

プラウの切断抵抗力に対する滑り線方程式の解

小 嶋 和 雄 ・ 村 田 敏

(農学部農業工学・農業機械学研究室)

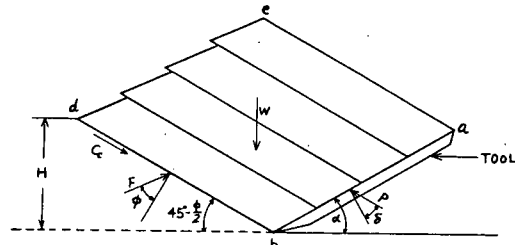
An Application of Kötter-Massau Equation to Cutting Resistance under Plowing

K. KOJIMA, and S. MURATA

(Laboratory of Farm Machinery, Faculty of Agriculture)

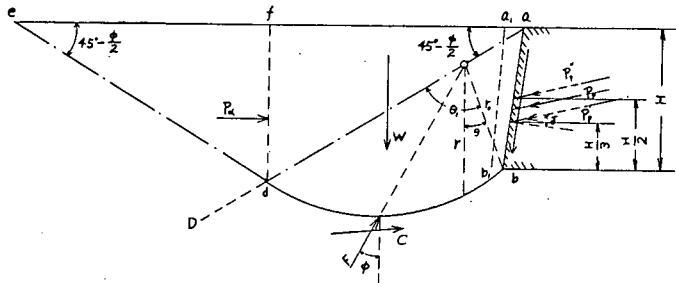
I. 緒 言

プラウの耕うん時における抵抗力は非常に多くの要因からなると考えられる(例えば, Soehne, W.⁽¹⁾の説)が, その一つに切断抵抗力が考えられる。一般に切断抵抗に關与する刃板は完全に平面ではないが, ここでは問題を簡単にするために, 平面で, 且つこの平面と地面に垂直に交わる平面と, 地面の交線に平行に進行する抵抗体に関して考察する。このような抵抗体に対する土の抵抗力は切断力, 土の運動量に基づく力及び板の両側と底部での板と土の摩擦力が考えられる。



第1図 J. C. Siemens の方法
(ASAE Trans., P. 1. より)

しかし切断力を除いては, 力学的に簡単に計算出来, 且つ切断力に比べて非常に小さい値を示すのであまり重要でないと考えられる。このような抵抗体に対する土の切断抵抗に關しては, 古くは Terzaghi and Peck の粘性土の受働土圧の理論⁽²⁾, 最近では, J. C. Siemens, J. A. Weber,



第2図 Terzaghi and Peck の方法
(Terzaghi and Peck, P. 163. より)

and T. H. Thornburn の理論⁽⁴⁾, 等があるが, いずれも滑り線の形を仮定しており(前者では対数ら旋と直線の組合せ, 後者では直線), 従って, その適用は, その仮定が成立する範囲に限定せられる。

前者は大体垂直な壁 ($\alpha > 70^\circ$) にのみ適用出来る理論⁽⁴⁾であり, 後者はクーロン流の考え方であるから, 抵抗板(壁)と土の摩擦角の小さい場合 ($\delta < \frac{1}{3}\phi$) に成立する仮定⁽³⁾であり, いずれもわれわれが扱うプラウその他の土と接触する農機具に共通に適用出来る仮定ではない。われわれは切断抵抗力を解析するに當って, 滑り線の形を仮定する事をやめ, 土を対象とする農機具がすべて比較的浅い土を対象とする事に着目して, 切断抵抗力に対する土じょうの重量の影響が無視出来る

事を仮定した。この仮定によって塑性平こう状態にある土中に生ずる滑り線の無限小のあみ目に關する応力の平こう条件から導かれた Kötter-Massau の方程式は簡単に積分出来て、抵抗力と接触する部分の応力状態は、滑り線全体の形を全く必要とせず、その接触面における滑り線の方向だけで決ってしまう。以下はこのような考え方を基礎にして導いた、切断抵抗力に関する理論である。

II. 理論式を導くに当って用いる仮定

仮定 1. 塑性平こう状態；プラウで耕うんする際、土は滑り線にそって破壊し、ずり上がってゆくのが見られる。土がすべり線にそって破壊しようとする瞬間、土は塑性平こう状態にあり、土のプラウに対する抵抗力は最大となる。

