対称性のトポロジーと部分周辺的3次元多様体

池田　徹
（数　学）

Topological Symmetries and Partially Peripheral 3-Manifolds

Toru IKEDA
Mathematics

Abstract. The concept of symmetry finds its mathematical formulation in the concept of group action. We work in the theory of finite group actions on 3-manifolds, in which we deal with groups acting as homeomorphisms. A great deal of developement has been made in case of geometric 3-manifolds. In the remaining case, totally peripheral 3-manifolds have played a major role. Partially peripheral 3-manifolds are defined by generalizing the notion of totally peripheral 3-manifolds. The aim of this paper is to study orientation-preserving finite group actions on a partially peripheral 3-manifold, which agree on the boundary, up to equivalence relative to the boundary.

1. はじめに

対称性はトポロジーに限らず幅広い分野において現れる基本的概念の一つであるが，数学的にはこの対称性を群作用として定式化することができる。3次元多様体の位相同型の群はトポロジーにおける対称性を表現し，群作用を考えることに対応している。3次元多様体上の有限群作用の理論では幾何的多様体に関して多くの研究がなされており，それ以外の場合には，構造がわかりやすい全周辺的3次元多様体が重要な役割を果たしてきた。本稿の目的は，全周辺的3次元多様体の概念を一般化することにより部分周辺的3次元多様体を定義し，部分周辺的3次元多様体上の有限群作用について境界上の作用との関係をもとに調べることである。すなわち，2つの有限群作用を考えたとき，それらが境界上で一致するならば境界に関して同値になるかどうかを調べる。

本稿では，第2節において群作用の定式化と3次元多様体との関わりについて述べる。第3節では部分周辺的3次元多様体の定義を与え，いくつかの性質や具体例について述べる。第4節で

は既約多様体の場合について標準JSJ分解をもとに議論する。第5節では可約多様体の場合に議論を展開し，主定理を証明する。有限群作用や部分周辺的3次元多様体等の諸概念の定義は後述することにするが，主定理を以下に述べておく。

定理 5.2. M をコンパクトで向き付け可能な部分周辺的 *3* 次元多様体で，偽 *3* 次元球体を含まないものとする。

(1) M は素分解 $M = M_1 \# \cdots \# M_n$ を許容する。ただし，$M_1, \ldots, M_n$ は部分周辺的既約多様体である。

(2) G_1 および G_2 を次の条件をみたす M 上の向きを保つ有限群作用とする。

(a) ある ∂M_i に対応する曲面 $B \subset \partial M$ について，$G_1(B) = B$ が成り立つ。

(b) 各 G_i および球面またはトーラスに位相同型な任意の本質的曲面 F について，F の固定群が F 上自由である。

このとき，G_1 と G_2 の ∂M への制限が同一の自由作用であるならば，それらは ∂M に関して同値である。

2. 有限群作用と3次元多様体

群 G および集合 X に対し，次の条件をみたす写像 $\varphi\colon G \times X \to X$ が存在したとする。

(1) G の単位元 e および任意の $x \in X$ に対して，$\varphi(e, x) = x$

(2) 任意の $g_1, g_2 \in G$ および任意の $x \in X$ に対して，$\varphi(g_2, \varphi(g_1, x)) = \varphi(g_2 g_1, x)$

このとき，組 (X, G, φ) を X 上の **G-作用**という。また，各 $g \in G$ に対して，写像 $\varphi_g\colon X \to X$ を $\varphi_g(x) = \varphi(g, x)$ で定義するとき，φ_g を g **による変換**という。

位相空間 M 上の群 G の作用 (M, G, φ) を考える。ただし，各 $g \in G$ による変換 φ_g は位相同型であるとする。このとき，M 上の G-作用を考えることは，M 上の位相同型の群を考えることに対応している。本稿では簡単のために，M 上の G-作用を M の位相同型の群として扱うことにし，G を M 上の**群作用**と呼ぶことにする。特に，G が位相同型の有限群であるとき，G を M 上の**有限群作用**と呼ぶ。また，$g \in G$ による変換は g のことを意味している。

位相空間 M 上の群作用 G および M の部分集合 X に対して，部分群 $\mathrm{Stab}_G(X) = \{g \in G | g(X) = X\}$ を G における X の**固定群**という。任意の $g \in G$ に対して，$g(X) = X$ または $g(X) \cap X = \phi$ のいずれかが成り立つとき，X は **G-同変**であるという。また，位相同型 $f\colon M \to M$ に対し，$f(x) = x$ となる点を f の**不動点**といい，集合 $\mathrm{Fix}(f) = \{x \in M | f(x) = x\}$ を f の**不動点集合**という。

G_1 および G_2 を位相空間 M 上の群作用とする。位相同型 $h\colon M \to M$ により G_1 が G_2 に共役であるとき，G_1 と G_2 は**同値**であるという。特に，h の M の部分集合 N への制限が自明写像のとき，G_1 と G_2 は N **に関して同値**であるという。

3次元トポロジーではPL(区分的に線形)カテゴリーで議論されることが多い。これは，Moiseの結果 [12] により，PL3次元多様体の位相同型がPL位相同型により近似されることと，3次元

多様体は三角形分割可能であることが示されたためである。しかし，3次元多様体上に二つの有限群作用を考えたとき，それらが同値であるかどうかの議論をPLカテゴリーで行うためには，Moiseの結果だけでは不十分である。したがって，3次元多様体上の有限群作用に関する多くの文献では，PLカテゴリーという制限をしていなかった。しかし，最近 [4] により，商空間として現れる3次元軌道体の軌道体同値がPL軌道体同値で近似されることが示された。そこで，本稿ではPLカテゴリーで議論することにする。

3. 部分周辺的3次元多様体

連結3次元多様体 M が**周辺的**であるとは，∂M 上のコンパクト連結曲面 F で，包含写像から誘導される準同型 $\pi_1 F \to \pi_1 M$ が上への写像になっているものが存在することである。周辺的な向き付け可能コンパクト既約3次元多様体は，圧縮不可能な境界を持つ場合に [3, Theorem 10.5] に分類されている。**全周辺的**3次元多様体とは，任意のループが自由ホモトピーで境界の中へ移動できる連結3次元多様体のことである。全周辺的3次元多様体については，Brin, Johannson および Scott [1] が調べており，向き付け可能でコンパクトな全周辺的3次元多様体は周辺的であることを示した。

l_1 および l_2 を3次元多様体 M 内のループで，$l_1 = l_2$ あるいは $l_1 \cap l_2 = \phi$ をみたしているものとする。M 内の円盤 D が l_1 と l_2 のそれぞれに ∂D 内の互いに交わらない弧 a_1 と a_2 で交わり，∂D の向きと l_i の向きが一致しているとき，D を l_1 と l_2 を繋ぐ**バンド**であるという。$l_1 \cap l_2 = \phi$ の場合に，$(l_1 \cup l_2 - a_1 \cup a_2) \cup \mathrm{cl}(\partial D - a_1 \cup a_2)$ を l_1 と l_2 の D に沿う**バンド和**という。多様体 M 内の任意のループ l が，∂M に自由ホモトピーで移動できるループ有限個のバンド和になっているとき，M を**部分周辺的**であるという。特に，任意の全周辺的3次元多様体は部分周辺的である。

