結晶学からみた4次元体の3次元体への投影
── 4次元空間の3次元空間への線形変換的考察 ──

満塩　大洸・新関　章三
(理学部自然環境科学教室・理学部数理情報科学教室)

Transformation of Four Dimensional Body to Three Dimensional One from View-point of Crystallography
── Linear Algebraic Consideration of Four Dimensional Space to Three Dimensional One ──

Taikou MITUSIO and Shozo NIIZEKI
Department of Natural Environmental Sciences
Department of Mathmatics and Information Sciences
Kochi University, 780-8520 Japan

Abstract: Transformation of four dimensional body to three dimensional one is discussed. The degree of freedom which means a material or substance can move under each dimension was defined, and consequently the followings are concluded:
1) Generally, in n-dimensional space, the degree of freedom is n.
2) Generally, in n-dimensional space, the axis exsits n-number, and a random point is described as P $(x_1, x_2, x_3, ---, x_n)$ with n-components.
3) Four dimensional body can be transformed to three dimensional one by linear transformation.

Further, some phenomena such as warping and materialization will be explained with some advanced consideration by linear transformation.

キーワード：4次元構造　n次元構造　結晶構造　超結晶　線形変換

はじめに

一般に，4次元空間の3次元空間への投影は，4次元空間の3次元空間への線形変換で表現される．

このアイデアは線形代数学（小林，1994）を適用して，数学的根拠を与えることができる．

これはまた，最近発見され，証明された“準結晶 quasi-crystal”の「回転」，あるいは，「揺らぎ」や「振動」の現象を考える理論的根拠を与えるものである（Edagawa *et al*, 2000）．

また，これの考え方を進めていけば，いわゆる空間ワープ及び物質化・物質移動（物質引き寄せ）などにおける現象が解明できよう．

筆者の1人，満塩は1979年から現在まで，これらの諸事象について検討してきた（たとえば，満

塩，1995など)が，この小論では，これらについて線形代数学的な考察をも含めて，ある程度の論理的な解明を試みたものである．

次元及び自由度の定義

ここでは，あるモノが,「自由に動き回れる度合」を,「自由度 degree of freedom」として，次元 dimension を定義する（満塩，1995).

これらは，表1のように定義される．

表1 次元と自由度

次元	空間位置	自由度	実 例
0次元		0	点
1次元	(x_1)	1	線
2次元	(x_1,x_2)	2	面
3次元	(x_1,x_2,x_3)	3	立体
4次元	(x_1,x_2,x_3,x_4)	4	4次元体
↓	↓	↓	↓ 超立体
n次元	$(x_1,x_2,\text{-----},x_n)$	n	n次元体

ただし，x_i $(1 \leqq i \leqq n)$ は正の数で，$n \geqq 0$

表1から明らかなように，一般に，n次元空間のモノは，自由度は n である（満塩，1995).

ここで，$n = 0$ の場合を考えると，0次元空間となる．そこでは自由度は0で，動きがなく，これは「点」の世界である．

次に $n = 1$ の場合を考えると，1次元空間となる．そこでは「線」の世界である．つまり,「線の世界」では，ある線上を単に往復できるのみである．ここではその位置は x_1 で決定される．当然，x_1 には$-\infty$から$+\infty$の間の任意の数を代入できる．これが「自由度は1」の世界である．すなわち，線の世界では1次元で，自由度は1である．

更に，$n = 2$ の場合は2次元空間となる．そこでは，線が集まって,「面」の世界となる．つまり,「面の世界」では，ある面上を，X軸とY軸で定まる平面上を自由に動けるのである．ここでは，その位置は (x_1, x_2) の2成分で決定される．ここでも当然，x_1，x_2 は$-\infty$から$+\infty$の間の任意の数である．これが「自由度は2」の世界である．すなわち，面の世界では2次元で，自由度は2である．

