実数の連続性に関する7つの命題の同値性について

新関　章三・佐々木　正人
（理学部数学教室・情報処理センター）

On Equivalence of seven Propositions for the Continuity of real Numbers

Syozo Niizeki and Masato Sasaki
Depertment of Mathematics, Facuilty of Science
Information Processing Center

Abstract: In this paper we consider the equivalence of seven propositions for the continuity of real numbers. The seven propositions are as follows:

1) the theorem of Dedekind
2) the theorem of Weierstrass
3) the existence of upper limit and lower limit of bounded sequence
4) the convergence theorem for increasing (decreasing) sequence bounded above (below)
5) the theorem of Bolzano-Weierstrass
6) the theorem of Cauchy
7) the method of nested intervals by Bachmann.

We present here a very simple and explicit mehtod of the proof of the equivalence of the above seven propositions.

はじめに

実数の連続性に関してはいくつかの同値な命題が知られている。そして実数の連続性を述べた書には通常2～4つの命題の同値性が示されている場合がほとんどである。

この小論では実数の連続性に関する7つの命題を挙げ，それらはすべて同値となることを明らかにした。この際，その証明法としては最も簡潔な形で与えることを工夫した。

§1.　定義と記号

実数全体の集合をここでは R と書く。すなわち，$R=(-\infty,\infty)$ とする。以下，大文字 A, B, … は R の部分集合，小文字 a，b，… は R の元とする。そして数と言えば，すべての R の元，つまり実数を意味するものとする。ここで§3への準備としていくつかの定義をあげておこう。

1)　集合 E が上（下）に有界であるとは，ある数 x_0 が存在して，すべての $x \in E$ に対して $x \leq x_0$ $(x_0 \leq x)$ が成り立つときをいう。

2)　集合 E が有界であるとは，E は上にも下にも有界であるとき，すなわちある2つの数 x_0 と y_0 $(x_0 < y_0)$ が存在して，すべての $x \in E$ に対して $x_0 \leq x \leq y_0$ が成り立つときをいう。

3) x_0 が E の上界(下界) であるとは，すべての $x \in E$ に対して $x \leq x_0$ ($x_0 \leq x$) が成り立つときをいう。ここで，x_0 が E の上界(下界)ならば $x_0 < y_0$ ($y_0 < x_0$) となる y_0 も E の上界（下界）となる。

4）E の上界（下界)全体の集合を B とする。B に最小値（最大値）が存在するとき，これを E の上限（下限）とよぶ。E の上限（下限）を記号で $\sup A$ ($\inf A$) とかく。

5） E の最大値（最小値）を $\max E$ ($\min E$) とかく。

6） 数列 $\{x_n\}$ が x に収束する，つまり $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある正の整数 N が存在して，$n \geq N$ なる任意の n に対して $|x_n - x| < \varepsilon$ となるときをいう。

7） 数列 $\{x_n\}$ が与えられているとする。このときこの数列の上極限 $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$ と下極限 $\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n$ とを次の式で定義する：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \inf_{n\geq 1} \sup_{k\geq n} x_k,$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq n} x_k,$$

ただし，上の２つの式の右辺の値は存在するものとする。

ここで，§２への準備として数列 $\{x_n\}$ の極限に関するよく知られた性質を次の補題の形で挙げておこう。

［**補題**］ 数列 $\{x_n\}$ がある。このとき $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ であるための必要十分条件は

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = x$$

となることである。

§２． ７つの命題

この節では実数の連続性を示す７つの命題を与えよう。

命題 1 (Dedekindの定理) 次の２つの条件

1） $R = A \cup B$, $A \neq \phi$, $B \neq \phi$ で $A \cap B = \phi$

2） $a \in A$, $b \in B$ のとき $a < b$

が満たされているとき，ある数 x_0 が存在して

3） $x_0 = \max A$ か又は $x_0 = \min B$

のいずれかが成り立つ。

（注） 1）の $A \cap B = \phi$ より $x_0 = \max A = \min B$ となることはない。

命題2（Weierstrassの定理） E が上（下）に有界ならば E の上限（下限）x_0 が存在する。すなわち $x_0 = \sup E$ ($\inf E$)となる。