l を3次元多様体 M 内のループとする。l が，n 個の互いに交わらず，自由ホモトピーで ∂M 内へ移動できるループ $l_1, \ldots, l_n$ の，互いに交わらないバンド $D_1, \ldots, D_{n-1}$ に沿うバンド和であるとしよう。$I = [0, 1]$ を単位区間とする。各 l_i に対し，$S^1 \times I$ から M の中への連続写像 f_i で，$S^1 \times \{0\}$ に制限すると l_i への位相同型であり，$f_i(S^1 \times \{1\}) \subset \partial M$ をみたすものが存在する。とくに，$D_1, \ldots, D_{n-1}$ を用いることにより，$f_1, \ldots, f_n$ はコンパクト平面的曲面 P から M の中への連続写像 f に拡張し，P の境界成分 $b_0, \ldots, b_n$ のうち，b_0 に制限すると l への位相同型であり，$f(b_1 \cup \cdots \cup b_n) \subset \partial M$ をみたすようにできる。

補題 3.1. *$n \geq 0$ 個の境界成分を持ち，コンパクトで連結な種数 0 の曲面 F が，コンパクト連結3次元多様体 M に適切に埋め込まれ，P が M の異なる n 個の境界成分に交わっているとする。このとき，F が M を二つの部分周辺的3次元多様体に分離するならば，M は部分周辺的である。*

証明. l を M 内の F と交わらない任意のループとする。$l \subset M_1$ としても一般性を失わない。コンパクト平面的曲面 P から M_1 の中への連続写像 f で，P の境界成分 $b_0, \ldots, b_m$ のうち，b_0 へ制限すると l への位相同型になり，$f(b_1 \cup \cdots \cup b_m) \subset \partial M_1$ をみたすようなものが存在する。$f(b_i)$ が F に交わっているとしよう。f をホモトピーで変形し，$f(b_i) \cap F$ が F 上の互いに交わらない適切な弧 $a_1, \ldots, a_k$ の和集合になっているものとする。b_i をたどると $f^{-1}(a_1), \ldots, f^{-1}(a_k)$ の順に交わっているとし，b_i の向きから $a_1, \ldots, a_k$ の向きが誘導されているとする。F は M の n 個の異なる境界成分と交わっているから，a_i の終点と a_{i+1} の始点は F の同じ境界成分に属している。従って，$a_1 \cup \cdots \cup a_k$ は F から平面的部分曲面 F' を切り取る。F' を M_1 の中へ押し込み，F と交わっていないものとする。F' に沿う f の変形により，$f(b_i)$ は F に交わらない。従って，この方法を $b_1, \ldots, b_m$ に適用することにより，l は有限個の自由ホモトピーで ∂M の中へ移動できるループのバンド和であることがわかる。

次に，l を M 内の F に $2k$ 個の点 $x_1, \ldots, x_{2k}$ で順番に交わっている任意のループとする。$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ を F 内の互いに交わらない弧の集まりで，各 α_i が x_{2i-1} と x_{2i} を繋いでいるものとする。すると，l と l を繋ぐ互いに交わらないバンドの集まり $\{D_1, \ldots, D_k\}$ で，$D_i \cap F = \alpha_i$ かつ α_i が D_i 内で適切であるようなものをとれる。つまり，l は F と交わらない $k+1$ のループのバンド和になっている。従って，l は 自由ホモトピーで ∂M の中へ移動できるループのバンド和になっている。 □

補題 3.2. 連結な圧縮不可能曲面 P が，部分周辺的な *3* 次元多様体 M に適切に埋め込まれているものとする。このとき，P に沿って M を切り開くと，部分周辺的な *3* 次元多様体 M' になる。

証明. l を M 内の F と交わらない任意のループとする。コンパクト平面的曲面 P から M の中への連続写像 f で，P の境界成分 $b_0, \ldots, b_n$ のうち，b_0 に制限すると l への位相同型になり，$f(b_1 \cup \cdots \cup b_n) \subset \partial M$ をみたすようなものが存在する。f は一般の位置写像で $f(P)$ の分岐点は F 上にないものとしてよい。すると，$f^{-1}(F)$ は互いに交わらないループや適切な弧の和集合になる。P を $f^{-1}(F)$ で切り開いて得られる b_0 を含む成分を P' とする。すると，f の P' への制限は，P' から M' の中への連続写像で，$f(\partial P' - b_0) \subset \partial M'$ をみたしている。従って結論を得る。 □

補題 3.3. M を部分周辺的 *3* 次元多様体とする。int$M$ 内の閉曲面 F は，M を *2* つの部分に分離する。

証明. F が M を分離しないとしよう。M 内のループ l で，F に一点 x で交わるものをとる。コンパクト平面的曲面 P から M の中への連続写像 f で，P の境界成分 $b_0, \ldots, b_n$ のうち，b_0 へ制限すると l への位相同型になり，$f(b_1 \cup \cdots \cup b_n) \subset \partial M$ をみたすものが存在する。f は一般の位置写像で $f(P)$ の分岐点は F 上にないものとしてよい。すると，$f^{-1}(F)$ は互いに交わらないループや適切な弧の和集合になる。しかし，$f(\partial P) \cap F = \{x\}$ であるから，$f^{-1}(F)$ の端点は一点 $f^{-1}(x)$ だけである。これは不可能である。 □

補題 3.4. M を *partially peripheral* *3* 次元多様体とする。M が有限被覆 $\widetilde{M}$ を持つならば，$\widetilde{M}$ は *partially peripheral* である。

証明. l を $\widetilde{M}$ 内の任意のループとする。$p\colon \widetilde{M} \to M$ を射影とする。$p(l)$ が M 内のループになるように，l をアイソトピーで少し変形する。コンパクト平面的曲面 P から M の中への連続写像 f で，P の境界成分 $b_0, \ldots, b_n$ のうち，b_0 へ制限すると $p(l)$ への位相同型になり，$f(b_1 \cup \cdots \cup b_n) \subset \partial M$ をみたすものが存在する。したがって，f のリフト $\tilde{f}$ を考えることにより，コンパクト平面的曲面 $\widetilde{P}$ から $\widetilde{M}$ の中への連続写像で，$\widetilde{P}$ の境界成分 $b'_0, \ldots, b'_m$ のうち，b'_0 へ制限すると l への位相同型になり，$f(b'_1 \cup \cdots \cup b'_m) \subset \partial\widetilde{M}$ をみたすものが得られる。ゆえに，$\widetilde{M}$ は partially peripheral である。 □

補題 3.5. 向きづけ可能コンパクト *partially peripheral* *3* 次元多様体 M がザイフェルト束構造を許容するならば，M の有限被覆としてコンパクト平面的曲面上の S^1-束をとることができる。

