

On Non-cooperative and Cooperative  
Dynkin's Stopping Problem

九州工業大学 工学部      大坪義夫 (Yoshio Ohtsubo)

§ 0. 序

ゲーム論的な最適停止問題（いわゆる，Dynkin 問題）は、最初に零和型として Dynkin[4]によって導入・研究され、多くの研究者によって発展されている。また、非協力型へと拡張されている。

この報告では、§ 1 で非協力型 Dynkin 問題を考え、均衡点の存在条件として単調性を与える。§ 2 では協力型を定式化し、パレート最適な均衡点の存在を与え、最適値の性質等を述べる。

非協力型・協力型の両方を通して用いる記号等は、以下のとおりである：

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$  を確率空間、 $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  を  $\mathcal{F}$  の部分  $\sigma$ -field の非減少列とし、 $\Gamma_n$  を  $\tau \geq n$  をみたす  $(\mathcal{F}_n)$ -停止時間  $\tau$  の全体とし、 $\Gamma_n^2 = \Gamma_n \times \Gamma_n$  とおく。但し、 $N = \{0, 1, 2, \dots\}$  は時間パラメータ空間である。また、 $W$  を  $\sup_n X_n^+$  が可積分で、 $X_n^-$  が一様可積分である  $(\mathcal{F}_n)$ -adapted な確率変数列  $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  の全体とする。この報告で考える停止ゲーム（Dynkin 問題）では、プレイヤーは 2 人であり、各プレイヤーの評価値は、プレイヤー I、II の戦略として各々  $\tau, \sigma$  をとるとき、

$$g_1(\tau, \sigma) = X_\tau^1 I_{\tau < \sigma} + Y_\sigma^1 I_{\sigma < \tau} + W_\tau^1 I_{\tau = \sigma}, \quad (\text{player I})$$

$$g_2(\tau, \sigma) = X_\sigma^2 I_{\sigma < \tau} + Y_\tau^2 I_{\tau < \sigma} + W_\tau^2 I_{\tau = \sigma}, \quad (\text{player II})$$

とする。ここで、 $X^i, Y^i, W^i \in W$  ( $i=1, 2$ )、 $(\tau, \sigma) \in \Gamma_n^2$  とし、 $W_\infty^i = \limsup_n W_n^i$  ( $i=1, 2$ ) とおく。このとき、 $i$ -プレイヤー ( $i=1, 2$ ) は

$$G_n^i(\tau_1, \tau_2) = E[g_i(\tau_1, \tau_2) | \mathcal{F}_n], \quad (\tau_1, \tau_2) \in \Gamma_n^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

を  $\tau_i$  に関して最大にしたい。以下、 $U \in W$  に対して、 $U_\infty = \limsup_n U_n$  とおく。

## § 1. 非協力型 Dynkin 問題

この節では、非協力型 Dynkin 問題を考える。このような問題は、Bensoussan-Friedman[2], Morimoto[9,10], Ohtsubo[12], Nagai[11]等で、すでに研究されていて、 $Y^i$  に関するマルチンゲール条件のもとで均衡点（一般に陰な）が存在することが証明された。ここでは、 $X^i$  に関する単調性のもとで、陽な均衡点の存在を与える。これは、最適停止問題に対する Chow-Robbins[3]の "Monotone case" の拡張である。また、Mamer[8]の結果とは類似であるが本質的に異なる。

この節を通して、次の仮定をする：

仮定.  $X_n^i \leq W_n^i \leq Y_n^i, \quad i=1,2, \quad n \in \mathbb{N}.$

定義1.1.  $n \in \mathbb{N}$  に対して、 $(\tau^*, \sigma^*) \in \Gamma_n^2$  かつ

$$G_n^1(\tau^*, \sigma^*) \geq G_n^1(\tau, \sigma^*), \quad \forall \tau \in \Gamma_n,$$

$$G_n^2(\tau^*, \sigma^*) \geq G_n^2(\tau^*, \sigma), \quad \forall \sigma \in \Gamma_n,$$

のとき、 $(\tau^*, \sigma^*)$  を  $n$  における (Nash) 均衡点という。

$U \in \mathcal{W}$  に対して、

$$\tau_n(U) = \inf \{k \geq n \mid U_k = X_k^1\}, \quad \sigma_n(U) = \inf \{k \geq n \mid U_k = X_k^2\},$$