次に，$n = 3$ のときは3次元空間となる．そこでは，面が積み重なって「立体」の世界となる．つまり,「立体の世界」では，ある空間を，X軸とY軸とZ軸で定まる立体空間内を自由に動けるのである．ここでは，その位置は,(x_1, x_2, x_3) の3成分で決定される．ここでも当然，x_i $(1 \leqq n \leqq 3)$ は$-\infty$から$+\infty$の間の任意の数である．これが「自由度は3」の世界である．すなわち，立体の世界では3次元で，自由度は3である．

以上までは，単純であるから，通常に理解は可能である．しかし，$n = 4$ の場合は，どうなるであろうか？

これは4次元空間となるはずである．そこでは，立体が積み重なっているが，表現法がないので,「4次元体」あるいは「超立体」の世界とでも呼ぶべきであろう．つまり,「4次元体=超立体の世界」では，ある空間を，x_1軸・x_2軸・x_3軸・x_4軸で定まる空間を自由に動けるのである．ここでは，その位置は,(x_1, x_2, x_3, x_4) の4成分で決定されるはずである．ここでも当然，x_i $(1 \leqq i \leqq 4)$ には$-\infty$から$+\infty$までの任意の数である．これが「自由度は4」の世界である．すなわち，4次元体=超立体の世界では4次元で，自由度は4である．

ただし，$n \geqq 4$ のときは，n次元空間のことを，超空間とここでは呼ぶことにする．

更に，一般化すれば，n次元空間の世界は，(x_1， x_2，-------， x_n) のn成分で決定されるはずである．これが「自由度はn」の世界である．

すなわち，n次元の世界では自由度はnである．つまり，n次元空間のモノは，自由度はnあることになる．

なお，重要なことは，たとえば，小数次元の3.5次元などの存在は，フラクタル幾何学で既に証明されているのである．

結晶学からみた次元の具体的な実例

ここではまず，3次元世界で普通にみられる現象から述べる．

1次元の直線の世界では，たとえば，綱曳きなどのように，横軸あるいは縦軸のみを見ればよいことになる．

次に，2次元の平面の世界では，たとえば，新聞紙のような平面で，横軸と縦軸とを同時に考慮すればよい．また，これは中学校や高等学校で学習する数学での平面座標でもおなじみである．

更に，3次元の世界では，立体の世界であり，我々がごく日常で体験しているきわめて普通の世界である．また，著者の1人，満塩の専攻する地球科学の中の鉱物学minerallogyや結晶学crystallographyでは，結晶crystalの構造を決定するために，立体座標のa軸・b軸・c軸の3軸を想定している．ここで，前述の表現に従えば，これらの結晶軸は， x_1， x_2， x_3 とみなせる．また，単位格子unit cellの大きさをa, b, cとする．

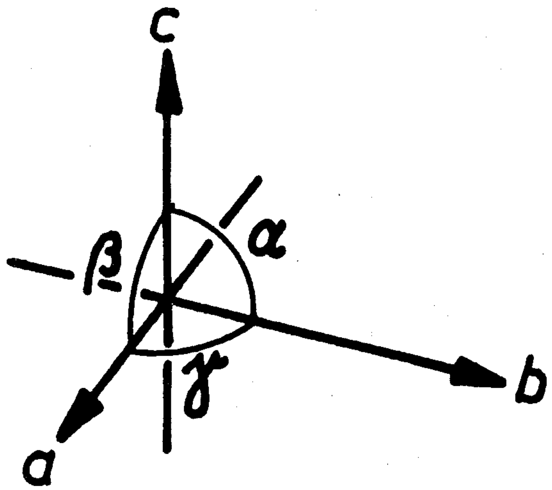

図1　結晶軸と角度

それに加えて，各軸の交わりの角度も，90°の直交座標から傾斜した角度を， α・β・γ のそれぞれの角度の場合も考慮に入れて，図1のような結晶形の座標軸を定義している．そして，現実の鉱物類・結晶類の結晶面crystal faceは，これらの3軸を一定の割合で切っているが，各結晶軸の単位の長さをa, b, cとして，結晶面がa, b, c軸をそれぞれ$\frac{a}{h}$，$\frac{b}{k}$，$\frac{c}{l}$で切ると，その結晶面は (h k l) と表わす．これをミラー指数Miller indexと呼称している．