証明. M がザイフェルト束構造を許容することにより，M の有限被覆としてコンパクト曲面 F 上の積 S^1-束をとることができる。補題 3.4 により，$F \times S^1$ は partially peripheral である。したがって，補題 3.3 により，$\mathrm{int}(F \times S^1)$ 内の $F \times S^1$ を分離しない飽和閉曲面は存在しない。したがって，F 内の F を分離しないループは存在しない。故に，F はコンパクト平面的曲面になっている。 □

注意 3.6. (1) コンパクト曲面上の積 I-束 は全周辺的なので，部分周辺的である。特に，ハンドル体は部分周辺的である。

(2) コンパクト 3 次元多様体 M の連結和分解あるいは境界連結和分解を考える。ただし，分解の結果 S^3 は得られていないものとする。補題 3.1 と 3.2 により，M が部分周辺的であるための必要十分条件は，分解の結果得られる各多様体が部分周辺的になることである。

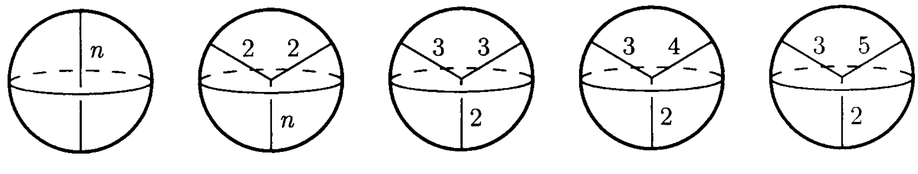
(3) 3 次元球体の境界上の異なる円盤に沿うハンドル体や向きづけ可能閉曲面上の積 I-束の境界連結和に同相な 3 次元多様体を**圧縮体**と呼ぶ。(2) により，圧縮体は部分周辺的である。

(4) コンパクト平面的曲面上の積 S^1-束が partially peripheral であることは容易に確認できる。

(5) L を S^3 内の絡み目とする。外部空間 $S^3 - \mathrm{int}N(L)$ 内の任意のループに対し，D^2 から S^3 の中への連続写像 f で，∂D^2 への制限が l への位相同型になっているものが存在する。f を一般の位置写像とし，特異集合が $N(L)$ と交わらないものとする。このとき，$D^2 - f^{-1}(\mathrm{int}N(L))$ はコンパクト平面的曲面になる。したがって、S^3 内の絡み目の外部空間は partially peripheral である。

4. 既約多様体の場合

補題 4.1. ハンドル体 M 上の向きを保つ有限群作用 G_1 および G_2 は，∂M 上で一致するならば，∂M に関して同値である。



巡回群　二面体群　正四面体群　正八面体群　正二十面体群

図 1

証明. Meeks および Yau の同変ループ定理 [11, Theorem 7] より，互いに交わらない適切なディスクの集まり $\{D_1,\dots,D_n\}$ で，$D_1\cup\cdots\cup D_n$ が G_1-同変であり，M を $D_1\cup\cdots\cup D_n$ に沿って切り開くと3次元球体の集まりになるようなものが存在する。M は既約だから，Meeks および Yau の同変デーンの補題 [11, Theorem 5] より，∂M を止める M のアイソトピーで $D_1\cup\cdots\cup D_n$ を G_2-同変にできる。$H_1,\dots,H_n$ を $D_1,\dots,D_n$ の正則近傍になっている 1-ハンドルとする。$H_1\cup\cdots\cup H_n$ は G_1-同変かつ G_2-同変としてよい。また，$B_1,\dots,B_m$ を $M-H_1\cup\cdots\cup H_n$ の成分の閉包になっている3次元球体とする。

ハンドル体上の向きを保つ有限群作用は，Zimmermann [16] により研究されている。3次元球体上に向きを保つように作用する有限群は，直交群 $SO(3)$ の部分群で，巡回群 $\mathbb{Z}_n$，二面体群 D_n，正四面体群 A_4，正八面体群 S_4，正十二面体群 A_5 のいずれかである。それぞれについて商軌道体を図1に示す。M の G_i による商空間への射影を p_i とすると，軌道体同型 $\overline{\varphi}\colon p_1(\partial M)\to p_2(\partial M)$ が存在する。商空間 $p_1(H_i)$ および $p_2(H_i)$ は巡回群による商軌道体である。$p_1(D_i)$ を $p_1(\partial D_i)$ 上の錐，$p_1(H_i)$ を $p_1(D_i)$ 上の積 I-束と考える。ただし，$p_1(H_i\cap\partial M)$ は I-部分束であり，特異集合は $p_1(D_1)$ の錐点上のファイバーの集合である。同様に $p_2(H_i)$ は $p_2(\partial D_i)$ 上の錐上の I-束となる。若干の調整により，これらの構造は $p_1(H_i\cap\partial M)=p_2(H_i\cap\partial M)$ 上一致するとしてよい。従って，$\overline{\varphi}$ は $p_1(H_1\cup\cdots\cup H_n)$ から $p_2(H_1\cup\cdots\cup H_n)$ 上への軌道体同型へ拡張する。特に，$\overline{\varphi}$ は $p_1(\partial B_i)$ から $p_2(\partial B_i)$ 上への軌道体同型を与えている。$p_1(B_i)$ および $p_2(B_i)$ をそれぞれ $p_1(\partial B_i)$ および $p_2(\partial B_i)$ 上の錐と考えると，$\overline{\varphi}$ は $p_1(B_1\cup\cdots\cup B_m)$ から $p_2(B_1\cup\cdots\cup B_m)$ 上への軌道体同型へ拡張する。結局 $\overline{\varphi}\colon p_1(M)\to p_2(M)$ を得る。従って，∂M 上の自明写像は $\varphi^{-1}G_2\varphi=G_1$ を満たす位相同型 $\varphi\colon M\to M$ へ拡張する。 □

M を圧縮不可能な境界を持つハーケン3次元多様体とする。Jaco, Shalen および Johannson の標準JSJ分解定理 [7][8] によると，対 $(M,\partial M)$ を互いに交わらなず平行でない本質的なアニュラスやトーラスにより以下の3タイプのいずれかの対 (M_i,S_i) に分解する標準的な方法がある。すなわち，(1) M_i がコンパクト曲面上の I-束で S_i が ∂I-部分束であるか，(2) M_i がザイフェルト多様体で S_i が飽和的な曲面であるか，(3) S_i からトーラスの成分を除いた部分集合に沿う M_i のダブルがアトロイダル多様体であるかのいずれかである。

補題 4.2. F を向き付け可能なコンパクト連結曲面で，S^2 にも D^2 にも位相同型ではないものとする。G を $F \times I$ 上の向きを保つ有限群作用で，$F \times \partial I$ 上に自由に作用し，∂I-部分束構造を保つものとする。このとき，G は積構造を保つ作用に $F \times \partial I$ に関して同値である。

証明. Meeks と Scott の定理 [10, Theorem 8.1] により，位相同型 $\varphi\colon F \times I \to F \times I$ で，任意の元 $g \in \varphi^{-1}G\varphi$ が $g(x,t) = (\bar{g}(x), t)$ あるいは $g(x,t) = (\bar{g}(x), 1-t)$ (ただし，$\bar{g}\colon F \to F$ は位相同型) という形式に表されるようなものが存在する。簡単のため，$F_t = F \times \{t\}$，$\varphi_0 = \varphi|_{F_0}$，$\varphi_1 = \varphi|_{F_1}$ と表すことにする。