とおく。但し、 $\{\} = \phi$  のときは  $+\infty$  とする。

命題1.1([12]).  $\alpha^i \in \mathcal{W}$  ( $i=1,2$ ) が存在して、

$$(i) \quad \alpha_n^i = \begin{cases} Y_n^i & \text{if } \alpha_n^j = X_n^j, \\ \max(X_n^i, E[\alpha_{n+1}^i \mid \mathcal{F}_n]) & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$i, j=1,2, \quad i \neq j, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$(ii) \quad \alpha_\infty^i = W_\infty^i, \quad i=1,2,$$

をみたすならば、各  $n \in \mathbb{N}$  に対して、 $(\tau_n(\alpha^1), \sigma_n(\alpha^2))$  は  $n$  における均衡点である。

そこで、

$$A_n^i = \{X_n^i \geq E[X_{n+1}^i | \mathcal{F}_n]\}, \quad i=1, 2, n \in \mathbb{N},$$

とおき、

$$\tau_n^*(\omega) = \inf\{k \geq n \mid \omega \in A_k^1\}, \quad \sigma_n^*(\omega) = \inf\{k \geq n \mid \omega \in A_k^2\},$$

$$\gamma_n^i = G_n^i(\tau_n^*, \sigma_n^*), \quad i=1, 2,$$

とする。  $\tau_n^*, \sigma_n^*$  は OLA rule と呼ばれている。

次の条件を導入する：

条件 1 :  $X^i < Y^i, \quad i=1, 2.$

条件 2 :  $X_\infty^i = Y_\infty^i, \quad i=1, 2.$

条件 3 :  $A_n^i \subset A_{n+1}^i, \quad i=1, 2, n \in \mathbb{N}.$

条件 4 :  $P[(U_n A_n^1) \cap (U_n A_n^2)] = 0.$

この4つの条件のもとで、次の結果を得る。

補題 1.1. 各  $n \in \mathbb{N}$  に対して、  $\tau_n^* = \tau_n(\gamma^1), \sigma_n^* = \sigma_n(\gamma^2).$

補題 1.2.  $\gamma^i (i=1, 2)$  は 命題 1.1 の条件をみたす。

定理 1.1. 各  $n \in \mathbb{N}$  に対して、  $(\tau_n^*, \sigma_n^*)$  は  $n$  における均衡点である。

次に簡単な例を与える。

例題.  $U^i = (U_n^i) \in \mathcal{W} (i=1, 2)$  は有界で、次をみたす：

$$E[U_{n+1}^i \mid U_n^i > 0] > 0,$$

$$P(U_{n+1}^i \leq 0 \mid U_n^i \leq 0) = 1, \quad P(U_n^i \leq 0 \text{ for } i=1, 2) = 0.$$

また、  $Z^i = (Z_n^i) \in \mathcal{W} (i=1, 2)$  は正で有界とし、割引因子  $\beta (0 < \beta < 1)$  に対して、

$$X_n^i = W_n^i = \sum_{k=0}^n \beta^k U_k^i, \quad Y_n^i = X_n^i + \beta^{n+1} E[Z_{n+1}^i \mid \mathcal{F}_n], \quad i=1, 2, n \in \mathbb{N}$$

とおくと、  $X^i, Y^i, W^i$  は  $\mathcal{W}$  の要素で、仮定と条件 1 ~ 4 をみたす。従って、

$\tau_n^*, \sigma_n^*$  は定義から、

$$\tau_n^* = \inf\{k \geq n \mid U_k^1 \leq 0\}, \quad \sigma_n^* = \inf\{k \geq n \mid U_k^2 \leq 0\}$$

とかけ、定理1.1 から、各  $n \in N$  に対して、 $(\tau_n^*, \sigma_n^*)$  は  $n$  における均衡点である。

## § 2. 協力型 Dynkin 問題

この節では、有制限約をもつ協力型 Dynkin 問題を考える。すでに述べたように、Dynkin 問題は零和型と非協力型については多くの研究がなされているが、協力型の研究成果は未だにでていない。しかしながら、以下でわかるように、協力型は多目的の最適停止問題と深く関係があり、そのような研究には Hisano[6], Gugerli[5]がある。また、協力型マルコフゲームの研究としては、Tanaka 他[7, 14, 15]がある。

