Remarks on the iteration of $f(z) = z\exp(z+\mu)$

諸澤 俊介
(Shunsuke MOROSAWA)
高知大 理

1 序

本稿では超越整関数族 $\{f_\mu(z) = z\exp(z+\mu)\}$ を考える。そのファトウ集合を $F(\mu)$ ジュリア集合を $J(\mu)$ で表す。特に断らない限り μ は実数とする。容易に判るように $\mu < 0$ であれば $z = 0$ は f_μ の吸引不動点となり $F(\mu) \neq \emptyset$ である。これに対して古典的問題として、$F(\mu) = \emptyset$（あるいは $J(\mu) = \mathbf{C}$）となる μ の存在が考えられた。これに対して Baker ([1]) がそのような μ の存在を示した。さらに張 ([4]) がそのような μ が可算無限個存在する事を示した。続いて黒田ー張 ([5]) はそのような μ の列 $\{\mu_n\}$ で $\mu_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ となるものが存在する事を示した。

近年では、Sullivan の有理関数の反復合成におけるファトウ集合の分類定理と遊走領域の非存在定理 ([6]) により、ある有理関数のジュリア集合がリーマン球全体になるかどうかは、その関数の特異値の軌道を調べればよいことが判る。さらにこの論法は特異有限型の超越整関数にもあてはまる。例えば、すべての特異値の軌道が前周期的となるような超越整関数のファトウ集合は空集合となることが示される。実際、[5] において黒田ー張は f_μ の特異点 -1 について、その軌道の点が $n(\geq 2)$ 回で初めて不動点に移るような μ の中で最大となるものを μ_n とし、$\mu_n \to \infty$ を示した（本講究録、黒田の原稿参照）。

この黒田ー張の結果に関連して本稿では次の定理を示す。

定理 1

$$E = \{\mu \mid J(\mu) = \mathbf{C}\}$$

とすると、E のルベーグ測度は正である。

証明には単峰写像に関する定理を使う。

2 $f_\mu(z) = z\exp(z+\mu)$

まず f_μ の性質についてまとめておく。f_μ の特異点は -1 だけであり、漸近値は 0 だけである。すなわち f_μ は特異有限型である。したがって、$F(\mu)$ はベーカー領域も遊走領域も持たない。さらに、μ が実数のときには、これらの特異値の軌道は実軸に含まれるのでジーゲル円板も存在しない。また f_μ は超越整関数なのでエルマン環も存在しない。すなわち $F(\mu)$ に含まれるものは吸引領域または放物的領域である。

f_μ の不動点は 0 と $-\mu$ である。さらに

$$\begin{aligned} \mu < 0 &\quad\Rightarrow\quad 0 : \text{吸引不動点} \\ \mu = 0 &\quad\Rightarrow\quad 0 : \text{放物的不動点} \\ \mu > 0 &\quad\Rightarrow\quad 0 : \text{反発不動点} \end{aligned}$$

であり、$\mu < 0$ のときには $f_\mu^n(-1) \to 0$ $(n \to \infty)$ は容易に判る。したがって、$\mu < 0$ のときには 0 を含む吸引領域が $F(\mu)$ のただひとつの不変成分である。また

$$\begin{aligned} 0 < \mu < 2 &\quad\Rightarrow\quad -\mu : \text{吸引不動点} \\ \mu = 2 &\quad\Rightarrow\quad -\mu : \text{放物的不動点} \end{aligned}$$

である。したがって $\mu \leq 2$ で $J(\mu) \neq \mathbf{C}$ である。

これからは $\mu > 2$ として -1 の軌道について調べたい。ここで、-1 の軌道は実軸の負の部分に含まれる事に、さらに

$$\{f_\mu^n(-1)\}_{n=0}^\infty \subset [f_\mu(-1),\ 0]$$

であることに注意する。また f_μ は $(-\infty,\ 0]$ で単峰写像であることにも注意する。

3 単峰写像

単峰写像に関しては次のヤコブソンによる有名な定理がある ([3])。

[redacted]