$\xi\colon F_0 \to F_1$ を，各 $x \in F$ に対して $\xi(x,0) = (x,1)$ をみたす写像と定義する。オリジナルの ∂I-部分束構造は ξ で与えられており，φ は $\varphi_1\xi\varphi_0^{-1}$ で与えられるもう一つの ∂I-部分束構造を誘導する。ここで，$\varphi_1\xi\varphi_0^{-1}$ は ξ にアイソトピックである。p を $F \times I$ の G による商空間への射影とする。$p(F_0)$ は特異点のない曲面であり，$\xi^{-1}\varphi_1\xi\varphi_0^{-1}$ により誘導される $\pi_1(p(F_0))$ の写像は内部自己同型である (もしそうでなければ，リフトとして $\pi_1 F_0$ 上の自明でない外部自己同型が得られ，$\varphi_1\xi\varphi_0^{-1}$ が ξ にアイソトピックでなくなってしまう)。そこで，$\varphi_1\xi\varphi_0^{-1}$ が ξ に一致するように $F_0 \cup F_1$ の正則近傍内で φ を G-同変アイソトピーで動かす。φ_0 が誘導する位相同型 $\overline{\varphi}_0\colon F \to F$ により，写像 $\psi\colon F \times I \to F \times I$ を $(x,t) \in F \times I$ に対して $\psi(x,t) = (\overline{\varphi}_0(x), t)$ と定義する。すると，$\varphi \circ \psi^{-1}|_{F \times \partial I}$ は自明写像であり，$(\varphi \circ \psi^{-1})^{-1}G(\varphi \circ \psi^{-1})$ は積構造を保つ。 □

系 4.3. F を向き付け可能なコンパクト連結曲面で，S^2，D^2，$S^1 \times I$ のいずれにも位相同型ではないものとし，G_1 および G_2 を $F \times I$ 上の向きを保つ有限群作用とする。このとき，G_1 と G_2 の $F \times \partial I$ への制限が同一の自由作用ならば，それらは $F \times \partial I$ に関して同値である。特に，∂F が空でないときには，この同値は位相同型 $\varphi\colon F \times I \to F \times I$ で $\varphi|_{\partial F \times I}$ が $\partial F \times \partial I$ を止めて自明写像にアイソトピックなものにより実現される。

証明. Meeks と Scott [10, Theorem 8.1] の定理より，G_1 によって保たれる積構造が存在する。従って，補題 4.2 により，G_1 と G_2 は $F \times \partial I$ に関して同値である。

∂F が空でないとしよう。$F \times I$ において，各 $x \in F$ について $(x,0)$ と $(x,1)$ を同一視することにより，$F \times S^1$ を構成する。Waldhausen の定理 [6, Theorem VI.18] により，φ により誘導される $F \times S^1$ の S^1-束構造はオリジナルの S^1-束構造にアイソトピックである。従って，すぐに結論が得られる。 □

M を 3 次元多様体，X を M の部分集合，G を M 上の有限群作用とする。このとき，G における X の固定群を $\mathrm{Stab}_G(X) = \{g \in G | g(X) = X\}$ で表す。

補題 4.4. F をコンパクトな平面的曲面とする。G_1 と G_2 を $F \times S^1$ 上の向きを保つ有限群作用で，各 G_i および $F \times S^1$ 内の任意の圧縮不可能トーラス T に対して，$\mathrm{Stab}_{G_i}(T)$ が T 上自由であるとする。このとき，G_1 と G_2 は境界で一致するならば $\partial F \times S\ 1$ に関して同値である。

証明. F は連結であると仮定してよい。補題 4.1 および系 4.3 により，F は D^2 と $S^1 \times I$ のいずれにも位相同型でない場合に限って議論する。

DF を F のダブルとする。このとき，$F \times S^1$ は，$DF \times S^1$ 上の DF-成分における向きを反転させる対合で生成される $\mathbb{Z}_2$ の作用による，$DF \times S^1$ の商空間である。$DF \times S^1$ 上の $\mathbb{Z}_2$ の作用の G_1 による拡大 $\widetilde{G}_1$ を考える。Meeks と Scott の結果 [10, Theorem 2.1] により，$\widetilde{G}_1$ はある積構造を保つ。したがって，G_1 は誘導される積構造を保つ。さらに，[10, Theorem 2.3] により，G_2 は $\partial F \times S^1$ 上で一致する積構造を保つ。したがって，G_1 も G_2 もオリジナルの積構造を保つものとしても一般性を失わない。

G_1 および G_2 から F 上に誘導される作用 $\overline{G}_1$ および $\overline{G}_2$ を考えよう。$\overline{G}_1, \overline{G}_2$ は非自明であるとしてよい。もし $\overline{G}_1$ と $\overline{G}_2$ のうち，例えば $\overline{G}_1$ がループ l 上の点を固定する向き反転写像を含むとすると，l は本質的になるので，$\mathrm{Stab}_{G_1}(l \times S^1)$ は $l \times S^1$ 上自由ではない。同様に，$\overline{G}_1$ が弧 l 上の点を固定する向き反転写像を含むとすると，l が交わる F の境界成分を b としたとき $\mathrm{Stab}_{G_1}(b \times S^1)$ は $b \times S^1$ 上自由ではない。このように、$\overline{G}_1$ も $\overline{G}_2$ も，向きを反転し 1 次元の不動点集合を持つ対合を含まない。F に ∂F に沿って円板 $D_1, \ldots, D_n$ を貼り合わせ，球面 $\overline{F}$ を得る。$\overline{G}_1$ および $\overline{G}_2$ を，$D_1 \cup \cdots \cup D_n$ 上一致するように $\overline{F}$ に拡張されていると考える。各 $\overline{G}_i$ はある $\overline{F}$ 上の球面構造を保ち，回転の群あるいは回転および対極写像の群になっている。$\overline{G}_1$ と $\overline{G}_2$ はともに等長写像の群になるから，同値になる。したがって，商空間 $\overline{F}/G_1$ および $\overline{F}/G_2$ は同じタイプの球面型軌道体になり，$\overline{G}_1$ が対極写像を含むかどうかに応じて錐点を高々一つ含む射影平面か，錐点を高々三つ含む球面になっている ([13, Chapter X] に記載のリストを参照せよ)。$\overline{G}_1$ と $\overline{G}_2$ が $D_1 \cup \cdots \cup D_n$ 上一致していることにより定義される軌道体同型を $f\colon D_1 \cup \cdots \cup D_n/\overline{G}_1 \to D_1 \cup \cdots \cup D_n/\overline{G}_2$ とする。すると，f は $\overline{F}/\overline{G}_1$ から $\overline{F}/\overline{G}_2$ への軌道体同型へ拡張する。さらに，$F \times S^1$ の自己同相を誘導し，G_1 の f による共役が G_2 になり，f は $\partial F \times S^1$ 上自明になる。したがって，定理を得る。 □