§ 2.1では、シャドー最適値（確率変数列）に関するマルチンゲールの性質を調べ、シャドー最適な停止時間の組の存在について述べる。§ 2.2では、パレート最適値の性質及びパレート最適な停止時間の組の存在を示す。§ 2.3では、多目的計画の目標計画の概念を導入して、パレート最適な停止時間の組を求める。

### § 2.1. シャドー最適と基本的な結果

この節では、シャドー最適に関する性質を一般的に与える。また、これらの結果は次節以降に重要な役割を果たす。

まず、有制限約をもつ停止時間の組の全体を  $\Lambda_n$ , i. e.

$$\Lambda_n = \{(\tau, \sigma) \in \Gamma_n^2 \mid \tau \wedge \sigma < \infty \text{ a. s.}\}$$

とおき、

$$\alpha_n^i = \text{ess sup}_{(\tau, \sigma) \in \Lambda_n} G_n^i(\tau, \sigma), \quad i=1, 2, n \in N,$$

とする。 $\alpha_n^* = (\alpha_n^1, \alpha_n^2)$  を  $n$  におけるシャドー最適値という。明らかに、 $n \in N$  に対して、 $\alpha_n^i = G_n^i(\tau_n^*, \sigma_n^*)$ ,  $i=1, 2$ , をみたす  $(\tau_n^*, \sigma_n^*) \in \Lambda_n$  が存在すれば、 $(\tau_n^*, \sigma_n^*)$  は  $n$  における best optimal である、i. e.

$$G_n^i(\tau^*, \sigma^*) \geq G_n^i(\tau, \sigma), \quad \forall (\tau, \sigma) \in \Lambda_n, \quad \forall i=1, 2.$$

一般に、best optimal な停止時間の組が存在することは希である。そこで、 $\alpha^i = (\alpha_n^i)$  の性質等を調べるために、一般に、 $X, Y, W \in \mathcal{W}$  に対して、

$$g(\tau, \sigma) = X_\tau I_{\tau < \sigma} + Y_\sigma I_{\sigma < \tau} + W_\tau I_{\tau = \sigma},$$

$$G_n(\tau, \sigma) = E[g(\tau, \sigma) | \mathcal{F}_n],$$

とおき、

$$\alpha_n = \operatorname{ess\,sup}_{(\tau, \sigma) \in \Lambda_n} G_n(\tau, \sigma), \quad n \in \mathbb{N}$$

とする。 $\alpha_n$  が  $\alpha_n^i (i=1, 2)$  に対応している。

次の定理は  $\alpha = (\alpha_n)$  の再帰関係式を与えている。証明は古典的な最適停止問題に対するそれと同様にできる。

定理 2.1. (i)  $\alpha$  は次をみたす： 各  $n \in \mathbb{N}$  に対して、

$$\alpha_n = \max(X_n, Y_n, W_n, E[\alpha_{n+1} | \mathcal{F}_n]).$$

(ii)  $\alpha$  は  $(\max(X_n, Y_n, W_n))_{n \in \mathbb{N}}$  を支配している最小の優マルチンゲールである。

そこで、

$$\beta_n = \operatorname{ess\,sup}_{\tau \in \Gamma_n, \tau < \infty} E[\max(X_\tau, Y_\tau, W_\tau) | \mathcal{F}_n]$$

とおくと、 $\beta = (\beta_n)$  も定理 2.1 の性質をもつことから、

系 2.2.  $\alpha_n = \beta_n, \quad n \in \mathbb{N}.$

この系より、よく知られた方法 (backward induction) で  $\alpha = (\alpha_n)$  を求めることができる。次の補題は上の定理と系からすぐ示すことができるが、最適性の議論にとって重要である。

補題 2.1.  $\alpha_\infty = \beta_\infty = \limsup_n \max(X_n, Y_n, W_n).$

定義 2.1.  $n \in \mathbb{N}$  とする。  $\varepsilon \geq 0$  に対して、

$$(\tau_\varepsilon, \sigma_\varepsilon) \in \Lambda_n \text{ かつ } \alpha_n \leq G_n(\tau_\varepsilon, \sigma_\varepsilon) + \varepsilon$$

のとき、 $(\tau_\varepsilon, \sigma_\varepsilon)$  を  $n$  において  $(\alpha, \varepsilon)$ -最適であるという。特に、 $\varepsilon = 0$