定理 **2**

$$h_a(x) = ax(1-x) \qquad\qquad (0 < a \leq 4)$$

とするとき、次の集合のルベーグ測度は正となる。

$$\Lambda = \{a \mid h_a \text{ がルベーグ測度に絶対連続な不変測度を持つ。}\}$$

このような不変測度の存在は、この h_a を複素二次多項式と見なしたときに吸引領域や放物的領域の非存在を意味し、したがってそのファトウ集合が空集合である事が判る。

ヤコブソン以後、この定理の簡略化や、一般化が盛んに行われている。

この定理は実二次多項式の力学系の中にはカオス的なものが豊富にあることを示している。そのことは、分岐図を見ると直感的に納得できる。$f_\mu(z) = z\exp(z+\mu)$ の分岐図を示しておく。

f_μ の適当な共役をとることにより、$[0,\ 1] \to [0,\ 1]$ の単峰写像を考える。そこで $k_\alpha(x) = -\alpha x,\ \alpha = \exp(-1+\mu)$ を用いて共役をとる。ただし $\mu > 1$ とする。したがって $\alpha > 1$ である。

$$g_\alpha(x) = k_\alpha^{-1} f_\mu k_\alpha(x) = \alpha x \exp(-\alpha x + 1)$$

とすると $1/\alpha$ は g_α の特異点となる。さらに特異値と不動点をまとめておくと

$$\begin{array}{ll} g_\alpha \text{ の特異値} & 0,\quad 1 \\ g_\alpha \text{ の不動点} & 0,\quad \frac{1}{\alpha}(1+\log\alpha) \end{array}$$