系 4.5. M をコンパクト平面的曲面 F 上の積 S^1-束とし，S を ∂M の空でない飽和部分多様体とする。ただし，M がソリッドトーラスのときは $S = \partial M$ とする。G_1 と G_2 を M 上の向きを保つ有限群作用で，各 G_i および M 内の任意の圧縮不可能トーラス T に対して，$\mathrm{Stab}_{G_i}(T)$ が T 上自由であるとする。このとき，G_1 と G_2 は，S 上で一致して ∂M の成分の同じ並べ替えを誘導するならば，∂M への制限が自明写像に S を止めてアイソトピックな位相同型により，S に関して同値である。

証明. 補題 4.1 および補題 4.4 により，M はソリッドトーラスではなく，しかも $B \neq \partial F$ である場合に限って議論する。

各 G_i は ∂M に自由に作用するから，アイソトピーを除き，ファイバーの向きを保つ。補題 4.4 の証明に用いた議論により，G_1 と G_2 は積構造を保ち，S 上一致するものとしてよい。さらに，射影 $p\colon M \to F$ により誘導される F 上の作用 $\overline{G}_1$ および $\overline{G}_2$ は，不動点集合が 1 次元であ

る向き反転対合を含まない。各 $\overline{G}_i$ が F から ∂F に沿って円盤 $D_1,\ldots,D_n$ を貼り付けることにより得られる球面 $\overline{F}$ 上の作用に拡張していると考える。補題 4.4 の証明で示した議論により，商空間 $\overline{F}/\overline{G}_1$ および $\overline{F}/\overline{G}_2$ は同じタイプの球面的軌道体である。$\overline{G}_1$ と $\overline{G}_2$ は $D_1,\ldots,D_n$ の同じ並べ替えを誘導しているから，これらの $D_1\cup\cdots\cup D_n$ への制限は $p(S)$ に関して同値である。明らかに，この同値関係は $p(S)$ を止めて自明写像にアイソトピックな位相同型により実現される。したがって，軌道体同型 $(D_1\cup\cdots\cup D_n)/\overline{G}_1\to(D_1\cup\cdots\cup)/\overline{G}_2$ は $\overline{F}/\overline{G}_1\to\overline{F}/\overline{G}_2$ に拡張する。ゆえに，結論を得る。 □

系 4.6. M を部分周辺的なザイフェルト多様体とし，S を ∂M の空でない飽和部分多様体とする。ただし，M がソリッドトーラスのときは $S=\partial M$ とする。G_1 と G_2 を M 上の向きを保つ有限群作用で，各 G_i および M 内の任意の圧縮不可能トーラス T に対して，$\mathrm{Stab}_{G_i}(T)$ が T 上自由であるとする。このとき，G_1 と G_2 は，S 上で一致して ∂M の成分の同じ並べ替えを誘導するならば，∂M 上の制限が自明写像に S を止めてアイソトピックな位相同型により，S に関して同値である。

証明. 補題 3.5 により，M は有限被覆としてコンパクト平面的曲面 F 上の積 S^1-束 $\widetilde{M}$ をとることができる。$p\colon\widetilde{M}\to M$ を射影とする。各 G_i は $\widetilde{M}$ 上の有限群作用 $\widetilde{G}_i$ に持ち上がる。ただし，$\widetilde{G}_i$ は被覆変換群の G_i による拡大である。とくに，$\widetilde{S}=p^{-1}(S)$ 上 $\widetilde{G}_1=\widetilde{G}_2$ である。

$\widetilde{M}$ 内の圧縮不可能トーラス T_1 で，$\mathrm{Stab}_{\widetilde{G}_1}(T_1)$ が T_1 上自由でないものが存在すると仮定する。補題 3.4 により $\widetilde{M}$ は部分周辺的であるから，補題 3.3 により T_1 は $\widetilde{M}$ を分離している。被覆変換群により，T_1 から圧縮不可能トーラスの集まり $\{T_1,\ldots,T_n\}$ が得られる。すると，$T_1\cup\cdots\cup T_n$ は $\mathrm{Stab}_{\widetilde{G}_1}(T_1)$-同変である。さらに，どの異なる T_i と T_j も横断的に交わっているとしてよい。すると，$T_i\cap T_j$ は互いに交わらないループの和集合になっている。l を $T_i\cap T_j$ 内のループとする。もし，l が T_i 上の円盤の境界となっているなら，T_j が圧縮不可能であることから，l は T_j 上の円盤の境界にもなっている。もし，l が T_i の本質的ループであるなら，l と交わらない $T_i\cap T_j$ 内のループ l' で，$l\cup l'$ が T_i と T_j をアニュラスに分割しているものが存在する。したがって，$\{T_1,\ldots,T_n\}$ に対して切り貼りテクニックを用いることにより，互いに交わらない圧縮不可能トーラスの集まり $\{T_1',\ldots,T_n'\}$ で，被覆変換群のもとで同変なものが存在する。ここで，$T_1'\cup\cdots\cup T_n'$ は $\mathrm{Stab}_{\widetilde{G}_1}(T_1)$-同変であり，その作用は自由ではない。したがって，トーラス T_i' で，$\mathrm{Stab}_{\widetilde{G}_1}(T_i')$ の作用が T_i' 上自由ではないものが存在する。ゆえに，$p(T_i')$ が M 内の圧縮不可能トーラスであるにもかかわらず，$\mathrm{Stab}_{G_1}(p(T_i'))$ は $p(T_i')$ 上自由ではないことになる。したがって，$\widetilde{M}$ 内の任意の圧縮不可能トーラス T に対し，$\mathrm{Stab}_{\widetilde{G}_1}(T)$ は T 上自由でなければならない。

$\widetilde{G}_2$ の場合にも同様に議論することにより，各 $\widetilde{G}_i$ および任意の圧縮不可能トーラス T に対して $\mathrm{Stab}_{\widetilde{G}_i}(T)$ は T 上自由であることがわかる。したがって，系 4.5 により $\widetilde{G}_1$ と $\widetilde{G}_2$ は $\widetilde{S}$ に関して同値である。したがって，G_1 と G_2 は S に関して同値である。 □

補題 4.7. M を境界が圧縮不可能トーラスからなるアトロイダルな連結ハーケン3次元多様体とし，F をトーラスからなる ∂M の部分多様体とする。ここで，M は $D^2 \times S^1$, $S^1 \times S^1 \times I$, クラインボトル上の捩れ I-束のいずれにも位相同型でないものとする。G_1 と G_2 を M 上の向きを保つ有限群作用とする。このとき，G_1 と G_2 の F への制限が同一の自由作用になっているならば，それらは F をとめて自明写像にアイソトピックな位相同型によって F に関して同値である。

証明. Thurston の結果 [13, Chapter V], [10, Theorem 8.3] により，int$M$ には G_1 によって保たれる有限体積の完備双曲構造が与えられているものとする。同様にして，int$M$ は G_2 に保たれるもう一つの双曲構造を入れることが可能である。したがって，Mostow の剛性定理 [13, Chapter V] により，自明写像にアイソトピックな位相同型 $\varphi\colon \mathrm{int}M \to \mathrm{int}M$ により，$\varphi^{-1}G_2\varphi$ が元々与えられている双曲構造を保つようにできる。よって，$\varphi^{-1}G_2\varphi = G_1$ となる。さらに，φ は $\varphi^{-1}G_2\varphi = G_1$ となるように，M の位相同型に拡張する。補題 4.2 の証明で用いた方法により，F 上の G_1-同変アイソトピーを用いて φ の F への制限を自明写像に変形することができる。したがって，F の近傍で φ をアイソトピー変形して F 上自明写像となるようにできる。 □