のとき、単に  $(\alpha)$ -最適であるという。

定理2.3.  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\varepsilon > 0$  を任意とし、

$$\begin{aligned}\tau_n^\varepsilon &= \inf \{k \geq n \mid \alpha_k \leq \max(X_k, W_k) + \varepsilon\}, \\ \sigma_n^\varepsilon &= \inf \{k \geq n \mid X_k + \varepsilon < \alpha_k \leq \max(Y_k, W_k) + \varepsilon\}.\end{aligned}$$

とおくと、 $(\tau_n^\varepsilon, \sigma_n^\varepsilon)$  は  $n$  において  $(\alpha, \varepsilon)$ -最適である。

この定理の証明は、 $\alpha$  に対する optional sampling theorem と、 $\{\tau_n^\varepsilon = k < \sigma_n^\varepsilon\}$  上で  $\alpha_k \leq X_k + \varepsilon$ 、 $\{\sigma_n^\varepsilon = k < \tau_n^\varepsilon\}$  上で  $\alpha_k \leq Y_k + \varepsilon$ 、 $\{\tau_n^\varepsilon = \sigma_n^\varepsilon = k\}$  上で  $\alpha_k \leq W_k + \varepsilon$  となる事実を用いる。また、補題2.1より、 $\tau_n^\varepsilon \wedge \sigma_n^\varepsilon < \infty$  a. s. である。

注意. 上の定理において、

$$\begin{aligned}\tau_n^\varepsilon &= \inf \{k \geq n \mid Y_k + \varepsilon < \alpha_k \leq \max(X_k, W_k) + \varepsilon\}, \\ \sigma_n^\varepsilon &= \inf \{k \geq n \mid \alpha_k \leq \max(Y_k, W_k) + \varepsilon\}\end{aligned}$$

としてもよい。また、

$$\tilde{\tau}_n^\varepsilon = \inf \{k \geq n \mid \alpha_k = \beta_k \leq \max(X_k, Y_k, W_k) + \varepsilon\},$$

とおくと、 $\tilde{\tau}_n^\varepsilon$  は  $(\beta)$  に対して  $n$  において  $\varepsilon$ -最適である。また、 $\tilde{\tau}_n^\varepsilon = k$  のとき、 $A = \{\alpha_k \leq \max(X_k, W_k) + \varepsilon\}$ 、 $B = \{X_k + \varepsilon < \alpha_k \leq \max(Y_k, W_k) + \varepsilon\}$  として、 $\tau_n^\varepsilon = k$  (on  $A$ ),  $= k+1$  (on  $B$ );  $\sigma_n^\varepsilon = k+1$  (on  $A$ ),  $= k$  (on  $B$ ) とおくと、この  $(\tau_n^\varepsilon, \sigma_n^\varepsilon)$  も  $n$  において  $(\alpha, \varepsilon)$ -最適である。

次の定理は  $\varepsilon = 0$  に対する結果である。

定理2.4.  $n \in \mathbb{N}$  を任意とし、

$$\begin{aligned}\tau_n^* &= \inf \{k \geq n \mid \alpha_k = \max(X_k, W_k)\}, \\ \sigma_n^* &= \inf \{k \geq n \mid X_k < \alpha_k = \max(Y_k, W_k)\}\end{aligned}$$

とおく。  $\tau_n^* \wedge \sigma_n^* < \infty$  a. s. ならば、 $(\tau_n^*, \sigma_n^*)$  は  $n$  において  $(\alpha)$ -最適である。

注意. この定理の条件 " $\tau_n^* \wedge \sigma_n^* < \infty$  a. s." に対する十分条件としては、 $\max(X_k, Y_k, W_k) \downarrow -\infty$  (as  $k \rightarrow \infty$ ) 等が考えられる。

## § 2.2. パレート最適とスカラー化

この節では、パレート最適の概念を導入して、スカラー化によってパレート最適値の性質を調べ、パレート最適な停止時間の組を求める。

以下、 $x = (x_1, x_2)$ ,  $y = (y_1, y_2)$  に対する大小関係として、 $x_i > y_i$ ,  $i=1, 2$  のとき、 $x > y$ ;  $x_i \geq y_i$ ,  $i=1, 2$  のとき、 $x \geq y$ ;  $x_i = y_i$ ,  $i=1, 2$  のとき、 $x = y$ ;  $x \geq y$  かつ  $x \neq y$  のとき、 $x \succcurlyeq y$  とかくことにする。また、 $G_n^*(\tau, \sigma) = (G_n^1(\tau, \sigma), G_n^2(\tau, \sigma))$ ,  $e = (1, 1)$  とおく。