仮定 2. 土の比重量を 0 とする；土の切断抵抗力に關する土の性質として、土の内部摩擦角、粘着力、比重量及び土と抵抗力の間の摩擦角が考えられる。このうち比重量を除く土の性質は切断抵抗力に対して、面で作用するが、比重量は体積として影響する。従って、前者は深さの二乗で影響して来るのに対して、後者は 3 乗で影響して来る。従って、よう壁のような深い場合の抵抗はこの比重量を無視する事が出来ないが、農機具が対象とするような浅い土の場合は、これを事実上無視して差支えないと考えられる。

III. 理論式を導くに当って用いる記号

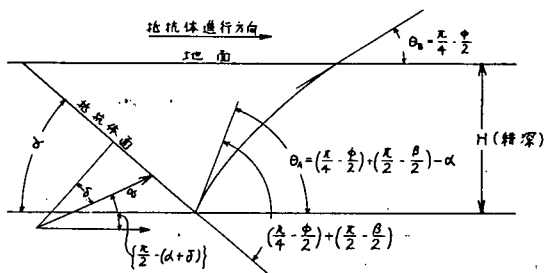
○ 抵抗力と地面のなす角（こう起角）	α
○ 土の内部摩擦角	ϕ
○ 土の粘着力	C
○ 土と抵抗力の摩擦角	δ
○ 2 主応力の平均と $C \cdot \cot \phi$ の和	P
○ 土と抵抗力の接触面における単位面積当りの合成力	q
○ 比抵抗	κ
○ 土と抵抗力の接触面における合成力	Q
○ 耕深	H
○ 耕巾	l
○ 抵抗力と土の接触面積	S
○ 滑り線にそってとった長さ	s_1, s_2
○ 土の比重	ρ
○ 滑り線が水平方向となす角	θ
○ 主応力	$\sigma_1, \sigma_2 \quad (\sigma_1 > \sigma_2)$

IV. Kötter-Massau の方程式⁽⁵⁾

$$\frac{\partial}{\partial s_1} \left(p e^{-2\theta \tan \phi} \right) = -\rho e^{-2\theta \tan \phi} \sin(\theta - \phi) \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial s_2} \left(p e^{2\theta \tan \phi} \right) = -\rho e^{2\theta \tan \phi} \cos \theta \quad (2)$$

プラウと土の接触面から、地上にのびた滑り面は、土質力学で明らかなように必ず地面と $\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}$ の傾斜をなして生じ、これは σ_1 の方向（水平方向）と時計回りの方向にあるから第(2)式を用いる。



第3図 抵抗力と土壌の剪断状態

仮定により $\rho = 0$ とおくと

$$\frac{\partial}{\partial s_2} (p e^{2\theta \tan \phi}) = 0 \quad (3)$$

$$\therefore p e^{2\theta \tan \phi} = \text{const} \quad (4)$$

即ち滑り線にそって $p e^{2\theta \tan \phi}$ の値は一定に保たれる。即ちA点、B点における p 及び θ の値を $p_A, p_B, \theta_A, \theta_B$ とすると

$$p_A e^{2\theta_A \tan \phi} = p_B e^{2\theta_B \tan \phi} \quad (5)$$

Bを地上点とすると

$$\left. \begin{aligned} p_B &= \frac{C \cdot \cot \phi}{1 - \sin \phi} \\ \theta_B &= \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

従って、土と抵抗力の接触点をAとすると

$$p_A e^{2\theta_A \tan \phi} = \frac{C \cdot \cot \phi}{1 - \sin \phi} e^{2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) \tan \phi} \quad (7)$$

となり、 θ_A 、即ち土と抵抗力の接触点における滑り線の方向が決まれば p_A が決まり、接触点における応力の大きさと方向が決まる。

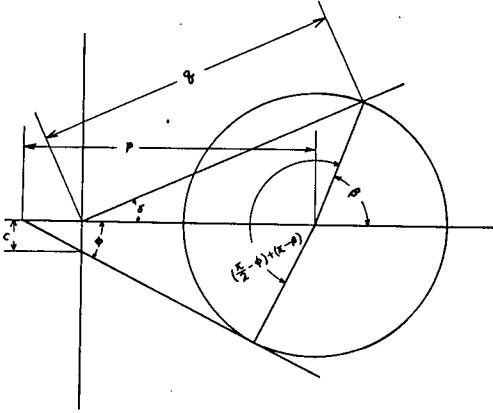
V. 土と抵抗力の接触点における滑り線の方向の決定

土と抵抗力の接触点における応力状態を示すモール円は、塑性平こう状態にあるから、 $\tau = C + \sigma \tan \phi$ の直線に接しているし、又土と抵抗力の接触面では、お互いに滑っているために、この面では土と抵抗力の間に成立する摩擦法則と全く同じ応力状態が成立してはならない。即ちモール円は $\tau = \sigma \tan \delta$ の直線と交わり、その交点は接触面の応力状態を表わす。