系 4.8. M を空でない境界を持つコンパクトな連結3次元多様体とする。F を ∂M の部分多様体とし，トーラスを除いても空でなく，F からトーラスを除いた曲面に沿う M のダブル DM が，境界が空であるか圧縮不可能トーラスからなるアトロイダルなハーケン多様体になっているものとする。G_1 と G_2 を M 上の向きを保つ有限群作用とする。このとき，G_1 と G_2 の F への制限が同一の自由作用であるならば，それらは F を止めて自明写像にアイソトピックな位相同型により F に関して同値である。

証明. 補題4.7により，F はトーラスでない成分を持つものとしてよい。M は DM 上の向きを反転する対合で生成される $\mathbb{Z}_2$ 作用の商空間である。F からトーラスを除いた曲面のリフトは圧縮不可能曲面 $\widetilde{F}$ で，どの成分も円板，アニュラス，トーラスのいずれにも位相同型でない。したがって，DM は $D^2 \times S^1$, $S^1 \times S^1 \times I$, クラインボトル上の捩れ I-束のいずれにも位相同型ではない。$\mathbb{Z}_2$ の G_i による拡大として誘導される有限群 $\widetilde{G}_i$ の DM 上の作用を考えよう。$\widetilde{G}_i$ は DM の向きを保たないが，向きを反転させる対合は不動点集合 $\widetilde{F}$ を持つ。したがって，補題4.7の証明で示した議論を現在の場合に適用できるので，自明写像にアイソトピックな位相同型 $\widetilde{\varphi}\colon DM \to DM$ で，$\widetilde{\varphi}^{-1}\widetilde{G}_2\widetilde{\varphi} = \widetilde{G}_1$ をみたすものが存在する。すなわち，自明写像にアイソトピックな位相同型 $\varphi\colon M \to M$ で，$\varphi^{-1}G_2\varphi = G_1$ をみたすものが存在する。補題 4.2 の証明で用いた方法により，φ を F の近傍でアイソトピーで変形し，φ の F への制限が自明写像であるようにできる。 □

定理 4.9. M を部分周辺的なハーケン3次元多様体とし，G_1 と G_2 を M 上の向きを保つ有限群作用で，各 G_i および M 内の任意の圧縮不可能トーラス T に対して，$\mathrm{Stab}_{G_i}(T)$ が T 上自

由であるとする。もし G_1 と G_2 の ∂M への制限が同一の自由作用であるならば，∂M に関して同値である。

証明. 一般性を失うことなく，M は連結であると仮定してよい。補題 4.1 の証明に用いた方法により，互いに交わらない適切なディスクの集まり $\{D_1, \ldots, D_n\}$ で，$D_1 \cup \cdots \cup D_n$ が G_1-同変であり，M を $D_1 \cup \cdots \cup D_n$ に沿って切り開いた結果，圧縮不可能境界を持つ 3 次元多様体の集まりになる。さらに，∂M を止める M のアイソトピーにより，$D_1 \cup \cdots \cup D_n$ を G_2-同変にできる。したがって，∂M が圧縮不可能であるとして議論を進める。

F を M 内のどの二つも平行でない本質的アニュラスと本質的トーラスの和集合で，M の標準 JSJ 分解を与えているものとする。F はアイソトピーを除き一意的であることが知られている。Meeks と Scott の定理 [10, Theorem 8.6] により，F を G_1-同変であるように選ぶことができ，アイソトピーにより F を G_2-同変にすることができる。また，このアイソトピーを ∂F 上で不変になるように選べることも確かめられる。したがって，F の正則近傍 N が G_1-同変かつ G_2-同変であると考えることにする。

$\mathrm{cl}(M-N)$ の ∂M に交わる連結成分 X をとる。明らかに，$G_1(X) = G_2(X)$ となっている。本節の議論により，$G_1(X)$ 上 $G_1 = G_2$ と考える。もし $G_1(X) = M$ であるならば，すぐに結果が得られる。もし $G_1(X) = \mathrm{cl}(M-N) \neq M$ であるならば，N の各成分は $D^2 \times S^1$ あるいは $S^1 \times S^1 \times I$ に位相同型であるから，補題 4.1 および 4.2 により G_1 と G_2 の N への制限が ∂N に関して同値になる。もし $G_1(X) \neq M$ かつ $G_1(X) \neq \mathrm{cl}(M-N)$ であるならば，$G_1(X)$ を除くことにより，標準 JSJ 分解で生ずる部分多様体の数を減らすことができる。したがって，帰納法により結果が得られる。 □

注意 4.10. S^1 を $\mathbb{R}^2$ 上の単位円とする。$\mathbb{R}^2$ 上の原点を中心とする角度 θ の回転を Rot_θ，直線 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y\cos\theta = x\sin\theta\}$ に関する反転を Ref_θ で表す。以下の例では，定理 4.9 の条件が満たされない場合に何が生じうるかを示している。

(1) $M = S^1 \times S^1 \times I$ 上の向きを反転させる二つの対合 f_1，f_2 が，$(x,y,t) \in M$ に対して $f_1(x,y,t) = (x,y,1-t)$，$f_2(x,y,t) = (\mathrm{Rot}_{2\pi t}(x), y, 1-t)$ を満たしているものとする。すると，f_1 は $S^1 \times S^1 \times \{1/2\}$ 上の点を固定し，f_2 は不動点を持たない。したがって，f_1 と f_2 がそれぞれ生成する有限群作用は，境界で一致しているが，同値ではない。

(2) $M = S^1 \times S^1 \times I$ 上の向きを保つ対合 ρ_θ を，$(x,y,t) \in M$ に対して $\rho_\theta(x,y,t) = (\mathrm{Ref}_{\theta t}(x), \mathrm{Ref}_0(y), t)$ と定義する。すると，ρ_0 と ρ_π がそれぞれ生成する有限群作用は境界で一致する。さらに，$\mathrm{Ref}_\theta = \mathrm{Rot}_\theta \circ \mathrm{Ref}_0 \circ \mathrm{Rot}_{-\theta}$ であるから，$(x,y,t) \in M$ に対して $h(x,y,t) = (\mathrm{Rot}_{\pi t}(x), y, t)$ をみたす位相同型 $h\colon M \to M$ により，$h^{-1} \circ \rho_\pi \circ h = \rho_0$ となる。しかし，ρ_0 と ρ_π の不動点集合はそれぞれ $S^1 \times S^1 \times \{0\}$ と $S^1 \times S^1 \times \{1\}$ を結ぶ 2 本の弧であるが，接続の状態が異なるので，これらの有限群作用は ∂M に関して同値ではない。