定義 2.2.  $n \in \mathbb{N}$  とする。  $\varepsilon \geq 0$  に対して、

$$(\tau_\varepsilon, \sigma_\varepsilon) \in \Lambda_n \quad \text{かつ}$$

$$G_n^*(\tau, \sigma) > G_n^*(\tau_\varepsilon, \sigma_\varepsilon) + \varepsilon e \quad \text{となる } (\tau, \sigma) \in \Lambda_n \text{ が存在しない}$$

$$(\text{resp. } G_n^*(\tau, \sigma) \geq G_n^*(\tau_\varepsilon, \sigma_\varepsilon) + \varepsilon e)$$

のとき、 $(\tau_\varepsilon, \sigma_\varepsilon)$  を  $n$  において弱 (resp. 強)  $\varepsilon$ -パレート最適であるという。

特に、 $\varepsilon = 0$  のとき単に弱 (resp. 強) パレート最適であるという。

そこで、次のようにスカラー化を行う。  $S$  を  $\lambda \geq 0$ ,  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$  をみたす  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$  の全体とし、  $S_0$  を  $\lambda > 0$  をみたす  $\lambda \in S$  の全体とする。  
 $\lambda \in S$  に対して、

$$X_n(\lambda) = \lambda_1 X_n^1 + \lambda_2 Y_n^2, \quad Y_n(\lambda) = \lambda_1 Y_n^1 + \lambda_2 X_n^2,$$

$$W_n(\lambda) = \lambda_1 W_n^1 + \lambda_2 W_n^2,$$

として、

$$g(\tau, \sigma; \lambda) = \lambda_1 g_1(\tau, \sigma) + \lambda_2 g_2(\tau, \sigma)$$

$$= X_\tau(\lambda) I_{\tau < \sigma} + Y_\sigma(\lambda) I_{\sigma < \tau} + W_\tau(\lambda) I_{\tau = \sigma}$$

$$G_n(\tau, \sigma; \lambda) = E[g(\tau, \sigma; \lambda) | \mathcal{F}_n] = \lambda_1 G_n^1(\tau, \sigma) + \lambda_2 G_n^2(\tau, \sigma)$$

$$V_n(\lambda) = \text{ess sup}_{(\tau, \sigma) \in \Lambda_n} G_n(\tau, \sigma; \lambda)$$

とおく。このとき、多目的計画における議論 (cf. [1], [13]) と同様にして、次の 2 つの補題を得る。

補題2.2.  $\varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}, \lambda \in S$  を任意とする。

$$V_n(\lambda) < G_n(\tau_\varepsilon, \sigma_\varepsilon; \lambda) + \varepsilon$$

となる  $(\tau_\varepsilon, \sigma_\varepsilon) \in \Lambda_n$  が存在するとき、 $(\tau_\varepsilon, \sigma_\varepsilon)$  は  $n$  において弱  $\varepsilon$ -パレート最適である。特に、 $\lambda \in S_0$  のとき、 $(\tau_\varepsilon, \sigma_\varepsilon)$  は  $n$  において強  $\varepsilon$ -パレート最適である。

補題2.3.  $n \in \mathbb{N}, \lambda \in S$  を任意とする。

$$V_n(\lambda) = G_n(\tau^*, \sigma^*; \lambda)$$

となる  $(\tau^*, \sigma^*) \in \Lambda_n$  が存在するとき、 $(\tau^*, \sigma^*)$  は  $n$  において弱パレート最適である。特に、 $\lambda \in S_0$  のとき、 $(\tau^*, \sigma^*)$  は  $n$  において強パレート最適である。

次の補題は定理2.1からすぐに得られる。

補題2.4.  $\lambda \in S$  を任意とする。

(i)  $V(\lambda)$  は次をみたす:  $n \in \mathbb{N}$  に対して、

$$V_n(\lambda) = \max(X_n(\lambda), Y_n(\lambda), W_n(\lambda), E[V_{n+1}(\lambda) | \mathcal{F}_n]).$$

