微分積分学教程の一様相

松田　崇*・新関　章三**
（*高知医科大学数学教室・**高知大学理学部数学教室）

An Aspect of a Course in Advanced Calculus

Takashi MATSUDA* and Syozo NIIZEKI**
*Department of Mathematics, Kochi Medical School, Nankoku-shi, Kochi 783, Japan;
**Department of Mathematics, Fuculty of Science, Kochi University, Kochi-shi, Kochi 780, Japan

Abstract. The first course in advanced calculus which follows elementary calculus is a critical one for students who are seriously interested in mathematics. Although an intuitive discussion will satisfy students who are not interested in detailed proofs, the complete proofs should be also included for those who prefer a more rigorous presentation. In this article, some teaching materials and teaching methods are described in detail. Many of these were suggested by classroom experience.

1．緒言

高等学校の微分積分に引き続き，大学の一般教育での微分積分学は，数学に関心のある学生（理工系，医系）にとって困難な問題を含んだ科目である。厳密な取り扱いを望まない学生にとっては，直観的な取り扱いで満足するであろうが，少しでも厳密な取り扱いを望む学生には，きちんとした証明も準備されるべきであろう。

一方教える側は，かぎられた時間内で何を教えるべきかという教材の選択の問題，またそれをどのように取り扱うのか，直観的に扱うのか，厳密な理論を展開すべきか，両者の狭間で模索を繰り返えしているのが現実であろう。

以下普通必ず取り上げられる教材から三点—ε，δ 方式，有理関数の部分分数分解，二変数の微分法—を選び，その取り扱いについて，講義からの示唆も含めて，一つの様相を論じたい。

2．ε-δ 方式

極限の概念を正しく扱おうとするならば，ε-δ 方式による極限の定義から出発することに疑問の余地はない。しかしながら，一般教育のいわゆる理工系（数学専攻を除く)，医系の学生に，これを講義すべきであるとは言いにくいことも事実である。

現在出版されている膨大な数の微分積分の教科書の大部分は ε-δ 方式の定義の記載はあるものの，実際はテキストとして採用した教授者の判断により講義したり，しなかったりが現実と思われる。

ε-δ 方式に全く触れなかった場合，数列，関数の極限，連続性に関する大部分の定理は，厳密な証明はもとより，もっともらしい（plausible）証明すらできず，必要な定理は“証明なしに認めよう”ということになる。それでも，たとえば，連続関数の中間値の定理等はグラフをかいて直観的に認めさすほうが，なまじ証明するよりましかもしれないが，次の

［命題１］ $\lim_{x\to a} f(x)=\lambda$ ならば $f(x)$ は $x=a$ の近傍で有界である。

等は直観では認めがたく，証明が必要なのではないだろうか。次の(1)，(2)，(3)を考える。

(1) x が a と異なる値をとって a に限りなく近づくとき，関数 $f(x)$ の値が一定の数 α に限りなく近づく。

(2) $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$ または $x\to\alpha$ のとき $f(x)\to\alpha$ とかく。

(3) 任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある $\delta>0$ が存在し，$0<|x-a|<\delta$ であるすべての x に対して，$|f(x)-\alpha|<\varepsilon$

(1)⟹(2)が高校で学ぶ極限の定義であり，(3)⟹(2)が ε-δ 方式による定義である。ε-δ 方式の理解困難な点は(3)⟹(1)と考えられる。(1)は動であるのに対して，(3)は静であり，$\varepsilon\to 0$ と $\delta\to 0$ の関係はなかなか浮かび上がってこない。

ε-δ 方式による定義は，あきらめるにしても，(1)を定義として(1)⟹(3)が説明できれば，その意味は大きい。そのために，次の補題（シュヴァルツ［１］）が便利である。

［補題］ある性質がいくつかの論理記号 $\forall$，$\exists$ を含み，そのあとに一つの性質 P が来るようなものであるとき，その性質の否定は，各記号 $\forall$ を $\exists$ で，$\exists$ を $\forall$ で置きかえ，さらに P をその否定 $\overline{P}$ で置きかえることによって得られる。

これは数学的帰納法で簡単に証明できて，また一般の学生にも容易に理解できるものである。

次に，(3)を論理記号 $\forall$，$\exists$ を用いて書けば（書きかえには若干の訓練が必要かも知れない）

(3)′ $$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x\in(a-\delta,\ a+\delta),\ x\neq a : |f(x)-\alpha|<\varepsilon$$