そして，たとえば，立方晶系以外の (0 0 1) の面は底面basal planeと呼ばれ，(1 0 1) は柱面prism planeである．これらの中で最も複雑なのは，(1 1 1) の結晶面であり，これは卓面pyramid planeと呼ばれ，a軸・b軸・c軸を1：1：1で切っている面である．

なお，固体であっても，結晶を構成していない物質は，非晶質amorphousと呼ばれている．たとえば，カーボンブラックやススのような物，あるいは，人工ガラスや火山ガラスのような物も，結晶学的には非晶質である．

それ故，無機固形物inorganic materialsは，結晶質crystallineか非晶質amorphousのいずれかの物質である．

表２　結晶形と結晶族

名称		単位結晶の状態		実例
		結晶軸	軸の交差角度	
1	等軸晶系	a＝b＝c	$\alpha=\beta=\gamma=90^\circ$	立方体・サイコロ
2	六方晶系	a＝b≠c	$\alpha=\beta=90$, $\gamma=120^\circ$	６角形柱
3	正方晶系	a＝b≠c	$\alpha=\beta=\gamma=90^\circ$	正方形柱
4	斜方晶系	a≠b≠c	$\alpha=\beta=\gamma=90^\circ$	直方体・マッチ箱
5	単斜晶系	a≠b≠c	$\alpha=\gamma=90^\circ\neq\beta$	並行四辺形柱・マッチ箱の１稜を押した立体
6	三斜晶系	a≠b≠c	$\alpha\neq\beta\neq\gamma$	マッチ箱の１頂点を斜めに押した立体

以上を考慮して，全ての３次元の結晶は表２のように，６つの結晶族に区分されている．

表２について，最も簡単な結晶族の等軸晶系 cubic system から説明しよう．

１）等軸晶系 cubic system

これは，各軸は a＝b＝c で，座標軸の交わる角度は $\alpha=\beta=\gamma=90^\circ$ で，３次元の直交座標である．これはサイコロのような立方体を考えればよいのである．天然の鉱物では，ザクロ石類 garnet group がこれに属している．

２）六方晶系 hexagonal system

これは，各軸は a＝b≠c で，座標軸の交わる角度は $\alpha=\beta=90^\circ$，$\gamma=120^\circ$ である．これは c 軸のみが長くて，平面360°を120°ずつの３等分にしたものである．つまり，６角柱の形状であり，たとえば，縦の長い６角形の水晶の棒のようなものを考えればよいのである．天然の鉱物類では，水晶を含む石英 quartz がある．

なお，この晶系に類似した３方晶系 trigonal system もあるが，これは a＝b＝c で，座標軸の交わる角度は，$120^\circ>\alpha=\beta=\gamma\neq90^\circ$ である．

３）正方晶系 tetragonal system

これは，各軸は a＝b≠c であるが，座標軸の交わる角度は $\alpha=\beta=\gamma=90^\circ$ の直交座標である．これは，c 軸のみが長い正方形柱の形を考えればよいのである．天然の鉱物類では，ジルコン類 zircon group がある．

４）斜方晶系 orthorhombic (rhombic) system

これは，各軸は a≠b≠c で，座標軸の交わる角度は $\alpha=\beta=\gamma=90^\circ$ の直交座標である．つまり，これは座標軸の角度はお互いに直交しているが，各軸の長さがすべて異なっているのである．つまり，マッチ箱のような直方体あるいは四角柱を考えればよい．天然の鉱物では，黄玉 topaz である．

５）単斜晶系 monoclinic system

これは，各軸は a≠b≠c で，座標軸の交わる角度は $\alpha=\gamma=90^\circ\neq\beta$ である．これは各軸の長さは３軸共に異なるうえに，かつ，座標軸の交わる角度は，$\alpha=\gamma$ とは90°で直交しているが，１つの面の角度 β のみが斜交しているのである．つまり，これは平行四辺形柱である．たとえば，マッチ箱を b 軸を固定して，a 軸に沿って押したような形の立体を考えればよい．天然の鉱物類では，ヒスイ輝石類 jadeite group である．