(ii)  $V(\lambda)$  は  $(\max(X_n(\lambda), Y_n(\lambda), W_n(\lambda)))_{n \in \mathbb{N}}$  を支配している最小の優マルチンゲールである。

上の補題と定理2.3, 2.4から、この節の重要な2つの定理を得る。

定理2.5.  $n \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0, \lambda \in S$  を任意とし、

$$\tau_n^\varepsilon = \inf \{k \geq n \mid V_k(\lambda) \leq \max(X_k(\lambda), W_k(\lambda)) + \varepsilon\}$$

$$\sigma_n^\varepsilon = \inf \{k \geq n \mid X_k(\lambda) + \varepsilon < V_k(\lambda) \leq \max(Y_k(\lambda), W_k(\lambda)) + \varepsilon\}$$

とおくと、 $(\tau_n^\varepsilon, \sigma_n^\varepsilon)$  は  $n$  において弱  $\varepsilon$ -パレート最適である。特に、 $\lambda \in S_0$  のとき、 $(\tau_n^\varepsilon, \sigma_n^\varepsilon)$  は  $n$  において強  $\varepsilon$ -パレート最適である。

定理2.6.  $n \in \mathbb{N}, \lambda \in S$  を任意とし、

$$\tau_n^* = \inf \{k \geq n \mid V_k(\lambda) = \max(X_k(\lambda), W_k(\lambda))\}$$

$$\sigma_n^* = \inf \{k \geq n \mid X_k(\lambda) < V_k(\lambda) = \max(Y_k(\lambda), W_k(\lambda))\}$$

とおくと、 $\tau_n^* \wedge \sigma_n^* < \infty$  a. s. ならば、 $(\tau_n^*, \sigma_n^*)$  は  $n$  において弱パレート最適

である。特に、 $\lambda \in S_0$  のとき、 $(\tau_n^*, \sigma_n^*)$  は  $n$  において強パレート最適である。

### § 2.3. 目標計画とパレート最適

この節では、パレート最適な停止時間の組を求めるために、多目的計画の目標計画の概念を導入する。

時間  $n$  での目標値  $M_n$  を、 $M^i \in W (i=1, 2)$  に対して、

$$M = (M_n)_{n \in N} = (M^1, M^2) = ((M_n^1, M_n^2))_{n \in N}$$

とする。また、目標値までの距離を、 $\mu = (\mu_1, \mu_2) \geq 0$ 、 $(\tau, \sigma) \in \Lambda_n$  に対し

て、

$$d_n^p(\tau, \sigma; M, \mu) = \| M_n - G_n^*(\tau, \sigma) \|_{\mu, p}$$

とする。但し、 $x = (x_1, x_2)$ 、 $y = (y_1, y_2)$  に対して、

$$\| x - y \|_{\mu, p} = \left( \sum_{i=1}^2 \mu_i |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty \quad (l_p\text{-norm})$$

$$\| x - y \|_{\mu, \infty} = \max_{i=1, 2} (\mu_i |x_i - y_i|), \quad p = \infty \quad (l_\infty\text{-norm})$$

である。さらに、

$$d_n^p(M, \mu) = \text{ess inf}_{(\tau, \sigma) \in \Lambda_n} d_n^p(\tau, \sigma; M, \mu)$$

とおく。

定義 2.3.  $n \in N$ 、 $\mu \geq 0$  とする。  $\varepsilon \geq 0$  に対して、

$$(\tau_\varepsilon, \sigma_\varepsilon) \in \Lambda_n \quad \text{かつ} \quad d_n^p(M, \mu) \geq d_n^p(\tau_\varepsilon, \sigma_\varepsilon; M, \mu) - \varepsilon$$

のとき、 $(\tau_\varepsilon, \sigma_\varepsilon)$  を  $n$  において  $(\varepsilon; p, M)$ -最適という。特に、 $\varepsilon = 0$  のとき、単に  $(p, M)$ -最適という。

次の 2 つの補題も多目的計画の証明と同様にして得られる結果である。

補題 2.5.  $M \geq \alpha$ , i. e.  $M_n^i \geq \alpha_n^i$ ,  $i=1, 2$ ,  $n \in N$  と仮定し、 $\varepsilon > 0$  と  $n \in N$  を任意とする。このとき、

