カラー超伝導におけるゆらぎ効果

高知大理　岩崎正春
広大理　山口圭治　宮村　修

§1. はじめに

多くの物質の相転移において新しい秩序相を特徴づける秩序パラメーターは，通常相においても“ゆらぎ”として相転移の前駆現象としての役割を担っている．たとえば通常の(電子)超伝導では，ギャップパラメーターのゆらぎは通常相において電気伝導率の増大をもたらしparaconductivityとしてよく知られている．ハドロン物理学においては，カイラル相転移に関してこのゆらぎは初田-国広によって予言され，高密度星の冷却現象などに見られることが指摘されている．他方，高密度クォーク物質におけるカラー超伝導の可能性が最近議論されている．しかもこの場合，ギャップパラメーターは大きなゆらぎをもつことが指摘されている．したがってゆらぎとしてのソフトモードがカラー超伝導では非常に重要な役割を演ずることが期待される．

§2. 有効作用

クォーク多体系のラグランジアンとして次の4体フェルミ相互作用をとる。

$$L=\bar{\psi}(i\gamma\partial+\mu\gamma^0)\psi+g\sum_a(\bar{\psi}\gamma_\mu\lambda^a\psi)(\bar{\psi}\gamma^\mu\lambda^a\psi), \tag{1}$$

ここでμは化学ポテンシャルを，λ^aはSU(3)カラー行列を表す。相互作用項をフィルツ変換して最も引力の強い項のみを残すと次式を得る。

$$L=\bar{\psi}(i\gamma\partial+\mu\gamma^0)\psi+\frac{2g}{3}\sum_{a,b=2,5,7}{}'(\bar{\psi}\gamma_5 C\lambda^a\Lambda^b\bar{\psi}^t)(\psi^t C^{-1}\gamma^5\lambda^a\Lambda^b\psi). \tag{2}$$

右辺のΛ^bはSU(3)フレーバー行列を表す．クーパー対としては，カラー反対称，フレーバー反対称，スピンシングレット状態になっている．温度$T(\beta=1/T)$で熱平衡にある系の分配関数は経路積分表示を用いて

$$Z=\mathrm{Tr}\exp[-\beta\hat{H}]=\int\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\exp[-S] \tag{3}$$

$$S=\int_0^\beta d\tau\int d^3x[\bar{\psi}(x)\partial_\tau\psi(x)+\mathcal{H}] \tag{4}$$

で与えられる。さて，ここでクォーク対を表す補助場$\Delta(x)$を次の恒等式を通して導入する。

$$1=\int\mathcal{D}\Delta^*\mathcal{D}\Delta\exp[-\kappa^2\int d^4x\Delta^*\Delta] \tag{5}$$

この式を(3)へ代入する。

$$Z=\int\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\Delta^*\mathcal{D}\Delta\exp[-S-\kappa^2\int d^4x\Delta^*\Delta] \tag{6}$$

右辺のフェルミオンの経路積分を実行するため $\psi(x)$ と $\Delta(x)$ をフーリエ変換する。

$$\psi(x)=\sum_{n}\sum_{\mathbf{p}}\sum_{\alpha}\psi_n(\mathbf{p},\alpha)u(\mathbf{p},\alpha)e^{i\mathbf{px}-\omega_n\tau} \tag{7}$$

$$\Delta(x)=\sum_{l}\sum_{\mathbf{q}}\phi_l(\mathbf{q})e^{i\mathbf{qx}-\omega_l\tau} \tag{8}$$

これらを (4) へ代入し, フェルミオンの経路積分を実行すると対場で表現された形の有効作用を得る。

$$Z=\int\mathcal{D}\phi^*\mathcal{D}\phi\exp[\mathrm{Tr}\log(\beta G^{-1})-\beta\kappa^2\sum|\phi(q)|^2] \tag{9}$$

ただし,G^{-1} はつぎの式で与えられる。($\xi_p=\epsilon_p-\mu$)

$$G^{-1}=\begin{pmatrix} i\omega_n-\xi_p & \hat{\Delta}_{p,-p'} \\ \hat{\Delta}_{-p',p} & i\omega_n+\xi_p \end{pmatrix} \tag{10}$$