命題3（有界数列の上極限と下極限の存在） 数列 $\{x_n\}$ は有界数列とする。このとき $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$ と $\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n$ とは共に共存する。

命題4（上(下)に有界な増加(減少)数列の収束性） 上(下)に有界な増加(減少)数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する。すなわちある数 x_0 が存在して $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ となる。

命題5（Bolzano-Werstrassの定理） 無限集合 E が有界ならば，E は少なくとも1つの集積点を持つ。

命題6（Cauchyの定理） 数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が Cauchy列をなすとき，すなわち，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある正の整数 N が存在し，$N \leq m < n$ を満たす任意の整数 m と n に対し，$|x_n - x_m| < \varepsilon$ が成り立つとき，ある数 x_0 が存在して $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ となる。

命題7（Bachmannの区間縮小法） 有界な閉区間列 $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($I_n = [a_n, b_n]$, $a_n < b_n$) が

4） $I_{n+1} \subset I_n$ ($n = 1, 2 \cdots$),

5） $\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$

を満たすとき，ある数 x_0 が存在して，

6） $\{x_0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$

が成り立つ。

§3. 7つの命題の同値性の証明

前節で挙げた7つの命題が同値であることを以下に証明しよう。このためには，

命題1 ⇒ 命題2 ⇒ 命題3 ⇒ 命題4 ⇒ 命題5 ⇒ 命題6 ⇒ 命題7 ⇒ 命題1

であることを示せばよい。以下7つの場合に分けてこのことを証明しよう。

〔1〕命題1⇒1命題2

(証明) E は上に有界とする。E の上界全体の集合を B とし，$A=R\setminus B$ とする。このとき $R=A\cup B$ で $A\cap B=\phi$ となる。また E は上に有界であるから $B\neq\phi$ となる。いま $x\in E$ とし，$y<x$ となる y をとると，$y\not\in B$ であるから $y\in A$ となる。よって $A\neq\phi$ となる。さらに $a\in A$, $b\in B$ とすれば，$a<b$ となる。なぜなら，$a\geq b$ であれば $a\in B$ となって $A\cap B=\phi$ に反するからである。

以上により A と B は命題1の条件 1)と 2)を満たしているから，ある数 x_0 が存在して，

1) $$x_0=\max A$$

2) $$x_0=\min B$$

のうちいずれか一方が成り立つ。今の場合は2) が成り立つことを示そう。もし1) が成り立つとすると，$x_0\in A$ であるから，$x_0\not\in B$ 。よってある $x\in E$ が存在して $x_0<x$ となる。よって

3) $$x_0<\frac{x_0+x}{2}<x$$

となる。上の3) の左側の不等式からは $\frac{x_0+x}{2}\in B$ が，また右側の不等式から $\frac{x_0+x}{2}\in A$ が得られる。これは $A\cap B=\phi$ に反する。よって1)は成り立たないから2)が成り立つ。従って§1の4) から x_0 は E の上限となる。

E が下に有界であるときも同様にして証明することができる。(証終)

〔2〕命題2⇒命題3

(証明) $a_n=\sup_{k\geq n} x_k$ $(n\geq 1)$ とおく。このとき $\{x_n\}$ が有界数列であることから $\{a_n\}$ も有界数列である。よって命題2より $\inf_{n\geq 1} x_n$ は存在する。ところが $\inf_{n\geq 1} a_n=\inf_{n\geq 1}\sup_{k\geq 1} x_k=\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ であるから，$\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ は存在する。次に $b_n=\inf_{k\geq n} x_k$ $(n\geq 1)$ とおくと，$\{x_n\}$ が有界数列であることから，$\{b_n\}$ も有界数列である。よって命題2より $\sup_{n\geq 1} b_n$ が存在する。ところで

$$\sup_{n\geq 1} b_n=\sup_{n\geq 1}\inf_{k\geq n} x_k=\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$$