(i) 任意の  $\mu = (\mu_1, \mu_2) \geq 0$  :  $\mu_1 + \mu_2 = 1$  に対して、 $(\tau_\varepsilon, \sigma_\varepsilon)$  が  $n$  におい

て  $(\varepsilon; 1, M)$ -最適であるならば、 $(\tau_\varepsilon, \sigma_\varepsilon)$  は  $n$  において弱  $\varepsilon$ -パレート最適である。特に、 $\mu > 0$  のとき、 $(\tau_\varepsilon, \sigma_\varepsilon)$  は  $n$  において強  $\varepsilon$ -パレート最適である。

(ii)  $\mu = (1, 1)$  のとき、 $(\tau_\varepsilon, \sigma_\varepsilon)$  が  $n$  において  $(\varepsilon; \infty, M)$ -最適であるならば、 $(\tau_\varepsilon, \sigma_\varepsilon)$  は  $n$  において弱  $\varepsilon$ -パレート最適である。

**補題 2.6.**  $M \geq \alpha$  と仮定し、 $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mu \geq 0$  を任意とする。  $1 \leq p \leq \infty$  に対して、 $(\tau^*, \sigma^*)$  が  $n$  において  $(p, M)$ -最適であるならば、 $(\tau^*, \sigma^*)$  は  $n$  において弱パレート最適である。特に、 $\mu > 0$ ,  $1 \leq p < \infty$  のとき、 $(\tau^*, \sigma^*)$  は  $n$  において強パレート最適である。

以下、 $p = 1$  のときのみを考える：  $M^i \in \mathcal{W}$  ( $i=1, 2$ ),  $\mu \geq 0$ ,  $k \geq n$  に対して、

$$X_k^\mu(n) = \mu_1 (M_n^1 - X_k^1) + \mu_2 (M_n^2 - Y_k^2),$$

$$Y_k^\mu(n) = \mu_1 (M_n^1 - Y_k^1) + \mu_2 (M_n^2 - X_k^2),$$

$$W_k^\mu(n) = \mu_1 (M_n^1 - W_k^1) + \mu_2 (M_n^2 - W_k^2)$$

とおくと、 $M \geq \alpha$  のとき、

$$\begin{aligned} d_n^1(\tau, \sigma; M, \mu) &= \mu_1 (M_n^1 - G_n^1(\tau, \sigma)) + \mu_2 (M_n^2 - G_n^2(\tau, \sigma)) \\ &= E [X_\tau^\mu(n) I_{\tau < \sigma} + Y_\sigma^\mu(n) I_{\sigma < \tau} + W_\tau^\mu(n) I_{\tau = \sigma} | \mathcal{F}_n] \end{aligned}$$

さらに、

$$d_n^1(M, \mu) = \operatorname{ess\,inf}_{(\tau, \sigma) \in \Lambda_n} d_n^1(\tau, \sigma; M, \mu)$$

である。

**定理 2.7.**  $M \geq \alpha$  かつ  $M^i \in \mathcal{W}$  ( $i=1, 2$ ) はマルチンゲールであると仮定し、 $\mu \geq 0$  とする。このとき、

(i)  $d^1(M, \mu)$  は次をみたす：  $n \in \mathbb{N}$  に対して、

$$d_n^1(M, \mu) = \min (X_n^\mu(n), Y_n^\mu(n), W_n^\mu(n), E [d_{n+1}^1(M, \mu) | \mathcal{F}_n])$$

(ii)  $d^1(M, \mu)$  は  $(\min (X_n^\mu(n), Y_n^\mu(n), W_n^\mu(n)))_{n \in \mathbb{N}}$  に支配されている最大の劣マルチンゲールである。

この定理の証明は、 $M^i$  のマルチンゲール性を用いて、定理2.1に帰着すればよい。

注意.  $M^i = E[\sup_{n \in \mathbb{N}} (\max(X_n^i, Y_n^i, W_n^i))^+]$ ,  $i=1, 2$ , とおくと、 $M = (M^1, M^2)$  は定理2.7の条件をみたす。