この否定は，補題から

(4) $$\exists\varepsilon>0,\ \forall\delta>0,\ \exists x\in(a-\delta,\ a+\delta),\ x\neq a : |f(x)-\alpha|\geqq\varepsilon$$

となる。さて，(1)⟹(4)とする。(4)の x を x_δ とすると，(1)の意味で，$\delta\to 0$ のとき，$x_\delta\to a$ である

から $f(x_\delta)\to\alpha$. ところが，これは，すべての $\delta>0$ に対して $|f(x_\delta)-\alpha|\geqq\varepsilon>0$ に反する。ゆえに，(3)が成立する。

こうして，論理記号 $\forall$，$\exists$ を用いて(3)を書きかえることへの抵抗等，問題はあるものの，ともかく，(1)⇒(3)を認めさすことに成功すれば，上の命題１も，また次の

［命題２］ $f(x)$ が $x=a$ で連続で $f(a)>0$ (<0) ならば，$x=a$ の近傍で $f(x)>0$ (<0)

等も簡単に証明できる。すなわち，$\varepsilon>0$ は任意であるから，命題１では，たとえば $\varepsilon=1$ とおき，命題２では $\varepsilon=\frac{1}{2}f(a)>0$ ((1)，(2)の α は $f(a)$ に，また(2)の $0<|x-a|<\delta$ は $|x-a|<\delta$ に変える）とすればよい。

また，しばしば使用される「十分小さい…」とか「十分近くとれば…」等も，たとえば次のように定義しておくべきではないだろうか。

［定義］ $\exists\delta>0$，$\forall x\in(a-\delta,\ a+\delta)$ ($x\neq a$ でも可)：P であるとき，十分小さい $\delta>0$ に対して P であるとか，$|x-a|$ を十分小さくとれば P 等という。

たとえば，$f(x)$ が $x=a$ で微分可能で $f'(a)>0$ とすると $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)>0$ であるから，

(5)　$|x-a|$ が十分小さければ $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$

である。という説明は「十分小さければ」の明確な定義がなければ，これ以上の進展はない。しかし上のように定義しておけば(5)は $\exists\delta>0$，$\forall x\in(a-\delta,\ a+\delta)$，$x\neq a$：$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$ となり，(1)のレベルで

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)>0$$

を解釈しても，(3)を認めているので，$\varepsilon=\frac{1}{2}f'(a)>0$ として(5)は証明できるのである。

(1)から出発して定義(3)⇒(1)に到達する試みもあるが（稲葉三男［３］)，上に述べた程度にとどめ，これ以上の深いりは避ける方が賢明であろう。

３．有理関数の部分分数分解

［定理１］ 実数体における有理関数 $\frac{f(x)}{g(x)}$ $(deg\ f(x)<deg\ g(x))$ は

$$\frac{A}{(x-\alpha)^n},\ \text{または}\ \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n},\ (p^2-4q<0)$$

という形をしたいくつかの有理関数の和として表わせる。

ただし，m，n は正の整数，A，B，C，p，q は実定数である。

この定理は，かつては一般教育の代数学・幾何学において学ぶ機会があったが，その後，線形代数に代わり，現在は，その必要から微分積分の中で教えられている。しかしながら，証明までとなるとまちまちなのが現実ではないだろうか。

スコットとピープルズは定理１の代わりに，証明の簡単な次の定理を推奨している。([３])

［定理２］ f，g，w は実数体における多項式で，$deg(f)<deg(g^k w)$，(k：正の整数) さらに g と w は互いに素で，g は既約とすれば

$$\frac{f}{g^k w}=\frac{s}{g^k}+\frac{t}{g^{k-1}w} \tag{2.1}$$

となる s と t が，$deg(s)<deg(g)$ ならば一意に定まり，$deg(t)<deg(g^{k-1}w)$。

スコットとピープルズは，一つの多項式に，この多項式を g で割った剰余を対応させる準同型写像を用いた簡明な証明を与えているが([３])，一般の学生には以下の初等的な証明の方がよいであろう。