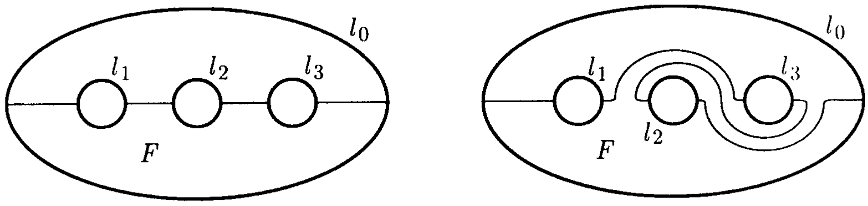


図 2

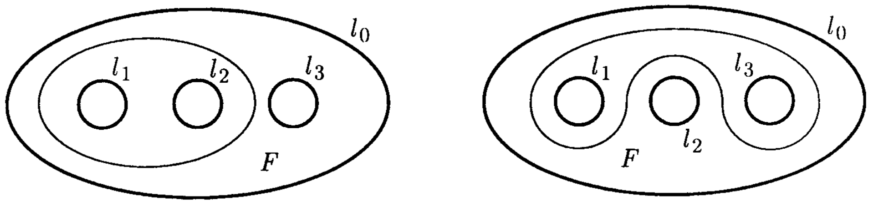


図 3

(3) F を境界成分 l_0, l_1, l_2, l_3 を持つコンパクトな平面的曲面とし，f_1 および f_2 を $F \times S^1$ 上の向きを保つ対合で，境界で一致しているものとする。f_1 と f_2 が積構造を保ち，F 上の向きを反転させる対合 $\bar{f}_1$ および $\bar{f}_2$ を誘導しているとする。また，図2に示すように，$\bar{f}_1$ の不動点集合 $\mathrm{Fix}(\bar{f}_1)$ が l_0, l_1, l_2, l_3, l_0 をこの順番に接続する弧の和集合であり，$\mathrm{Fix}(\bar{f}_2)$ が l_0, l_1, l_3, l_2, l_0 の順に接続する弧の和集合であるとする。このとき，f_1 と f_2 がそれぞれ生成する向きを保つ有限群作用は $\partial F \times S^1$ に関して同値ではない。

(4) (3) と同じ状況を考える。ただし，$\bar{f}_1(l_0) = l_1, \bar{f}_1(l_2) = l_3$ をみたし，図3のように，$\mathrm{Fix}(\bar{f}_1)$ が $l_0 \cup l_3$ と $l_1 \cup l_2$ を分離するループであり，$\mathrm{Fix}(\bar{f}_2)$ が $l_0 \cup l_2$ と $l_1 \cup l_3$ を分離するループであるとする。このとき，f_1 と f_2 がそれぞれ生成する向きを保つ有限群作用は $\partial F \times S^1$ に関して同値ではない。

定理4.9の証明は，空でない境界を持つハーケン多様体 M が部分周辺的でないとしても，M 内の各ザイフェルト多様体が有限被覆にコンパクト平面的曲面上の積 S^1-束をとることができる場合には，同様の結論を導く。したがって，直ちに次の系が得られる。

系 4.11. M をコンパクトで向き付け可能な閉 *3* 次元多様体で，偽 *3* 次元球体を含まないものとする。また，F を M 内の空でない曲面で，その外部が本質的トーラスや本質的球面を含まないものとする。このとき，M 上の任意の *2* つの向きを保つ有限群作用は，F への制限が同一の自由作用であるならば，F に関して同値である。

5. 可約多様体

補題 5.1. $M_1, \ldots, M_n$ を空ではない境界を持つハーケン多様体で *3* 次元球体ではないものとし，$M = M_1 \# \cdots \# M_n$ とする。このとき以下が成り立つ。

(1) G を M 上の有限群作用で，任意の本質的球面 S に対して $\mathrm{Stab}_G(S)$ が自明であるとする。このとき，$X_1, \ldots, X_n$ を成分とする G-同変コンパクト部分多様体 X_G で，以下をみたすものが存在する:

(a) $\partial X_G - \partial M$ が本質的球面で構成され，

(b) X_i は M_i から有限個の開球体を除いたものに位相同型であり，

(c) X_G 内に本質的球面からなる G-同変曲面 が存在しない。

(2) (1) において，固定群が非自明な $M - \partial X_G$ の成分は高々一つである。

(3) G_1 と G_2 を M 上の有限群作用で，各 G_i および任意の本質的球面 S に対して $\mathrm{Stab}_{G_i}(S)$ が自明であるとする。このとき，G_1 と G_2 が ∂M 上で一致するならば，∂M を止める M のアイソトピーにより，X_{G_1} を X_{G_2} に変形できる。

証明. (1) 同変球面定理 [14] により，$\mathrm{int}M$ 内の圧縮不可能球面で構成される G-同変曲面 F で，$\pi_2 M$ を $\pi_1 M$-加群として生成しているものが存在する。$N(F)$ を F の G-同変な正則近傍とする。$M - \mathrm{int}N(F)$ の n 個の成分 $X_1, \ldots, X_n$ で，X_i が M_i から有限個の開球体を除いたものに位相同型なものが存在する。ここで，$X_1 \cup \cdots \cup X_n$ は (a) と (b) を満たす M の G-同変部分多様体である。

p を M から G による商空間への射影とする。G は $\partial G(X_i) - \partial M$ 上に自由に作用するから，$p(\partial X_i - \partial M)$ は特異集合と交わらない球面 $S_1, \ldots, S_k$ で構成されている。特異集合は 1 次元複体であるから，$p(X_i)$ の互いに交わらない適切な弧の集まり $\{a_1, \ldots, a_{k-1}\}$ で，特異集合とも交わらず，a_j が S_j と S_{j+1} を連結しているようなものが存在する。$N(a_j)$ を a_j の $p(M)$ における正則近傍とし，$G(X_i)$ から $p^{-1}(\mathrm{int}N(a_1) \cup \cdots \cup \mathrm{int}N(a_{k-1}))$ を取り除くと，$G(X_i)$ 内の圧縮不可能球面で構成される任意の G-同変曲面は，アイソトピーで $G(\partial X_i)$ の中へ移動できることがわかる。従って，この方法を他の軌道にも適用すると，最終的に $X_1 \cup \cdots \cup X_n$ が (a)，(b)，(c) を満たす。

(2) $M - \partial X_G$ の異なる成分 Y_1 および Y_2 で，固定群 $\mathrm{Stab}(Y_1)$ および $\mathrm{Stab}(Y_2)$ が自明でないものが存在するとしよう。ここで，∂X_G 内の任意の本質的球面は M を分離している。Y_1 の $\mathrm{Stab}(Y_2)$ による軌道の成分で，Y_1 と異なるものをとり，それを Y_3 とする。すると，Y_3 と Y_1 は $M - Y_2$ の異なる成分に含まれ，$\mathrm{Stab}(Y_3)$ は $\mathrm{Stab}(Y_1)$ に同型になる。同様に，Y_2 の $\mathrm{Stab}(Y_3)$ による軌道の成分で，Y_2 と異なるものをとり，それを Y_4 とすると，Y_4 と $Y_1 \cup Y_2$ は $M - Y_3$ の異なる成分に含まれ，$\mathrm{Stab}(Y_4)$ は $\mathrm{Stab}(Y_2)$ に同型になる。この方法を繰り返すことにより，$M - \partial X_G$ の互いに異なる成分の無限列が生成され，M がコンパクトであることに反する。