モール円の方程式は

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 \quad (8)$$

塑性平こう状態の仮定から



第4図 抵抗体面上における応力の状態

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = p - C \cot \phi \quad (9)$$

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = p \sin \phi \quad (10)$$

従って (8) 式は

$$\{\sigma - (p - C \cot \phi)\}^2 + \tau^2 = (p \sin \phi)^2 \quad (11)$$

又接触点では

$$\sigma = q \cos \delta \quad (12)$$

$$\tau = q \sin \delta \quad (13)$$

となる (モール円に $\tau = \sigma \tan \delta$ が交わる)

から (11) 式から

$$\{q \cos \delta - (p - C \cot \phi)\}^2 + (q \sin \delta)^2 = (p \sin \phi)^2 \quad (14)$$

が成立しなければならない。従ってこの二次方程式を q について解いて、単位面積当りの合成抵抗力 q は

$$q = (p - C \cot \phi) \cos \delta + \sqrt{p^2 \sin^2 \phi + (p - C \cot \phi)^2 \cos^2 \delta} \quad (15)$$

となり p の値がわかれば直ちに決定する事が出来る。

さて土と抵抗体の接触面の方向と σ_1 の方向のなす角を β とすると、すべり線は接触面の方向から反時計回りの方向に $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}\right)$ の方向にあり、従って、滑り線が水平となす角 θ_A は

$$\theta_A = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}\right) - \alpha \quad (16)$$

で表わされる。 β は第4図から明らかなように

$$\cot \beta = \frac{q \cos \delta - p + C \cot \phi}{q \sin \delta} \quad (17)$$

$$\therefore \beta = \cot^{-1} \left(\frac{q \cos \delta - p + C \cot \phi}{q \sin \delta} \right) \quad (18)$$

で表わす事が出来る。

VI. 合成抵抗力 Q の決定

(16) 式によって表わされた θ_A を (7) 式に代入すると

$$P_A e^{2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} - \alpha\right)} = \frac{C \cot \phi}{1 - \sin \phi} e^{2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)} \quad (19)$$

これより

$$2\alpha + \beta = \cot \left\{ \log P_A - \log \left(\frac{C \cot \phi}{1 - \sin \phi} \right) \right\} + \pi \quad (20)$$

$$\therefore 2\alpha + \beta = 2.302585 \left\{ \log_{10} p_A - \log_{10} \left(\frac{C \cot \phi}{1 - \sin \phi} \right) \right\} \cot \phi + \pi \quad (21)$$

これと (15) (18) 式を合せて

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\alpha + \beta = 2.302585 \left\{ \log_{10} p_A - \log_{10} \left(\frac{C \cot \phi}{1 - \sin \phi} \right) \right\} \cot \phi + \pi \quad (21) \\ \beta = \cot^{-1} \left(\frac{q_A \cos \delta - p_A + C \cot \phi}{q_A \sin \delta} \right) \quad (18) \\ q_A = (p_A - C \cot \phi) \cos \delta + \sqrt{p_A^2 \sin^2 \phi + (p_A - C \cot \phi)^2 \cos^2 \delta} \quad (15) \end{array} \right.$$

土の力学的性質、即ち C , ϕ , δ がわかっており、且つ抵抗体の傾斜角 α がわかっている場合には、この3個の方程式は p_A , β , q の3個の未知数を含む連立方程式であるから、各の値はこの連立方程式を解く事によって得られる。しかし実際にはこの連立方程式は難解であるから α の代りに p_A を仮定すれば (21) (18) (15) 式の右辺は直ちに計算出来、 α , β , q を決定する事が出来る。或る一定の α に対する q を求めるには、実際的には2, 3の p_A を仮定し、それより α , β , q を解き、 α と q の関係をグラフに描き、所定の α に対する q を求めれば良い。

q が求められたら合成抵抗力 Q は

$$Q = S \cdot q = H \cdot l \cdot \operatorname{cosec} \alpha \cdot q \quad (22)$$