［証明］ 恒等式 $\dfrac{f}{g^k w}=\dfrac{s}{g^k}+\dfrac{f-sw}{g^k w}$ を考える。

(1) $g(x)=x-\alpha$ の場合。$deg(s)<deg(g)$ ならば s は定数で，$w(\alpha)\neq 0$ であるから

$$(2.1)\Longleftrightarrow s=\frac{f(\alpha)}{w(\alpha)}$$

このとき $f-sw=(x-\alpha)t$，$deg(t)<deg(g^{k-1}w)$ となる。

(2) $g(x)=x^2+px+q$，($p^2-4q<0$) の場合。$x^2+px+q=0$ の二つの解を α，$\overline{\alpha}$ とすると

$$Im(\alpha)=-Im(\overline{\alpha})\neq 0$$

$deg(s)<deg(g)$ ならば $s(x)=Ax+B$，(A，B：定数) と書ける。$w(\alpha)\neq 0$，$w(\overline{\alpha})\neq 0$ であるから

$$(2.1)\Longleftrightarrow A\alpha+B=\frac{f(\alpha)}{w(\alpha)},\quad A\overline{\alpha}+B=\frac{f(\overline{\alpha})}{w(\overline{\alpha})}$$

$\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ \overline{\alpha} & 1 \end{vmatrix}=2Im(\alpha)\neq 0$ であるから上の A，B は一意に定まり

$$f-sw=(x^2+px+q)t \text{ で } deg(t)<deg(g^{k-1}w)$$

Q.E.D

原始関数を求めるための部分分数分解ならばこの定理２で十分である。また，証明の(1)は s の計算に利用できる。

たとえば，$\dfrac{3x+1}{x^3(x^2+1)}$ は定理２を繰返し用いて

$$\frac{3x+1}{x^3(x^2+1)}=\frac{a}{x^3}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x}+\frac{t}{x^2+1}$$

$deg(t)<deg(x^2+1)$ であるから，$t=dx+e$，これが定理１である。

また，$\dfrac{1}{x(x^5+1)^3}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{x^4\{((x^5+1)^2+1)+1\}}{(x^5+1)^3}$

$$=\frac{1}{x}-\frac{x^4}{x^5+1}-\frac{x^4}{(x^5+1)^2}-\frac{x^4}{(x^5+1)^3}$$

となり，$\displaystyle\int\frac{1}{x(x^5+1)^3}dx$ を求めるのに都合のよい分解である。

定理 1 に執着すれば $x^5+1=(x+1)\left(x^2-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}x+1\right)\left(x^2-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}x+1\right)$ とし，迷路に入り込むであろう。

(2.1)$\Longleftrightarrow f=sw+gt$ であるから

$$f \bmod g=sw \bmod g \tag{3.1}$$

または

$$f \bmod g=s(w \bmod g) \bmod g \tag{3.2}$$

が成立する。そこでスコットとピープルズは s は(3.1)または(3.2)から，また t は $t=\dfrac{f-sw}{g}$ より計算するのが，実用上最も容易ではないかと述べている。([3])

$g(x)=x-\alpha$ の場合，s は定数であるから $s=\dfrac{f(\alpha)}{w(\alpha)}$ で，これは上の証明(1)でも述べた。

$g(x)=x^2+p(x)+q$，$(p^2-4q<0)$ の場合，(3.1)または(3.2)を解くのが最善とは言いきれないのではないだろうか。次の例を考えてみる。$R(x)=\dfrac{x^3+3}{(x^2+1)(x^2+2)}$

$g(x)=x^2+1$ とすると $x^3+3=-x+3 \bmod g$，$x^2+2=1 \bmod g$ であるから，$s(x)=-x+3$

したがって $t(x)=\dfrac{x^3+3+(x-3)(x^2+2)}{x^2+1}=2x-3$

一方，定理 1，2 いずれからも

$$R(x)=\frac{ax+b}{x^2+1}+\frac{cx+d}{x^2+2}$$

とかけるから，$x^3+3=(ax+b)(x^2+2)+(cx+d)(x^2+1)$

係数を比較して，$a=-1$，$b=3$，$c=2$，$d=-3$

方法は問題に応じて自由に考えればよい。

4．一変数から二変数への展望

一変数の微分法のあとに二変数の微分法を学ぶというのは順序であるが，問題は両者の間の概念の関連に触れるどころか，その差異を強調する余り，二変数はなじめない，難解なものという印象を与えてはいないだろうか。