であるから $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ の存在が示された。$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ の存在も全く同様にして示すことができる。(証終)

〔3〕命題3⇒命題4

(証明) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界な増加数列とする。このとき $\{x_n\}$ は有界数列となるから $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$と $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ とは共に存在する。そこで $\{x_n\}$ は増加数列であるから $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n=\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ となる。よって§1の最後のところで与えた補題により数列 $\{x_n\}$ は収束する。$\{x_n\}$ が下に有界な減少数列の場合にも同様にして $\{x_n\}$ が収束することが証明できる。(証終)

〔4〕命題 ⇒命題5

(証明) E を有界集合とすると，任意の $x\in E$ に対して $x_0\leq x\leq y_0$ となる2つの数 x_0

と y_0 $(x_0 < y_0)$ が存在する。いま $[x_0, \frac{x_0+y_0}{2}] \cap E$ が無限集合のとき

$$x_1 = x_0, \quad y_1 = \frac{x_0+y_0}{2}, \quad E_1 = [x_1, y_1] \cap E$$

とおき，$[x_0, \frac{x_0+y_0}{2}] \cap E$ が有限集合のときには $[\frac{x_0+y_0}{2}, y_0] \cap E$ は無限集合となり，このときには

$$x_1 = \frac{x_0+y_0}{2}, \quad y_1 = y_0, \quad E_1 = [x_1, y_0] \cap E$$

とおく。そのとき，E_1 は無限集合となり次のことが成り立つ：

$$x_0 \leq x_1 \leq y_1 < y_0, \quad y_1 - x_1 = \frac{y_0+x_0}{2}。$$

さらに，x_0，y_0，E から x_1，y_1，E_1 を作った時と全く同様にして x_1，y_1，E_1 から x_2，y_2，E_2 作ることができ，このときには

$$x_1 \leq x_2 \leq y_2 \leq x_2, \quad y_2 - x_2 = \frac{y_1 - x_1}{2} = \frac{y_0 - x_0}{2^2}, \quad E_n = [x_2, y_2] \cap E_n,$$

ここで，E_2 は無限集合で，$x_2 \leq x \leq y_2$ $(x \in E_2)$ が成り立つ。

以下全く同様にして x_{n-1}，y_{n-1}，E_{n-1} が得られたとき，x_n，y_n，E_n を得ることができ，次のことが成り立つ：

$$x_{n-1} \leq x_n \leq y_n \leq y_{n-1}, \quad y_n - x_n = \frac{y_{n-1} - x_{n-1}}{2} = \frac{y_0+x_0}{2^n}, \quad E_n = [x_n, y_n] \cap E_{n-1}$$

ここで E_n は無限集合で，$x_n \leq x \leq (x \in E_n)$ が成り立つ。よって次のことがわかる：

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界な増加数列，
$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ は下に有界な減少数列。

従って命題4よりある p と q が存在して

$$\lim_{n\to\infty} x_n = p, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = q$$

となる。ここで $p \leq q$ であるが $q - p \leq \frac{y_0+x_0}{2^n}$ $(n=1, 2, \cdots)$ であるから $p = q$ となる。この共通の値を z_0 とすると，z_0 は E の集積点となることはただちにわかる。（証終）

[5] 命題5⇒命題6

（証明） 数列 $\{x_n\}$ を Cauchy 列とする。いま集合 E を次のように定める：

$$E = \{x_n \mid n = 1, 2, \cdots\}$$

このとき，Eは有界集合となることから，命題5によりEは集積点 x_0 を持つ。これより $\{x_n\}$ から適当な部分列 $\{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ を選べば，

$$\lim_{j\to\infty} x_{nj} = x_0$$

となる。ところで $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy であるから

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

となって命題6が成り立つ。(証終)

〔6〕**命題6⇒命題7**

(証明) $x_n \in I_n$ $(n=1,2,\cdots)$ なる x_n を選んで数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える。このとき，条件より

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0, \quad a_n \leq x_n \leq b_n \ (n \geq 1)$$