(3) (1) の条件 (c) により，X_{G_1} はアイソトピーにより X_{G_2} を包含するように変形できる。同様に，X_{G_2} もアイソトピーで X_{G_1} を包含するように変形できる。従って，$\partial X_{G_1} - \partial M$ と $\partial X_{G_2} - \partial M$ は平行である。すなわち，∂M を止める M のアイソトピーにより，∂X_{G_1} を ∂X_{G_2} に変形できる。従って，結論を得る。 □

定理 5.2. M をコンパクトで向き付け可能な部分周辺的 3 次元多様体で，偽 3 次元球体を含まないものとする。

(1) M は素分解 $M = M_1\#\cdots\#M_n$ を許容する。ただし，$M_1,\ldots,M_n$ は部分周辺的既約多様体である。

(2) G_1 および G_2 を次の条件をみたす M 上の向きを保つ有限群作用とする。

(a) ある ∂M_i に対応する曲面 $B \subset \partial M$ について，$G_1(B) = B$ が成り立つ。

(b) 各 G_i および球面またはトーラスに位相同型な任意の本質的曲面 F について，F の固定群が F 上自由である。

このとき，G_1 と G_2 の ∂M への制限が同一の自由作用であるならば，それらは ∂M に関して同値である。

証明. 補題 3.3 により，M を連結和分解しても $S^2 \times S^1$ は得られない。したがって，M 内の圧縮不可能球面に対して補題 3.2 を繰り返し適用することにより，(1) の連結和分解が得られる。

G_1 と G_2 が非自明であるとしよう。条件 (b) により，B は球面ではない。∂M の球面である成分に G_1, G_2 は自由に作用しており，球体を貼り付けて蓋をしてできる 3 次元多様体も部分周辺的であることが容易に確認できる。したがって，各 M_i は球体ではないとしてよい。X を補題 5.1(1) で得られる G_1-同変部分多様体とすると，補題 5.1(3) により，G_2-同変部分多様体にアイソトピックである。また，∂X のどの球面も M を分離するので，G_1 と G_2 は ∂X の球面を同じように並べ替える。したがって，∂X 上 $G_1 = G_2$ であると仮定する。

$M - \partial X$ の成分の閉包を $N_1,\ldots,N_n$ とする。明らかに，$\mathrm{Stab}_{G_1}(N_i)$ および $\mathrm{Stab}_{G_2}(N_i)$ は ∂N_i 上一致している。もし任意の N_i に対して $\mathrm{Stab}_{G_1}(N_i)$ が自明であるならば，G_1 は自明になってしまう。従って，補題 5.1 (2) により $\mathrm{Stab}_{G_1}(N_1)$ は自明ではなく，$\mathrm{Stab}_{G_1}(N_2),\ldots,\mathrm{Stab}_{G_1}(N_n)$ は自明であるとする。定理の条件 (a) により，N_1 は部分周辺的なハーケン多様体から有限個の開球体を除いたものに位相同型である。したがって，定理 4.9 により，$\mathrm{Stab}_{G_1}(N_1)$ と $\mathrm{Stab}_{G_2}(N_1)$ は ∂N_1 に関して同値になることがわかる。したがって，定理を得る。 □

注意 5.3. 定理 5.2 の条件が満たされないとき，以下の状況が生ずる可能性がある: p と q を互いに素な正整数とし，M を部分周辺的な連結既約多様体 M' の pq 個の連結和であるとする。M の部分多様体 X で，X が M' から開球体を一つ除いたものに位相同型な成分 pq 個で構成され，$M - X$ が 3 次元球面から pq 個の球体を除いたものになっているものが存在する。以下の条件をみたす M 上の向きを保つ有限群作用 G_1 および G_2 を考える。

(1) G_1 と G_2 は X 上の同一の作用を誘導し，

(2) G_1 は位数 p の周期写像 g_1 と位数 q の周期写像 g_2 で $\mathrm{Fix}(g_1), \mathrm{Fix}(g_2)$ が $M - X$ 内の同じループになっているもので生成され，

(3) G_2 は位数 p の周期写像 h_1 と位数 q の周期写像 h_2 で $\mathrm{Fix}(h_1), \mathrm{Fix}(h_2)$ が $M - X$ 内のホップ絡み目の各成分になっているもので生成される。

このとき，$\mathrm{Fix}(g_1 \circ g_2) = \mathrm{Fix}(g_1)$ であるが，$\mathrm{Fix}(h_1 \circ h_2) = \phi$ となる。したがって，G_1 と G_2 は ∂M で一致しても同値にはならない。

参考文献

[1] M. Brin, K. Johannson and P. Scott, Totally peripheral 3-manifolds, Pacific J. Math. 118 (1985) 37–51.

[2] L. Harris and P. Scott, Non-compact totally peripheral 3-manifolds, Pacific J. Math. 167 (1995) 119–127.

[3] J. Hempel, "3-Manifolds", Annals of Mathematics Studies 86, Princeton Univ. Press, 1976.

[4] T. Ikeda, PL finite group actions on 3-manifolds which are conjugate by homeomorphisms, Houston J. of Math. 28 (2002) 133–138.

[5] T. Ikeda, Finite group actions on partially peripheral 3-manifolds, preprint.

[6] W. Jaco, "Lectures on three-manifold topology", Conference board of Math. 43, Amer. Math. Soc., 1980.

[7] W. Jaco and P. Shalen, "Seifert fibered spaces in 3-manifolds", Mem. Amer. Math. Soc. 220, 1979.

[8] K. Johannson, "Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundaries", Lect. Notes in Mat. 761, Springer, 1979.

[9] K. Kawakubo, "The theory of transformation groups", Oxford Univ. Press, 1991.

[10] W. H. Meeks and P. Scott, Finite group actions on 3-manifolds, Invent. Math. 86 (1986) 287–346.

[11] W. H. Meeks and S. T. Yau, The equivariant Dehn's lemma and loop theorem, Comment. Math. Helvetici 56 (1981) 225–239.

[12] E. Moise, Affine structures in 3-manifolds V. The triangulation theorem and Hauptvermutung, Ann. of Math. 56 (1952) 96–114.

[13] J. W. Morgan and H. Bass, "The Smith conjecture", Academic press, 1984.

[14] S. P. Plotnick, Finite group actions and nonseparating 2-spheres, Proc. Amer. Math. Soc. 90 (1984) 430–432.

[15] B. Zimmermann, Finite group actions on Haken 3-manifolds, Quart. J. Math. Oxford (2) 37 (1986) 499–522.

[16] B. Zimmermann, Genus actions of finite groups on 3-manifolds, Michigan Math. J. 43 (1996) 593–610.

[17] B. Zimmermann, Finite maximal orientation reversing group actions on handlebodies and 3-manifolds, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 48 (1999) 549–562.