$f_{xy}=f_{yx}$ はつねに成立するのかといった問題は，二変数の関数を扱ったために生じた，一変数の微分法の問題であり，二変数の関数の全微分可能性は，一変数の微分可能性の拡張であるこ

とを認識させることは極めて重要なことと思われる。

いわゆる偏微分法の理解は，一変数と二変数の微分法のアナロジーの認識から始まると言ってもいいのではないだろうか。

以下，$A=(a,\ b)$，$H=(h,\ k)$，$\Lambda=(\lambda,\ \mu)$，$|H|=\sqrt{h^2+k^2}$，$D\subset R^2$ とする。

(1)　全微分可能性

一変数の場合の微分可能性に対する二変数のアナロジーは次のようになる。

$$f(A+H)-f(A)=\Lambda\cdot H+|H|\varepsilon(H),\ \varepsilon(H)\to 0\ (|H|\to 0) \tag{4.1}$$

となる Λ が存在することである。ただし，$\Lambda\cdot H$ はベクトル Λ と H の内積または，行列の積 $\Lambda{}^tH$ である。

これが，f が $A=(a,\ b)$ で全微分可能であることの定義なのであるが，(4.1)を書き直した

$$f(a+h,\ b+k)-f(a,\ b)=\lambda h+\mu k+\sqrt{h^2+k^2}\,\varepsilon(h,\ k),\ \varepsilon(h,\ k)\to 0\ ((h,\ k)\to(0,\ 0))$$

となる λ，μ が存在することと定義されるのが普通である。このような Λ が存在すれば $\Lambda=(f_x(A),\ f_y(A))$ である。これは $\mathrm{grad}\,f(A)$ と表されるが，フラニガン（[5]）は $f'(X)$ は D から R への写像で $\mathrm{grad}\,f(X)\cdot H=f'(X)H$ と定義している。この $f'(X)$ は一変数の導関数に相当する。$z=f(X)$，$dX=(dx,\ dy)$ とすると，一変数の微分に対応して，$dz=f'(X)dX$ が考えられるが，これを書き直せば

$$dz=f_x(x,\ y)dx+f_y(x,\ y)dy$$

となり，これは f の全微分に他ならない。

(2)　接平面と法線

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ b)$ における接線の方程式は

$$y-b=f'(a)(x-a) \tag{4.2}$$

である。いま，曲面 $z=f(x,\ y)$ 上の点を $P(a,\ b,\ c)$ とし，$X=(x,\ y)$，$A=(a,\ b)$ とすれば(4.2)のアナロジーは

$$z-c=f'(A)(X-A) \tag{4.3}$$

となり，これを書き直せば，$f_x(a,\ b)(x-a)+f_y(a,\ b)(y-b)+(-1)(z-c)=0$ であるから，(4.3)の表す平面を π とすると，π はベクトル $(f_x(a,\ b),\ f_y(a,\ b),\ -1)$ に垂直である。これは，接線(4.2)がベクトル $(f'(a),\ -1)$ に垂直であることに対応する。したがって次の定義が得られる。

［定義］f が全微分可能であるとする。曲面 $z=f(x,\ y)$ 上の点 $(a,\ b,\ c)$ に対し，平面

$$\pi : z-c=f_x(x,\ y)(x-a)+f_y(a,\ b)(y-b)$$

を接平面といい，直線

$$l : \frac{x-a}{f_x(a,\ b)}=\frac{y-b}{f_y(a,\ b)}=\frac{z-c}{-1}$$

を法線という。

接平面の定義はいろいろあるが，接平面が平面曲線の接線に対応する空間の図形であることがよく分かる最も簡明な定義ではないかと思う。

(3) 合成関数の微分法（chain-rule）

$z=f(x, y)$ は全微分可能で，$G:(\alpha, \beta)\to R^2$ は $X=G(t)=(x(t), y(t))$ で定義され，x，y は微分可能で $G'(t)=(x'(t), y'(t))$ とする。さらに $X+H=G(t+\delta)$ とすると

$$f(X+H)-f(X)=f'(X)H+|H|\varepsilon_1(H)$$

$$G(t+\delta)-G(t)=\delta G'(t)+\delta\varepsilon_2(\delta)$$

したがって，

$$\frac{f(G(t+\delta))-f(G(t))}{\delta}=f'(G(t))(G'(t)+\varepsilon_2(\delta))+\frac{|H|}{\delta}\varepsilon_1(H)$$