６）３斜晶系 triclinic system

これは，各軸は a≠b≠c で，座標軸の交わる角度は $\alpha\neq\beta\neq\gamma$ である．つまり，これはすべての結晶の中でもっとも複雑な構造である．各軸の長さは３軸ともに異なるうえに，かつ，座標軸の交わる角度がそれぞれ異なるという，いわば，もっとも変形した結晶である．つまり，マッ

チ箱の1つの頂点を，斜めに押してできた立体である．この晶系に属する自然界の結晶では，長石類 feldspar group である．また，方解石 calcite は六方晶系とされるが，複雑にすれば，この3斜晶系ととらえるのも可能である．

さて，これらの結晶がc軸方向に，紙を重ねたように並ぶのを，層状構造 sheet structure と呼ぶが，これは粘土鉱物 clay minerals に特徴的にみられる結晶構造である．たとえば，3次元の立体構造をなしている鉱物を，メノウ鉢などで擦りつぶしていくと，次第に粒子が細かくなっていく．そうすれば，1種の平面状の，前述の底面（001）方向に重なった層状構造の鉱物ができる．この代表的なものは，粘土鉱物類 clay minerals と呼ばれているが，これはある種の「2次元的鉱物」と言えなくもなかろう．

4次元構造の超結晶

一方，3次元鉱物とは別に，4次元構造を持つ鉱物を想定しよう．もし，4次元鉱物があると仮定すれば，この投影体は4つの特質を持つ3次元立体の鉱物となるはずである．何故なら，3次元鉱物はa軸・b軸・c軸方向の2次元平面に投影すれば，3つの面を持っている．同様に，2次元の層状鉱物は2次元平面に投影すれば，a軸あるいはb軸からみれば，2つの異なった線形にみえることからも理解できるであろう．

さて，実際に4次元構造を持つ物質は，イスラエルの学者により，1984年に「準結晶 quasi-crystal」とされたものが発見されたが，これは「準結晶」というよりも，「超結晶 super-crystal」と呼ぶべきである．これは，物質の新しい秩序構造であり，周期的な原子配列は持たないが，自然界の結晶にはない特殊な対称性を持つとされている．また，これは摩擦が小さく，極めて硬い特性を生かして，高級フライパンの表面加工や，金属にこの「準結晶」の粒子を混合して金属の強化実験も行われている．

ここで言う4次元構造とは，「回転」，あるいは，「振動」または「揺らぎ」によって確認される．これは図2のように，3次元の立体空間内を「回転」あるいは「振動」している状態である．つまり，ある1点や1軸に沿って，物質が回転していると，ある状態で出現して，やがて消失し，また再びそれが出現することになる．これを「揺らぎ」または「振動」と呼称しているのである．

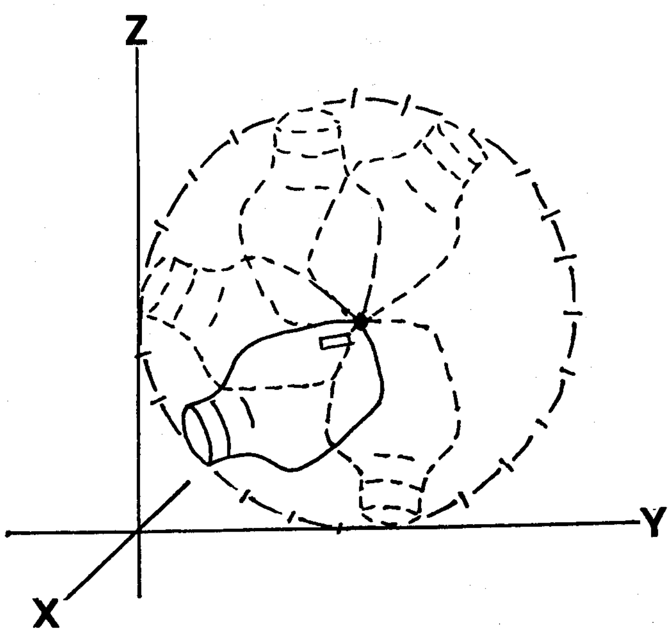

図2　立体空間での3次元体の揺らぎ，あるいは，振動

実際に，Edagawa *et al.* (2000) は，この超結晶を電子顕微鏡下においても明らかにした．図3にそのモデルを示している．これはアルミニウムAl・銅Cu・コバルトCoからなる合