となる。

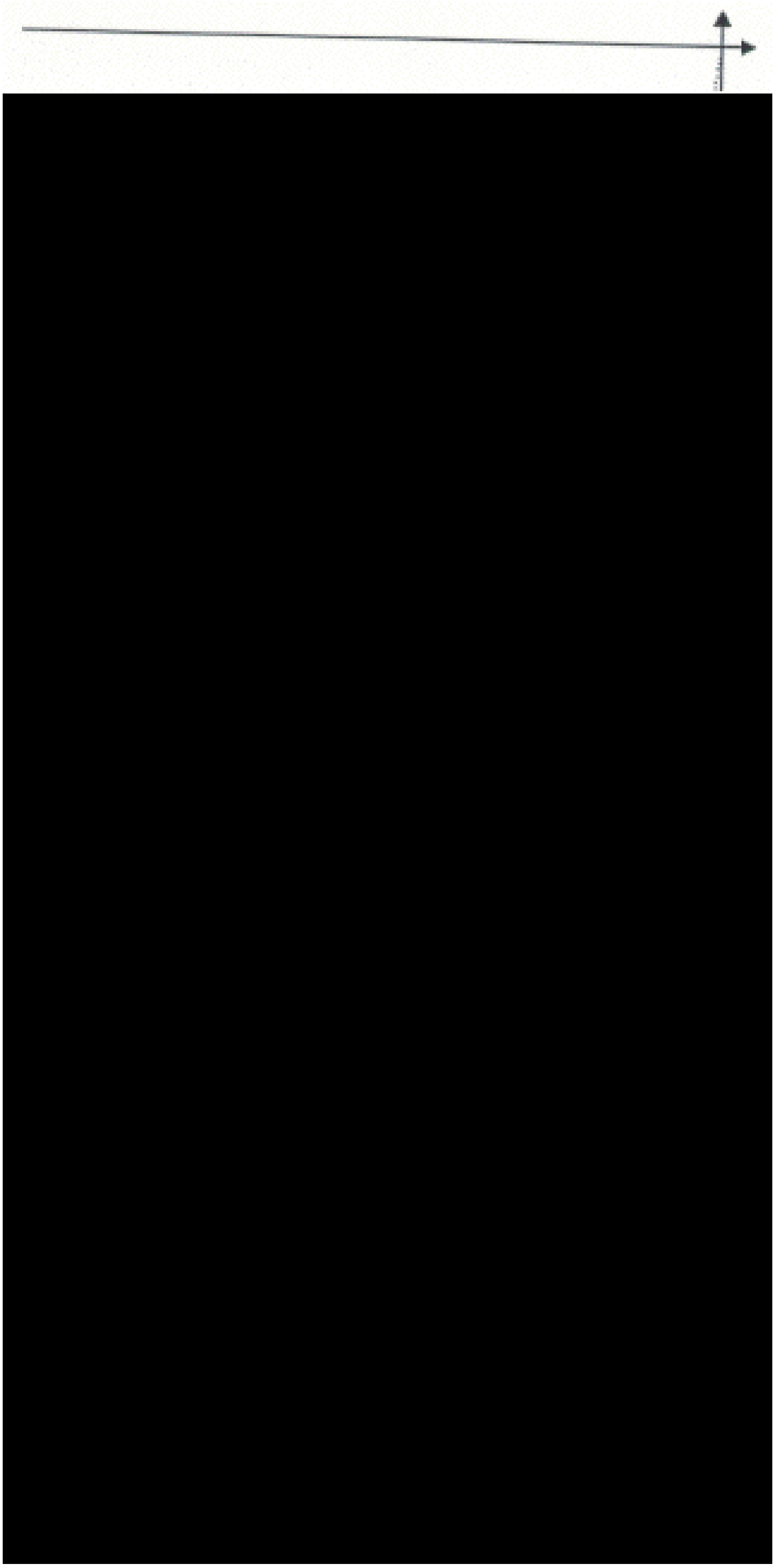
g_α のシュワルツ微分を計算すると

$$Sg_\alpha(x) = -\frac{\alpha^2}{2(1-\alpha x)^2}\{(\alpha x - 2)^2 + 2\} < 0$$

となるので g_α は S-unimodal である。

さらに数学的帰納法により次が示される。

$$g_\alpha^n(x) = \alpha^n x \exp\left\{\alpha \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\alpha} - g_\alpha^k(x)\right)\right\} \tag{1}$$



$$(g_\alpha^n)'(x) = g_\alpha^n(x)\frac{g'_\alpha(x)}{g_\alpha(x)}\alpha^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\alpha} - g_\alpha^k(x)\right) \tag{2}$$

ここで、定理 1 の証明に使う単峰写像に関する定理の準備をする。$h_t(x) = H(x,\ t)$, $x \in [0,\ 1]$, $t \in [0,\ 1]$ とし、各 h_t は $[0,\ 1]$ から $[0,\ 1]$ への C^2 単峰写像とする。$h = h_0$ とおき、h の特異点を c とする。以下のような条件を考える。

(ND) $h''(c) \neq 0$

(CE) ある a, b で、すべての $n \geq 0$ に対して

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & |dh^n(f(c))| > \exp(an - b) & \\ \text{(ii)} & |dh^n(x)| > \exp(an - b) & \text{for } x \in h^{-n}(c) \end{array}$$

(Hyp) h のすべての周期点は反発的。

(W) $\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log|dh(h^n(c))| = 0$

(NV$_t$) $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\partial H(h_t^j(c),\ t)}{dh_t^j(h_t(c))} \neq 0$

さらに次の集合を定義する。

$$\Lambda = \{t \mid h_t \text{ は (ND), (CE), (Hyp), (W), (NV}_t\text{) を満たす。}\}$$

このとき次の定理が辻井により示された。

定理 3 Λ のルベーグ測度は正であり、Λ の各写像はルベーグ測度に絶対連続な不変測度を持つ。

実際には、辻井は [8] において単峰写像の族に限らずより広い族に対して上の定理を証明している。

4 証明

定理 3 を用いて定理 1 を証明する。

いま u を特異点が 3 回の反復合成で初めて不動点 $(1 + \log u)/u$ に写るものの中で最大のものとする。すなわち

$$\begin{aligned} g_u^3\left(\frac{1}{u}\right) &= \frac{1}{u}(1 + \log u) \\ g_u^j\left(\frac{1}{u}\right) &\neq \frac{1}{u}(1 + \log u) \quad (j = 0,\ 1,\ 2) \end{aligned}$$