ここで，$\delta\to 0$ のとき $|H|\to 0$ で $\varepsilon_1(H)\to 0$，$\varepsilon_2(\delta)\to(0, 0)$，$\dfrac{|H|}{\delta}\to\pm|G'(t)|$ であるから

$$\frac{f(G(t+\delta))-f(G(t))}{\delta}\to f'(G(t))G'(t)\quad(\delta\to 0)$$

ゆえに

$$\frac{dz}{dt}=f'(G(t))G'(t)$$

これは一変数の場合と全く同型の公式であるが，これを書き直せば

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

となり，二変数特有の形となる。

(4) C^1 級

［定理］ある領域で $f_x(X)$，$f_y(X)$ が存在して連続ならば，f はこの領域で全微分可能であるが成立するから

$$f_x(X),\ f_y(X)\text{ が連続}\Longleftrightarrow f'(X)\text{ が存在して連続}$$

となり

$f_x(X)$，$f_y(X)$ が連続であるとき，f は C^1 級である。

と定義すれば，この定義は一変数のアナロジーとなる。なお，定理の一変数アナロジーは存在せず，この定理は二変数特有のものである。

(5) $F:D\longrightarrow R^2$ の微分可能性

$F(X)=(f_1(X), f_2(X))$ とする。

［定義］ $F(A+H)-F(A)=\Lambda\cdot H+|H|\varepsilon(H)$，$(\varepsilon(H)=(\varepsilon_1(H), \varepsilon_2(H))$

$$\varepsilon(H)\to(0, 0)\quad(|H|\to 0)\tag{4.4}$$

である 2×2 行列 Λ が存在するとき，F は A で微分可能であるといい Λ を $(DF)(A)$ で表す。ただし，$\Lambda\cdot H$ は行列の積 $\Lambda{}^tH$ を表す。

$$(4,4) \Longleftrightarrow f_i(A+H)-f_i(A)=\Lambda_i\cdot H+|H|\varepsilon_i(H)$$
$$\varepsilon_i(H)\to 0 \ \ (|H|\to 0),\ \ (i=1,\ 2) \tag{4.5}$$

であるから，F が A で微分可能であるとき，$\Lambda_i=(f_{ix}(a,\ b),\ f_{iy}(a,\ b))$，したがって

$$(DF)(X)=\begin{bmatrix} f_{1x}(X) & f_{1y}(X) \\ f_{2x}(X) & f_{2y}(X) \end{bmatrix}$$

となる。$(DF)(X)$ は F のヤコビ行列である。

(6) ヤコビアン

一変数の場合，f が $x=x_0$ で微分可能で，$f'(x_0)\neq 0$ ならば

$$f'(x_0)(f'(x_0))^{-1}=1 \tag{4.6}$$

$F:D\longrightarrow R^2$ が $X=X_0$ で微分可能ならば，$(DF)(X)$ は 2×2 行列であるから

$\det(DF)(X_0)\neq 0$ ならば逆行列 $\{(DF)(X_0)\}^{-1}$ が存在して，(4.6) のアナロジーは

$$F'(X_0)\{DF\}(X_0)\}^{-1}=E,\ (E：単位行列)$$

となる。$\det(DF)(X)$ が F のヤコビアンである。

一変数のスカラー $f'(x)$ に対応する二変数のスカラーはヤコビアン $\det(DF)(X)$ と考えられる。

(7) 逆関数の定理

一変数の場合，次の定理は簡単に証明できる。

[定理] f は $x=a$ の近傍 U で C^1 級，$f'(a)\neq 0$, $b=f(a)$ とすると，$y=b$ の近傍 V で定義された，C^1 級の関数 $g：V\to U$ が存在し，$f(g(y))=y$，$g(f(x))=x$ である。

二変数の場合，定理のアナロジーは次の命題である。

[命題] $U：|X-A|<r$, $(r>0)$ とし，$F：U\to R^2$ は U で C^1 級，$\det(DF)(A)\neq 0$, $B=F(A)$ とすると，ある $V：|Y-B|<\delta$，$(\delta>0)$ で定義された C^1 級の関数 $G：V\to U$ が存在し

$$F(G(Y))=Y,\ \ G(F(X))=X$$

である。

命題は成立するのであるが，証明はかなり複雑である。

なお，これを証明なしに認めて，陰関数の定理を証明することができる。(ラング [4])