上の定理と補題を用いて、定理2.3, 2.4と類似な議論を行うことにより、次の2つの定理を得る。

定理2.8. 定理2.7の条件を仮定する。  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mu = (\mu_1, \mu_2) \geq 0 : \mu_1 + \mu_2 = 1$ ,  $\varepsilon > 0$  を任意とし、

$$\tau_n^\varepsilon = \inf \{k \geq n \mid d_k^1(M, \mu) \geq \min(X_k^\mu(n), W_k^\mu(n)) - \varepsilon\}$$

$$\sigma_n^\varepsilon = \inf \{k \geq n \mid X_k^\mu(n) - \varepsilon > d_k^1(M, \mu) \geq \min(Y_k^\mu(n), W_k^\mu(n)) - \varepsilon\}$$

とおくと、 $(\tau_n^\varepsilon, \sigma_n^\varepsilon)$  は  $n$  において弱  $\varepsilon$ -パレート最適である。特に、 $\mu > 0$  のとき、 $(\tau_n^\varepsilon, \sigma_n^\varepsilon)$  は  $n$  において強  $\varepsilon$ -パレート最適である。

定理2.9. 定理2.7の条件を仮定する。  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mu = (\mu_1, \mu_2) \geq 0 : \mu_1 + \mu_2 = 1$  を任意とし、

$$\tau_n^* = \inf \{k \geq n \mid d_k^1(M, \mu) = \min(X_k^\mu(n), W_k^\mu(n))\}$$

$$\sigma_n^* = \inf \{k \geq n \mid X_k^\mu(n) > d_k^1(M, \mu) = \min(Y_k^\mu(n), W_k^\mu(n))\}$$

とおくと、 $\tau_n^* \wedge \sigma_n^* < \infty$  a.s. ならば、 $(\tau_n^*, \sigma_n^*)$  は  $n$  において弱パレート最適である。特に、 $\mu > 0$  のとき、 $(\tau_n^*, \sigma_n^*)$  は  $n$  において強パレート最適である。

### 参考文献

- [1] Aubin, J.P. (1979) "Mathematical Methods of Game and Economic Theory", Amsterdam, North-Holland.
- [2] Besoussan, A. and Friedman, A. (1974) Nonlinear variational inequalities and differential games with stopping times, J. Funct. Anal., 16, 305-352.
- [3] Chow, Y.S. and Robbins, H. (1961) A martingale system theorem and

- applications, In Proc. 4th Berkeley Sympo. "Math. Statist. Prob." Vol.1, Berkeley and Los Angels, Univ. of California Press, 93-104.
- [4] Dynkin, E.B.(1969) Game variant of a problem on optimal stopping, Soviet Math. Dokl., 10, 270-274.
- [5] Gugerli, U.S.(1987) Optimal stopping of a Markov chain with vector-valued gain function, In Proc. 4th Vilnius Conference "Prob. Theory Math. Statist.", Vol.1, Utrecht, VNU Science Press, 523-528.
- [6] Hisano, H.(1980) An existence theorem in a vector-valued optimal stopping problem, Mem. Fac. Scie. Kyushu Univ., Ser.A, 34, 99-106.
- [7] Lai, H.-C. and Tanaka, K.(1986) On a D-solution of a cooperative m-person discounted Markov game, J. Math. Anal. Appl., 115, 578-591.
- [8] Mamer, J.(1987) Monotone stopping games, J. Appl. Prob., 24, 386-401.
- [9] Morimoto, H.(1986) Non-zero-sum discrete parameter stochastic games with stopping times, Prob. Th. Rel. Fields, 72, 155-160.
- [10] Morimoto, H.(1987) On noncooperative n-player cyclic stopping games, Stochastics, 20, 27-37.
- [11] Nagai, H.(1988) Nonzero-sum stopping games of symmetric Markov processes, Prob. Th. Rel. Fields, 75, 487-497.
- [12] Ohtsubo, Y.(1987) A nonzero-sum extension of Dynkin's stopping problem, Math. Oper. Res., 12, 277-296.
- [13] 志水清孝(1982) "多目的と競争の理論", 共立出版.
- [14] Tanaka, K.(1989) The closest solution to the shadow minimum of a cooperative Dynamic game, Comp. Math. Appl., 18, 181-188.
- [15] Zhaohua, L. and Tanaka, K.(1987) On an optimal multistrategy and a weak optimal multistrategy of a Markov game, Scie. Rep. Niigata Univ., Ser.A, No.23, 1-11.