比抵抗 κ は

$$\kappa = q \sin(\alpha + \delta) \operatorname{cosec} \alpha \quad (23)$$

全水平抵抗 P は

$$P = H \cdot l \cdot \kappa \quad (24)$$

VII. 例 (データは参考文献⁽⁴⁾による)

$$\phi = 27^\circ$$

$$C = 0.8 \text{ lb/in}^2 = 0.05624 \text{ kg/cm}^2$$

$$\delta = 24^\circ$$

$$H = 2 \text{ in}$$

$$l = 3 \text{ in}$$

(15) (18) (21) 式は各

$$q = 0.9135455(p - 1.570088) + \sqrt{0.2061074 p^2 + 0.834565(p - 1.570088)^2} \quad (15)'$$

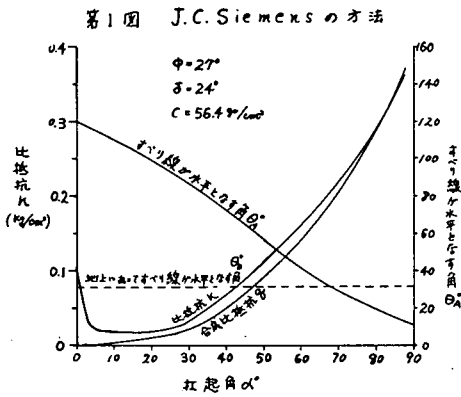
$$\beta = \cot^{-1} \left\{ \frac{0.9135455 q - p + 1.570088}{0.467366 q} \right\} \quad (18)'$$

$$2\alpha + \beta = 4.5421035(\log_{10} p - 0.4587244) \quad (21)'$$

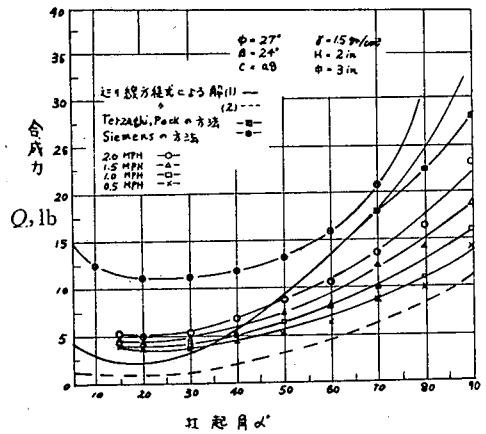
この p を 0.60, 0.65, 0.70, 0.80, 1.00, 2.00, 4.00 迄とって計算した結果を第5図に示す。

VIII. 実験データとの比較及び結論

前述の理論による推定値を J. C. Siemens 等による実験データ⁽⁴⁾ と比較したものを第6図に



第5図 こう起角と比抵抗の関係



第6図 こう起角と合成力の関係 (実験データは文献(4)による)

示す。図から明らかなように、Terzaghi and Peck 及び Siemens 等の理論が実験データの一部の傾向を説明するに過ぎないのに対して、この理論による推定値は全体の傾向をよく説明している。この推定値は実験値に対して大きな値を持つが、これは (2) 式において H を耕深にとったからで、実際には Siemens 等が測定した、れきのせん断状態⁽⁴⁾ が示すように、3本のせん断線が表わされており、せん断後の上部の土はもはや、塑性平こう状態になく単に一かたまりの土塊が傾斜面にのっているに過ぎない。このような物体の抵抗は単に重量のみによるものであって、この理論の趣旨から言って当然無視出来るものである。塑性平こう状態にあり、且つ切断抵抗を生じているのは、抵抗体の先端から $\frac{1}{3}$ の深さの部分であるから (2) 式の H として $\frac{1}{3} H$ をとるのが適当である。この結果を第6図中に点線で示す。これは速度の影響を無視した時の切断抵抗力と一致している事がわかる。

IX. 参考文献

- (1) Shone, W. Einige Glundlagen fur eine Landtechnische Bodenmechanik. Grdln. d. Landtechn., 7: 77, 1956.
- (2) Terzaghi, K. and Peck, R. B. Soil mechanics in engineering practice. John Wiley and Sons, 162-166, 1948.
- (3) 同上 160-162.
- (4) J. C. Siemens, J. A. Weber, and T. H. Thornburn. Mechanics of soil as influenced by model tillage tools. ASAE Trans., 8: (1) 1-7, 1965.
- (5) 最上武雄, 土の力学. 河出書房, 76-78, 1948.

(昭和41年4月1日受理)