z-3)(z^3-5z^2+3z+5)(z^2-2z-7)=0 \\ (z-3)^2(z^3-5z^2+3z+5)=0 \end{cases}$$ の共通根を求めればよい。

$z-3,\ z^3-5z^2+3z+5,\ z^2+z-4,\ z^2-2z-7$ は互いに素だから

共通根は $z-3=0$ 及び $z^3-5z^2+3z+5=0$ の根である。

$z=3$ より(7)(8)(9)に代入すると

$$\begin{cases} y^2-2y=0 \\ 4y-8=0 \\ 3y^2-10y+8=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y(y-2)=0 \\ 4(y-2)=0 \\ (y-2)(3y-4)=0 \end{cases}$$ 共通根は $y=2$ だから $\begin{cases} y=2 \\ z=3 \end{cases}$

さて，$\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$ を(1)(2)(3)に代入すると

$$\begin{cases} x^2+3x=0 \\ x^2+4x=0 \\ x^2+5x=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x(x+3)=0 \\ x(x+4)=0 \\ x(x+5)=0 \end{cases}$$ 共通根として $x=0$

$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$ が解

$\begin{cases} y=2 \\ z=3 \end{cases}$ を(1)(2)(3)に代入すると

$$\begin{cases} x^2+3x+2=0 \\ x^2+4x+3=0 \\ x^2+5x+6=0 \end{cases} \quad \begin{cases} (x+1)(x+2)=0 \\ (x+1)(x+3)=0 \\ (x+2)(x+3)=0 \end{cases}$$ これらの共通根はないから $\begin{cases} y=2 \\ z=3 \end{cases}$ からは解が導かれない。

$z^3-5z^2+3z+5=0$ これは簡単には解けない。
カルダンの解法で解いて下されば幸甚です。

平成10(1998)年９月30日受理
平成10(1998)年12月25日発行