§3. 対場のゆらぎ

通常のBCS理論は有効作用の経路積分表示式に古典(c一数)解をとることにより得られる。解としてつぎのカラーフレーバーロッキング(CFL)解をとる。

$$\Delta_0(p,\tilde{p}')\equiv\delta_{p,p'}\sqrt{\frac{8g}{3}}\phi_0{\sum_a}'\lambda_a\otimes\Lambda_a. \tag{11}$$

定数 $\phi_0\equiv\phi(0)$ は後で決定される. つぎに古典解の回りのゆらぎを考えよう. 逆プロパゲーターを

$$\begin{aligned} G^{-1}&=\begin{pmatrix} i\omega-\xi_p & \Delta(p,\tilde{p}') \\ \Delta^*(\tilde{p}',p) & i\omega'+\xi_{p'} \end{pmatrix}+\sqrt{\frac{8g}{3}}\begin{pmatrix} 0 & \tilde{\phi}(p,\tilde{p}')\hat{\epsilon} \\ \tilde{\phi}^*(\tilde{p}',p) & 0 \end{pmatrix} \\ &\equiv G_0^{-1}+\Delta G^{-1}, \end{aligned} \tag{12}$$

とかくと, ゆらぎは右辺第二項によって記述される. この式を有効作用に代入すると $S_{\rm eff}=S^{(0)}_{\rm eff}+S^{(1)}_{\rm eff}+S^{(2)}_{\rm eff}\cdots$ となる. ゼロ次の項はBCS作用であり, 古典解が極値である条件より一次の作用はゼロとなりギャップ方程式を与える. 従ってゆらぎを記述する第3項はつぎのように書ける.

$$S^{(2)}_{\rm eff}=\sum_q\begin{pmatrix}\phi^\dagger(q) & \phi(-q)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_q & Y_q \\ Y^*_q & X^*_{-q}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi(q) \\ \phi^*(-q)\end{pmatrix}. \tag{13}$$

ただし, 右辺の X_q, Y_q は次式で与えられる.

$$X_q=\frac{4g}{3}\sum_p\mathrm{Tr}\left[\frac{(i\omega_p+\xi_p)(i\omega_{p-q}-\xi_{p-q})\hat{\epsilon}^2}{(\omega_p^2+\hat{E}_p^2)(\omega_{p-q}^2+\hat{E}_{p-q}^2)}\right]|N_{p,p-q}|^2+\frac{1}{2}\beta, \tag{14}$$

$$Y_q=\frac{4g}{3}\sum_p\mathrm{Tr}\left[\frac{\Delta_0^\dagger\Delta_0\hat{\epsilon}^2}{(\omega_p^2+\hat{E}_p^2)(\omega_{p-q}^2+\hat{E}_{p-q}^2)}\right]|N_{p,p-q}|^2. \tag{15}$$

ここで $\hat{E}_p$ は準粒子のエネルギーを表し $\hat{E}_p^2 = \xi_p^2 + \Delta_0^\dagger \Delta_0$ で定義される．

次の関係式により２つの実スカラー場を導入しよう．

$$\sigma(q) \equiv \phi(q) + \phi^*(-q) \quad \pi(q) \equiv -i(\phi(q) - \phi^*(q)), \tag{16}$$

これらの場はカイラル力学におけるシグマ場とパイ場に相当するものである．これらの新しい場を用いると作用はつぎのように書ける．

$$S_{\text{eff}}^{(2)} = \sum_q \left(\sigma^*(q) D_\sigma^{-1}(q) \sigma(q) + \pi^*(q) D_\pi^{-1}(q) \pi(q) \right), \tag{17}$$

ここで，$D_\sigma^{-1}(q) \equiv (X_q + Y_q)/2, \quad D_\pi^{-1}(q) \equiv (X_q - Y_q)/2$ と定義されている．シグマモードがギャップパラメーターの振幅モードに対応し，パイモードが位相モードに対応している．カイラル力学では，前者がシグマ中間子に，後者がパイ中間子に対応する．