である。このとき [5] より $u>3$ がわかる。この u に対して条件 (ND), (CE), (Hyp), (W), (NV$_t$) を調べる。

(ND) は明らかである。

(CE) については、まず (i) を示す。$n \geq 3$ に対して

$$g_u^n\left(\frac{1}{u}\right)=\frac{1}{u}(1+\log u)$$

であり、$g_u(1/u)=1$ であるから (2) により

$$(g_u^n)'(1)=\frac{1}{u}(1+\log u)\frac{g_u'(1)}{g_u(1)}u^{n-1}\left(\frac{1}{u}-g_u(1)\right)\prod_{k=2}^{n-1}\frac{-\log u}{u}$$

が $n \geq 3$ に対して成り立つ。明らかに $(g_u^0)'(1) \neq 0$, $(g_u^1)'(1) \neq 0$, $(g_2^2)'(1) \neq 0$ であるから (i) がしたがう。さらに g_α が S-unimodal であることと (i) が成立する事より (ii) が成り立つ。

(Hyp) 漸近値 0 が反発不動点であり、特異点 -1 が前周期的である事からすべての周期点が反発的であることが従う。

(W) $n \geq 3$ に対して $g_u(1/u)=(1+\log u)/u$ であるから、成立する。

(NV$_t$) (1), (2) より

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial_\alpha g_u\left(g_u^n\left(\frac{1}{u}\right)\right)}{dg_u\left(\frac{1}{u}\right)} &= \frac{1}{u}+\frac{1}{u(1-u)}\sum_{n=0}^{\infty}(-\log u)^{-n}\\ &= \frac{1}{u}+\frac{1}{u(1-u)}\frac{\log u}{1+\log u}\end{aligned}$$

ここで $u>3$ より

$$\left|\frac{1}{1-u}\right|<\frac{1}{2} \quad \text{かつ} \quad 0<\frac{\log u}{1+\log u}<1$$

であるから

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial_\alpha g_u\left(g_u^n\left(\frac{1}{u}\right)\right)}{dg_u\left(\frac{1}{u}\right)}\right|>0$$

となる。

5　注意

この黒田ー張の定理は超越整関数 f_μ のグラフに注目すれば、実二次多項式の分岐の問題を思い起こさせる。そこで関連した問題として次が考えられる。

問題 f_μ が hyperbolic となる μ の集合は $\mathbf{R}$ で開かつ稠密であるか？

hyperbolic なものの集合が開集合である事は容易に判るが、実二次多項式についてはさらに Świątek ([7]) が稠密である事を示した。

このような実二次多項式族との類似性から μ を複素数としたときにもそれなりの予想ができる。実際

$$f_\lambda(z) = \lambda z \exp(z)$$

とかくことにし、$\{f_\lambda^n(-1)\}$ が有界集合となる λ の集合の概形をパソコンで描いてみると、そこから実軸方向に無限大まで引き伸ばされたような２つのマンデルブロー集合が原点で接しているような形が想像できる。実際に Fagella は [2] で二次式類似写像を用いて、この分岐図の中にミニマンデルブロー集合の存在を示している。

参考文献

[1] I. N. Baker, Limit functions and sets of non-normality iteration theory, Ann. Acad. Sci. Fenn., A.I. Math., 467(1970), 1-9.

[2] N. Fagella, Limiting dynamics for the complex standard family, Int. J. Bifurcation and Chaos, 5(1995), 673-699.

[3] M. V. Jakobson, Absolutely continuous invariant measures for one parameter families of one dimensional maps, Commun. Math. Phys., 122(1989), 293-320.

[4] C. M. Jang, Julia set of the function $z\exp(z+\mu)$, Tohoku Math. J., 44(1992), 271-277.

[5] T. Kuroda & C. M. Jang, Julia set of the function $z\exp(z+\mu)$ II, preprint.

[6] D. Sullivan, Quasiconformal homeomorphisms and dynamics I. Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains, Ann. Math., 122(1985), 401-418.

[7] G. Świątek Hyperbolicity is dense in the real quadratic family, preprint.

[8] M. Tsujii, Positive Lyapunov exponents in families of one dimensional dynamical systems, Invent.math., 111(1993), 113-137.