金の超結晶を，850℃（1123K）に加熱して，高分解電子顕微鏡下で観察したのである．その結果，3次元構造が部分的に一変し，再び元に戻るという「揺らぎ」あるいは「振動」が，数10秒から数分間の不規則な周期で繰り返しているのが観察された．つまり，図3の左側の電子顕微鏡写真におい

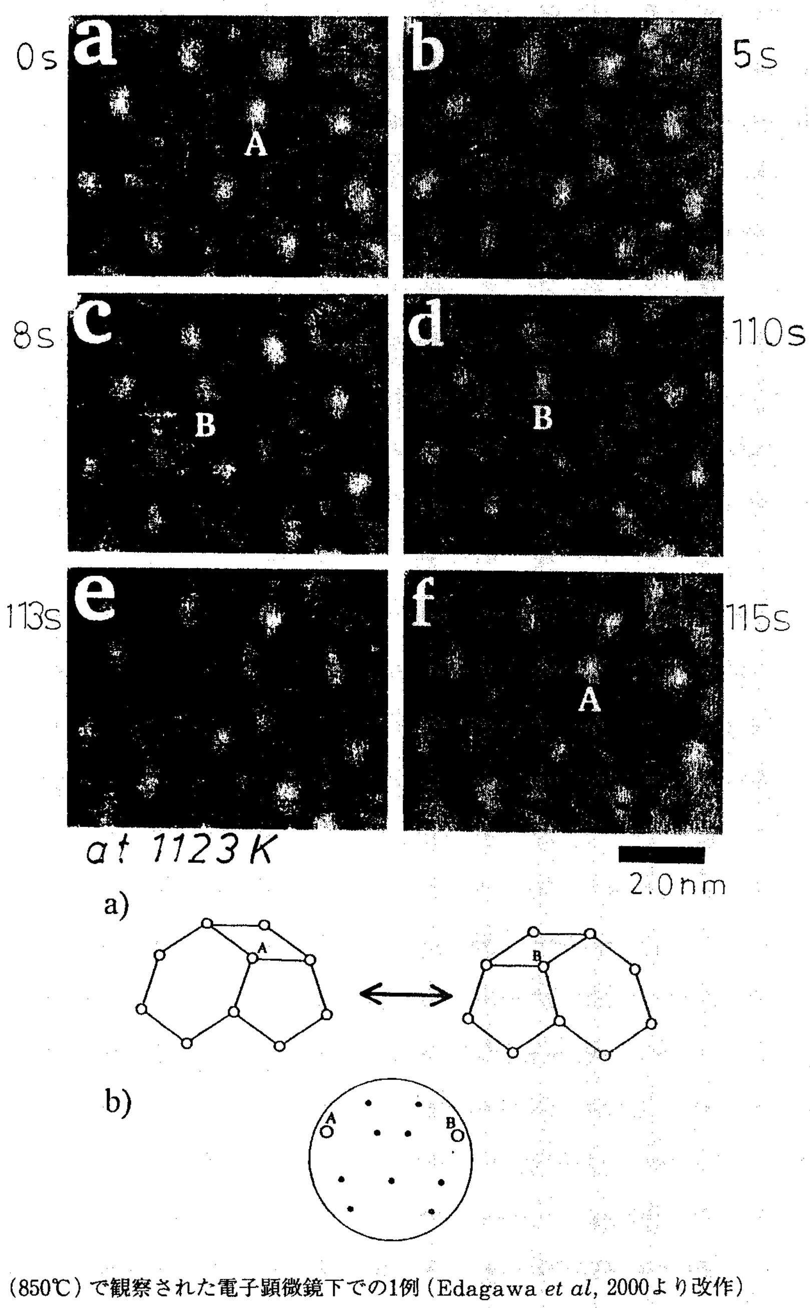

図3 1123K（850℃）で観察された電子顕微鏡下での1例（Edagawa *et al*, 2000より改作）

上段はそれぞれの秒経過後の電顕下の映像．A・Bは結晶面．下段a）は上段を図化したもので，b）はa）の頂点の垂直方向の断面．

注意：A面が，a）の0秒から115秒経過後のf）で再び出現し，各面が「回転」・「振動」あるいは「揺らぎ」を起こしていることが分かる．

て，a）の0秒の状態から，b)〜e）を経過して，f）の115秒後の状態となったのが確認されたのである．この図の下側に単純に図化してa）の状態からf）の状態を示している．これは，a）の右上にあったA面が，f）では左側にきているのである．つまり，この面はある時間の経過後に，「回転」あるいは「振動」しているである．

超結晶内の原子の配列には，通常の3次元界の結晶のように規則性はないが，4次元や6次元の高次元世界に存在する結晶であれば持っているはずの，奇妙な結晶性を備えているとされている．

また，この超結晶を加熱すれば，この不思議な規則性が原因で，結晶構造が一変する振動が起こると，理論的には予想されていたのが，彼らの実験により，この予想が見事に裏付けられたとされている．

以上のように，4次元以上の超立体が実在することも，既に証明されたわけである．

4次元空間への展開

たとえば，結晶学でのa軸であるが，一般のX軸に2次元空間（a_1，a_2）がこの軸に内包されていると考えてみよう．

前述のように，通常の立体軸は鉱物学での「結晶軸」が実際に考えられているのである．

そこで，更にこのa軸，あるいは，X軸に沿って，別の空間，つまり，（a_1，a_2）平面が内包されていると定義するのである．

そうすれば，任意の1点は，P（（a_1，a_2），x_2，x_3）となる．

これは，3次元空間が4次元空間へと拡大されたことになる．

または，X軸の代わりに，Y軸でも，（x_1，（b_1，b_2），x_3）と定義できる．また，Z軸でも，（x_1，x_2，（c_1，c_2））と定義できる．