であるから $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列をなす。よって命題6により，ある x_0 が存在して $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ となる。このとき $a_n \leq x_0 \leq b_n$ $(n \geq 1)$ となるから $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ である。ところが $\bigcap_{n\to\infty}^{\infty} I_n$ はただ1点だけからなる集合であることは $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ であることがわかる。従って $\{x_0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ となる。(証終)

〔7〕**命題7⇒命題1**

(証明) $a_0 \in A$, $b_0 \in B$ とする。いま $\dfrac{a_0+b_0}{2} \in A$のとき，

$$a_1 = \frac{a_0+b_0}{2}, \quad b_1 = b_0$$

とおき，$\dfrac{a_0+b_0}{2} \in B$ のとき

$$a_1 = a_0, \quad b_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$$

とおく。このとき $a_1 \in A$ で $b_1 \in B$ であり

$$a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq b_0, \quad b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2}$$

が成り立つ。従って，$I_0 = [a_0, b_0]$，$I_1 = [a_1, b_1]$ とおくと，

$$I_1 \subset I_0$$

となる。

このような方法で a_{n-1} と b_{n-1} が得られたとき，$\dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} \in A$ のときは

$$a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, \quad b_n = b_{n-1}。$$

$\dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\in B$ のときは

$$a_n= a_{n-1},\quad b_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$$

とおいて，a_n と b_n とを作る。このとき $a_n\in A$，$b_n\in B$ でしかも次のことが成り立つ。

5） $$a_{n-1}\leq a_n\leq b_n\leq b_{n-1},\quad b_n-a_n=\frac{b_{n-1}-a_{n-1}}{2}=\frac{b_0-a_0}{2^n}\text{。}$$

よって $I_{n-1}=[a_{n-1}+b_{n-1}]$，$I_n=[a_n, b_n]$ とおくと，

$$I_n\subset I_{n-1}$$

従って，区間列 $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(I_n=[a_n, b_n],\ a_n<b_n)$ は命題7の 4)と 5）を満たす。よって命題7によりある数 x_0 が存在して

6） $$\{x_0\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}I_n$$

となる。このとき $x_0\in A$ か又は $x_0\in B$ のいづれかであるが，以下 $x_0\in A$ のときには $x_0=\max A$，そして $x_0\in B$ のときは $x_0=\min B$ となることを示そう。

いま $x_0\in A$ として $x_0=\max A$ となることを示そう。もし $x_0\neq\max A$ であるとすると，ある $a\in A$ が存在して $x_0<a$ となる。ところで 5）より，

$$b_n-a_n=\frac{b_0-a_0}{2^n}$$

であり，しかも，$a-x_0>0$ であるから，n を十分大きくとると，$b_n-a_n<a-x_0$ となる。このとき

7） $$b_n+(x_0-a_n)<a$$

となる。また 6）よりすべての n に対して $a_n\leq x_0\leq b_0$ であるから $x_0-a\leq 0$ となる。よって 7）より $b_n<a$ となって，命題1の条件から $a\in B$ となる。もともと $a\in A$ であったから，これは $A\cap B=\phi$ に反する。この矛盾は $x_0\neq\max A$ としたことから生じた。よって $x_0=\max A$でなければならない。

全く同様にして $x_0\in B$ のときには，$x_0=\min B$ であることを示すことができる。（証終）

参考文献

[1] 藤原松三郎：数学解析第一編 微分積分学第一巻，内田老鶴圃，p. 1－22 (1957)
[2] 高木貞治：解析概論，p. 1－11，岩波書店 (1980)
[3] 小松勇作：解析概論 [1] (数学双書 1)，p. 1－47，広川書店 (1976)
[4] 笠原章郎：自然数から実数まで－数の概念入門－(サイエンスライブラリ数学 = 26)，p. 141
[5] Tom M. Apostol : Mathematical Analysis, *Addisison-Wesley Pubishing company* (*Massachusetts*), p. 1 －10 (1963)

平成 5 年(1993) 9 月25日受理
平成 5 年(1993)12月27日発行