(8) 第 2 次導関数のアナロジー

(5)で $F(X)=f'(X)=(f_x(X),\ f_y(X))$ とし，f' が微分可能ならば

$$(Df')(X)=\begin{bmatrix} f_{xx}(X) & f_{xy}(X) \\ f_{yx}(X) & f_{yy}(X) \end{bmatrix}$$

となる。(4)と同じように考えて，f_{xx}，f_{xy}，f_{yx}，f_{yy} がすべて連続ならば，f は C^2 級であるという。このとき $f_{xy}=f_{yx}$ であるから

$$(Df')(X)=\begin{bmatrix} f_{xx}(X) & f_{xy}(X) \\ f_{xy}(X) & f_{yy}(X) \end{bmatrix}$$

右辺の行列はHessianである。

フラニガン（[5]）は $f''(X)$ は D から R への写像で $H=(h,\ k)$ に対して

$$f''(X)H=(Df')(X)^tH\cdot H \quad (\cdot\ \text{は内積を表す})$$

と定義している。この $f''(X)$ が一変数の第二次導関数に対応し，*Hessian* が付随する行列である。

Hessianに付随する2次形式は

$$ax^2+2bxy+cy^2$$

で，極めて容易に証明できる次の補題が成立する。

［補題］$(0,\ 0)$ と異なる，すべての $(x,\ y)$ に対して

(1)　$ax^2+2bxy+cy^2>0\ (<0) \Longleftrightarrow a>0\ (a<0),\ b^2-ac<0$

(2)　$b^2-ac>0 \Longrightarrow ax^2+2bxy+cy^2$ は正にも負にもなる。

一方，$f: D\subset R^2 \to R$ に対する一変数のテーラーの定理（$n=2$）のアナロジーは

$$f(A+H)-f(A)=f'(A)H+\frac{1}{2}f''(A+\theta H)H,\quad (0<\theta<1)$$

となり，これも容易に証明できる。

A を危点（critical point）とすれば，

$$f(A+H)-f(A)=\frac{1}{2}f''(A+\theta H)H,\quad (0<\theta<1)$$

である。これと補題から，よく知られた極値の判定条件を導くことができる。ただし，きちんとした証明は少々複雑である。一変数の場合，2．で述べたように，f が C^2 級ならば $f''(a)>0$ から，$|h|$ が十分小さければ $f''(a+\theta h)>0$ であるが，二変数の場合，$f''(A)H>0$ から $f''(A+\theta H)H>0$ は，すぐにはでてこないからである。

5．結語

微分積分学教程では教材の選択，取扱いに様々な様相があって然るべきであるが，我国で発行されている夥しい微分積分学の教科書の，ほとんどいずれをとっても B は A の換骨奪胎といった感を禁じ得ないのは誠に残念なことである。

今各大学では，一般教育の廃止を含め，その見直しが行われているところであるが，大学初年度の微分積分学教程は今後いかなる地位を占めていくのであろうか。それはそれとして，微分積分学教程それ自身もこの機会に見直し，それが必須の学生が，より興味を持てるように，そして真の基礎となるように願い，あえてこの小論を提出するものである。

文　献

1）シュヴァルツ/斎藤正彦訳，解析学 I 集合・位相，東京図書，(1970).
2）稲葉三男，微積分の根底をさぐる，現代数学社（1991).
3）D. Scott and D.R. Peeples, A Constructive Proof of the Partial Fraction Decomposition, *Amer. Math. Monthly*, **95**, 651-653 (1988).
4）S. Lang, Calculus of Several Variables, 2nd ed., Addison-Wesley (1979).
5）F.J. Flanigan, J.L. Kazdan, Calculus Two, 2nd ed., Springer-Verlag (1990).
6）W. Flemming, Functions of Several Variables, 2nd ed., Springer-Verlag (1977).
7）T.M. Apostol, Mathematical Analysis, 2nd ed., Addison-Wesley (1974).
8）P. Lax, S. Burstein, A. Lax, Calculus with Applications and Computing, Vol. 1, Springer-Verlag (1976).
9）竹之内脩，解析学の教育について，数学，**44**，175-181 (1992).

(1992年 9 月 2 日受理)