こうすれば，4次元空間へと定義が拡大されたことになる．

更に，X軸（あるいは，Y軸・Z軸）に，平面より拡大した別の3次元空間（a_1，a_2，a_3）が内包されていると考えれば，5次元空間へと定義が拡大されたことになるが，これらについては別に報告する．

たとえば，このような4次元構造はラセン状構造に通じており，ラセン階段を昇って，Z軸方向（結晶学のc軸）に1回転して上昇していくと，下方からは，その姿は見えなくなる．このような事象は，ある種の4次元空間の構造をもつとも解釈できよう．また，遺伝子geneのDNAの立体ラセン構造も，この種の超立体とも考えられよう．

これらの考察を更に進めれば，物質のワープ現象や物質化・物質引き寄せなどの現象が説明できることも可能であろう。つまり，4次元以上の高次元空間からの物質などが，3次元空間に出現，あるいは，投影されたと考えることもできよう．

ま と め

4次元空間の投影体の線形代数学の適応の結果，以下のようなことが明らかになった．

1．一般に，n次元空間では自由度はnである．
2．一般に，n次元空間では，座表軸はn本あり，その任意の空間の位置Pは，P（x_1，x_2，x_3，−−−，x_n）のn個の成分で規定される．
3．また，線形変換により，4次元空間は3次元空間に投影できる．

更に，今後ともこれらの超次元空間での事象に関する解明が必要である．

謝　　辞

本報告を行うにあたり，高知大学理学部自然環境科学教室の中川昌治助教授には貴重なご教示をいただき，また，人間・環境変動研究会の方がたには，常に多大のご協力をいただいている．これらの方々に心より感謝いたします．

引用文献

Edagawa, K., Suzuki, K. and Takeuchi, S.:High transmission electron microscopy observation of thermally fluctuating phasons in decagonal Al-Cu-Co. *Physical Rev. Letters,* **85**, (8), 1674-1677 (2000).

小林貞一：線形代数．培風館，1-202 (1994).

満塩大洸：次元と自由度．叡知，(2)，3-5 (1995).

平成12(2000)年10月4日受理
平成12(2000)年12月25日発行