§4. ソフトモード

古典場のまわりのゆらぎは臨界温度近くで増大することが知られている．われわれも臨界温度の前後に分けてこの運動を調べよう．

(i) $\phi_0 \neq 0$ $(T < T_c)$:

各モードは２種類のボソンに対応している．これらのボソンはカラーをもったダイクォークであり，それぞれの質量は $D_\sigma^{-1}(\vec{q} = 0, \nu)$ と $D_\pi^{-1}(\vec{q} = 0, \nu)$ のゼロ点により与えられる．前節のギャップ方程式を用いると $D_\pi^{-1}(q = 0) = 0$ となることが示せるから，パイボソンは質量ゼロのN-Gボソンになっていることがわかる．一方，シグマボソンはヒッグスボソンに対応し，$D_\sigma^{-1}(\vec{q} = 0, \nu = 2\Delta_0) = 0$ よりその質量は $2\Delta_0$ である．したがって，パイボソン，クォーク，シグマボソンの三者の質量比は

$$M_\pi : M_q : M_\sigma = 0 : 1 : 2. \tag{18}$$

となり，南部による quasi-supersymmetry の関係を満たしている．

(ii) $\phi_0 = 0$ $(T > T_c)$:

通常相においても臨界温度近くでは秩序パラメーターのゆらぎが増大することはソフトモードと呼ばれ相転移の前駆現象 (precursor) としてよく知られている．このときパイボソンとシグマボソンは縮退しており，それらの逆プロパゲ-ターはつぎのように書ける．

$$D^{-1}(q) \equiv \frac{X_q}{2} = 8g \sum_p \frac{|N_{p,p-q}|^2}{(i\omega - \xi_p)(i\omega - i\nu + \xi_{p-q})} + \frac{\beta}{4}. \tag{19}$$

ソフトモードの振る舞いを調べるため，初田-国広に従い系のスペクトル関数に注目しよう．まず上式を解析接続 $i\nu \to \omega + i\epsilon$ することにより，遅延グリーン関数が得られることに注意する．スペクトル関数は遅延グリーン関数の虚部 $S(\omega) \propto \mathrm{Im} D_R(\omega)$ であるから，上のプロパゲ-ターを調べることによりグリーン関数，ないしは系の物理量を求めることができる．ここではプロパゲーターの定性的性質のみ調べるため，臨界点の両側のプロパゲーターの連続性に着目する．

$$\lim_{T \to T_c + 0} D_R^{-1}(\omega; T) = \lim_{T \to T_c - 0} (D_\pi)_R^{-1}(\omega; T). \tag{20}$$

右辺のパイボソンはN-Gボソンだから $q \to 0$ でゼロに近づく．したがってスペクトル関数は臨界温度近くで増大することが予測される．

このゆらぎの増大は現実の物理現象において観測されないだろうか．これに関しても初田-国広により，カイラル相転移に伴うソフトモードが星の冷却を促進するとの指摘があるが，われわれのモードも同様な効果をもつ．高温クォーク星における２つの高エネルギークォークは，つぎのような弱い相互作用の２次過程によりニュートリノを放出して冷却することが期待される．

$$q_1 + q_2 \to q_1' + e^- + \bar{\nu}_e + q_2 \to (q_1' q_2')_{\rm soft} + \bar{\nu}_e + \nu_e. \tag{21}$$

右辺のダイクォークボソンのボース-アインシュタイン凝縮によってこの反応 (レーザー冷却) は促進され，星の冷却が加速されることが予期される．

References

1) T.Hatsuda and T.Kunihiro, Phys.Rep.**247**(1994) 221, and references therein.
2) D.Bailin, A.Love, Phys.Rept.**107**(1984) 325, and references therein.
3) M.Iwasaki, T.Iwado, Phys.Lett.**B350**(1995) 163.
4) M.Alford, K.Rajagopal, F.Wilczek, Phys.Lett.**B422**(1998) 247.
5) M.Alford, K.Rajagopal, F.Wilczek, Nucl.Phys.**B537**(1999) 443.
6) F.Wilczek, hep-ph/0003183 (2000).
7) M.Mukerjee, Y.Nambu, Ann.of Phys.**191**(1989) 143.
8) K.Rajagopal, hep-ph/0009058 (2000).